

ΙΩΑΝΝΟΥ Θ. ΧΑΪΝΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

**«Διαφορικός και ολοκληρωτικός Λογισμός συναρτήσεων
πολλών μεταβλητών. – Διαφορική Γεωμετρία.
Διανυσματική Ἀνάλυσις».**

**Διά τούς σπουδαστάς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου, τούς
φοιτητάς Πολυτεχνικῶν καί Φυσικομαθηματικῶν Σχολῶν κ.ἄ.**

ΤΟΜΟΣ Β

ΝΕΑ ΕΚΔΟΣΙΣ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ – ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΑΘΗΝΑΙ 1991

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογρα-
φήν τοῦ συγγραφέως

Ἀπαγορεύεται ἡ ἀνατύπωσις ἢ μετάφρασις τοῦ παρόντος
ἢ καὶ μέρους αὐτοῦ ἀνεῦ ἐγγράφου ἀδείας τοῦ συγγραφέως.

Copyright 1974 by J.Th.Haïnis Printed in Athens,
Greece.

All rights reserved.

Edition 1991

This book or any part thereof must not be reproduced
in any form without the written permission of the author.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ παρῶν τόμος ἀποτελεῖ συνέχεια τῆς ὑλῆς τῶν μαθημάτων τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν, τὰ ὅποια διδάσω εἰς τοὺς σπουδαστὰς τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου.

Εἰς τὸν παρόντα τόμον κατεβλήθει καὶ προσπάθεια ὥστε νὰ περιορισθῶ ἀκριβῶς εἰς αὐτὰ τὰ κεφάλαια, τὰ ὅποια θεωροῦνται ἀπαραίτητα διὰ τὴν κάλυψιν τῶν ἀναγκῶν εἰς τὰ Ἀνώτερα Μαθηματικά ὑπὸ τῶν Τεχνολογιῶν Ἑδρῶν τοῦ Ἰδρύματος. Παρ' ὅτι ὁ τόμος αὐτός παρουσιάζει ἕνα ἱκανόν ἀριθμὸν σελίδων, ἐν τούτοις περιορίσθην ἀκριβῶς εἰς τὰς πλέον ἀναγκαιὰς παραγράφους, αἱ ὅποια εἰς ἄλλου ἔχουν ζητηθεῖ καὶ ἐγχειθεῖ ὑπὸ τῶν Σχολῶν τοῦ Ἰδρύματος ὅπως διδάσκονται κατὰ τὰ τέσσαρα πρῶτα ἑξάμηνια εἰς τὸ Ε.Μ.Π. Ἐξ ἄλλου εἰς τὸν παρόντα τόμον ἔχομεν συμπεριλάβει ἕνα λίαν ἱκανοποιητικὸν ἀριθμὸν παραδειγμάτων, ἀσκήσεων πρὸς λύσιν ὡς καὶ πολλῶν ἐφαρμογῶν ἐν τῇ Μηχανικῇ - Ἠλεκτρισμῷ - Γεωμετρίας κ.τ.λ.

Εἰς τὸν παρόντα τόμον ἡ ἐπιλεγείσα ὕλη κατενεμήθη τελικῶς εἰς ὀκτὸ μέρη.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος διαπραγματεύομεθα τὰς συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν καὶ κυρίως τὴν ἔννοιαν τοῦ διπλοῦ - τριπλοῦ καὶ γενικῶς πολλαπλοῦ κατὰ Riemann ὁλοκληρώματος. Δίδομεν δὲ ἰδιαιτέραν βαρύτητα εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς Διανυσματικῆς Ἀναλύσεως. Ἐπίσης εἰς αὐτὸ τὸ μέρος δίδομεν καὶ τὰς βασικὰς ἐννοίας ἐκ τῆς θεωρίας τῶν καμπύλων καὶ Ἐπιφανειῶν μὲ ἐφαρμογὴν εἰς τὰ Ἐπιδιαμπεύλια καὶ Ἐπιφανειακά Ὀλοκληρώματα.

Θεωρῶ κατῆκον μου νὰ ἐυφράσω τὰς θερμὰς μου εὐχαριστίας πρὸς τοὺς Επ. Καθηγητὰς Καρανάσιον Σωτήριον, Βλασεόπουλον Βασίλειον, Φελλούρην Ἀρχύριον καὶ τοὺς βοηθοὺς κ.κ. Βεληβασίην Νικολάου, Πέτρου Ἰωάννην δι' ὅλας τὰς εὐστόχους παρατηρήσεις καὶ ὑποδείξεις πού ἔαμναν κατὰ τὰς διαφόρους ἐκδόσεις τοῦ Βιβλίου καὶ αἱ ὅποια συνετέλεσαν εἰς τὴν ἀρτιωτέραν ἐμφάνισιν αὐτοῦ.

Ἀθῆναι Ἀπρίλιος 1991

ΙΩΑΝΝΗΣ Θ. ΧΑΪΝΗΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α'

ΣΕΛΙΔ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι: Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

§1. Ἡ ἔννοια τῆς ποτμε - χώρος με ποτμε.....	9
§2. Μετρίως χώρος.....	12
§3. Ὅριον ἀσολουδίας ἐντὸς μετρίου χώρου.....	14
§4. Ἀνοιτὰ καὶ κλειστὰ σύνολα.....	18
§5. <u>Περιοχαὶ καὶ σημεῖα συσσωρεύσεως συνόλου κ.τ.λ</u>	22
I. Περιοχαὶ ἐνός συνόλου.....	22
II. Σημεῖα συσσωρεύσεως ἢ ὁριαυὰ σημεῖα.....	22
III. Μεμονωμένον σημεῖον.....	22
IV. Ἐγγύτατον ἢ συνοριακόν σημεῖον ἐνός συνόλου.....	23
V. Συμπληρὴ σύνολα.....	23
VI. Σύνολον συνευκτιόν.....	23
§6. Ἡ ἔννοια τοῦ ἐσωτερίου γινόμενου.....	24
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις.....	26

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ὉΡΙΣΜΕΝΑΙ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΜΕ ΤΙΜΑΣ ΕΠΙΣΗΣ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

§1. Ὅριον καὶ συνέχεια συναρτήσεως.....	30
§2. Διανυσματικὴ συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς $(f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p)$	32
§3. Πραγματικὴ συνάρτησις διανυσματικῆς μεταβλητῆς.....	33
§4. Περὶ τοῦ ὁρίου καὶ τῆς συνεχείας τῆς συναρτήσεως $(x, y) \rightarrow f(x, y)$	35
§5. Ἐπ'ἀλλήλα ὅρια τῆς $(x, y) \rightarrow f(x, y)$	39
§6. Διανυσματικὴ συνάρτησις διανυσματικῆς μεταβλητῆς $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$	40
§7. Ὁμαλὴ συνέχεια διανυσματικῶν συναρτήσεων.....	42
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις.....	43

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗ-

ΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

§1. Μερικαὶ παράγωγοι.....	46
§2. Παραγώγισις καὶ συνέχεια πραγματικῆς συναρτήσεως πολλῶν μεταβλητῶν.....	48

§3. Διαφορίσιμοι συναρτήσεις.....	49
§4. Διαφοριούν συναρτήσεως πολλών μεταβλητών.....	51
§5. <u>Παράγωγος και διαφοριούν συνδέτου συναρτήσεως</u>	53
I. Περίπτωσης μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.....	53
II. Περίπτωσης περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητών.....	55
§6. Μερικαὶ παράγωγοι καὶ διαφοριὰ δευτέρας τάξεως.....	56
§7. Μερικαὶ παράγωγοι καὶ διαφοριὰ ἀνατέρας τῆς δευτέρας τάξεως.....	59
§8. Παράγωγοι καὶ διαφοριὰ συνδέτου συναρτήσεως.....	60
§9. Τύπος τοῦ Taylor διὰ συναρτήσεις δύο μεταβλητών.....	63
§10. Παραγωγίσις ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὁλοκληρώσεως.....	64
§11. Ἰδιότητες τοῦ διαφοριουῦ συναρτήσεως πολλών μεταβλητών.....	66
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις.....	69

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV: ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§1. Πεπλεγμένη συνάρτησις ὀριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $f(x,y)=y$	75
§2. Πεπλεγμένη συνάρτησις ὀριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$	84
§3. <u>Ἰακωβιανὰ ὀρίζουσαι - Σύστημα πεπλεγμένων συναρτήσεων</u>	87
A'. Ἰακωβιανὰ ὀρίζουσαι.....	87
B'. Σύστημα πεπλεγμένων συναρτήσεων.....	89
Γ'. Γεωμετρικὰ ἐφαρμογαί.....	95
§4. Συναρτησιακὴ ἐξάρτησις.....	96
§5. <u>Κυλινδρικαὶ καὶ σφαιρικαὶ συντεταγμέναι σημείου</u>	98
I. Κυλινδρικαὶ συντεταγμέναι.....	98
II. Σφαιρικαὶ συντεταγμέναι.....	99
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις.....	101

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V: ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

§1. Τοπιὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως: $f(x,y)$	108
§2. Τοπιὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα μιᾶς συναρτήσεως πολλών μεταβλητών.....	113
§3. <u>Τοπιὰ ἀυρότατα συναρτήσεως διδομένης ὑπὸ πεπλεγμένην μορφήν</u>	117
I. Τοπιὰ ἀυρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x,y)=0$	117
II. Τοπιὰ ἀυρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=0$	118

§4. Ἀιρότατα ὑπὸ συνθήκας.....	120
§5. Ἀπόλυτα αἰρότατα μιᾶς συναρτήσεως πολλῶν μεταβλητῶν.....	126
Συμπληρώματα καὶ ἀσυτήσεις.....	129

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI: ΠΕΡΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΩΝ

§1. Ἀνώμαλα σημεῖα μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης.....	132
§2. Περιβάλλουσα μιᾶς οἰμογενείας ἐπιπέδων γραμμῶν.....	136
§3. Περιβάλλουσα μιᾶς οἰμογενείας ἐπιφανειῶν.....	142
Συμπληρώματα καὶ ἀσυτήσεις.....	144

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII: ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

§0. Προαταρτιαὶ τοπολογικαὶ γνῶσεις τοῦ χωρίου \mathbb{R}^2	148
§1. Ἡ ἔννοια τοῦ ἔμβαδου ἐπιπέδου σχήματος.....	150
§2. Ὁρισμός τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.....	153
§3. Συνθήκαι ὑπάρξεως τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.....	155
§4. Ὁλοκληρώσιμοι συναρτήσεις.....	162
§5. Γεωμετρικὴ ἐρμηνεία τοῦ ὁλοκληρώματος $\iint_D f(x,y) dx dy$	164
§6. Ἰδιότητες τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.....	165
§7. Ὑπολογισμός τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.....	167
§8. Σημειωμαὶ μετασχηματισμοὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον.....	175
§9. Ἀλλαγὴ τῶν μεταβλητῶν εἰς ἓνα διπλοῦν ὁλοκληρώμα.....	179
§10. Ἐφαρμογαὶ τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων εἰς τὴν Γεωμετρίαν.....	187
§11. Συνολοσυναρτήσεις.....	193
§12. Ἐφαρμογαὶ τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων εἰς τὴν Μηχανικὴν.....	197
§13. Ὁλοκληρώσεις καὶ διαφορίσεις γενικευμένου ὁλοκληρώματος ὡς πρὸς παράμετρον.....	201
§14. Τὸ διπλοῦν ὁλοκληρώμα ὡς συνάρτησις τῶν ὁρίων του.....	207
Συμπληρώματα καὶ ἀσυτήσεις.....	210

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII: ΤΡΙΠΛΑ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

§1. Ὁρισμός καὶ βασικαὶ ἰδιότητες τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.....	214
I. Εἰσαγωγικαὶ γνῶσεις.....	214
II. Γενιὰ περὶ ὄγκων τῶν χωρίων τοῦ \mathbb{R}^3	214
III. Ὁρισμός τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.....	216

IV. Συνδῆται ὁλοκληρώσεως	217
V. Ἰδιότητες τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος	218
§2. Ὑπολογισμός τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος	219
§3. Ἀλλαγὴ τῶν μεταβλητῶν εἰς ἓνα τριπλοῦν ὁλοκληρώμα	223
§4. Τὸ τριπλοῦν ὁλοκληρώμα ὡς μία προσδετικὴ συνολοσυνάρτησις	228
§5. <u>Διάφοροι ἔφαρμογαί</u>	229
I. Ὑπολογισμός μάσης στερεοῦ ἐν τῇ πυκνότητι αὐτοῦ	229
II. Ροπή ἀδρανείας	229
III. Συντεταρμέναι τοῦ κέντρου βάρους	230
IV. Πευτώνειος ἑλξεις	230
§6. Πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα	231
§7. Γενικευμένα πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα	235
§8. Αἱ συναρτήσεις Γάμμα καὶ Βῆτα	244
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις	250

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

§1. Ὁρισμός καὶ ἰδιότητες τοῦ ἑσωτερίου καὶ ἑξωτερικοῦ γινομένου δύο διανυσμάτων εἰς τὸν χώρον R^3	256
§2. Διανυσματικὴ συνάρτησις πραγματικῆς μεταβλητῆς	259
§3. Τριέδρον καὶ τύποι τοῦ Frenet	263
§4. Ὑπολογισμός τῆς καμπυλότητος καὶ στρέψεως μιᾶς καμπύλης	271
§5. Κανονικαὶ ἑξισώσεις μιᾶς καμπύλης	275
§6. Κέντρον καὶ κύκλος καμπυλότητος μιᾶς καμπύλης	276
§7. Ἐνεδιγμένη καὶ ἐξειλημένη καμπύλης	278
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις	282

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

§1. <u>Ἀναλυτικὴ παραμετρικὴ παράστασις μιᾶς ἐπιφανείας</u>	288
I. Εἰσαγωγικαὶ γνῶσεις	288
II. Διάφορα εἶδη ἐπιφανειῶν	290
§2. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον καὶ μάθετον διάνυσμα ἐπιφανείας	293

§3.	Μήκος τόξου καμπύλης - πρώτη δεμελιώδης τετραγωνική μορφή - γωνία δύο καμπύλων της ἐπιφανείας.	296
§4.	Δευτέρα δεμελιώδης τετραγωνική μορφή.	301
§5.	Ἐλλειπτιυά-ὑπερβολιυά-Παραβολιυά σημεία μιᾶς ἐπιφανείας.	307
§6.	Δείκτρια τοῦ Dupin.	310
§7.	Πρωτεύουσαι διευθύνσεις-Πρωτεύουσαι καμπυλότητι-γραμμαί καμπυλότητος.	312
§8.	Μέση καμπυλότης H καὶ ὀλιυή καμπυλότης (τοῦ GAUSS) K	316
§9.	Τὰ δεμελιώδη ποσά τῆς ἐπιφανείας $z = f(x, y)$	319
§10.	Τύπος τοῦ RODRIGUES.	320
§11.	Ἀσυμπτωτιυαί γραμμαί μιᾶς ἐπιφανείας.	322
§12.	Ἐξισώσεις τῶν GAUSS-WEINGARTEN.	325
§13.	Γεωδαισιαιυή καμπυλότης.	328
§14.	Γεωδαισιαιυαί γραμμαί.	332
§15.	Ἀναπτυνταί ἐπιφάνειαι.	339
§16.	<u>Ἀπειυόνις ἐπιφανειῶν.</u>	346
	I. Ἰσομετριυή ἀπειυόνις.	346
	II. Σύμμορφος ἀπειυόνις.	348
	III. Ἰσομβαδιυή ἀπειυόνις.	349
§17.	Περὶ ἑπαφῶν.	352
	Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις.	352

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙ: ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

§1.	Ὁρισμός ἐπιυαμπυλίου ὁλοκληρώματος κατὰ μήκος τόξου καμπύλης (A° εἶδους). ..	361
§2.	Ὑπολογισμός τοῦ ἐπιυαμπυλίου ὁλοκληρώματος A° εἶδους.	362
§3.	<u>Ἐφαρμογαί τῶν ἐπιυαμπυλίων ὁλοκληρωμάτων A° εἶδους εἰς τὴν Μηχανιυήν.</u>	366
	I. Προσδιορισμός τῆς μάξης ὀλιυῆς γραμμῆς ἐν τῇ γραμμιυῇ.	
	πυκνότητος αὐτῆς.	366
	II. Εὔρεσις τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς ὀλιυῆς γραμμῆς.	367
	III. Ὑπολογισμός τῆς ροπῆς ἀδρανείας ὀλιυῆς γραμμῆς.	368
§4.	Ἐπιυαμπύλιον ὁλοκληρώμα διανυσματιυῆς συναρτήσεως (B° εἶδους).	370
§5.	<u>Ὑπολογισμός τοῦ ἐπιυαμπυλίου ὁλοκληρώματος B° εἶδους.</u>	371
	I. Τὸ ἐπιυαμπύλιον ὁλοκληρώμα εἰς τὸ ἐπίπεδον.	374

II. Ξεάρτησις τοῦ ἐπιαιμυλίου ὁλουθηρώματος ἐν τῇ φορᾷ τοῦ τόξου	374
III. Ἰδιότητες τοῦ ἐπιαιμυλίου ὁλουθηρώματος 8 ^{ου} εἴδους	375
IV. Παραδείγματα ὑπολογισμοῦ ἐπιαιμυλίου ὁλουθηρώματος 8 ^{ου} εἴδους	376
§6. Ἑρμηνεία τοῦ ἐπιαιμυλίου ὁλουθηρώματος εἰς τὴν Μηχανικὴν	377
§7. Σχετινὰ θεωρήματα ἀφορῶντα τὰ ἐπιαιμύλια ὁλουθηρώματα 8 ^{ου} εἴδους	379
§8. Τύπος τοῦ GREEN (εἰς τὸ ἐπίπεδον)	383
§9. Συνθῆναι ἵνα ἓνα ἐπιαιμύλιον ὁλουθηρῶμα δὲν ἔξαρτᾶται ἐν τοῦ δρόμου ὁλουθηρώσεως	386
§10. Ἐπιαιμύλια ὁλουθηρώματα εἰς ἓνα πολλαπλῶς συνευτιμὸν πεδίον	393
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις	397

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

§1. Ὁρισμός ἐπιφανειακοῦ ὁλουθηρώματος σχετινῶς πρὸς τὸ ἔμβασον (Ἐξέλιξις)	402
§2. Διάφοροι μορφαὶ τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλουθηρώματος	405
§3. Ἐφαρμογαὶ τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλουθηρωμάτων εἰς τὴν Μηχανικὴν	410
§4. Προσανατολισμέναι ἐπιφάνειαι	411
§5. Ἐπιφανειακά ὁλουθηρώματα 8 ^{ου} εἴδους	415
§6. Ἐφαρμογαὶ τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλουθηρωμάτων 8 ^{ου} εἴδους εἰς τὴν γεωμετρίαν-Μηχανικὴν	420
I. Ὅγκος στερεοῦ περιυλειομένου ὑπὸ υλειαστῆς ἐπιφανείας	420
II. Ὑπολογισμός τοῦ μέτρου στερεᾶς γωνίας	421
III. Δύναμις ἑλξεως	423
§7. Τύπος τοῦ Stokes	424
§8. Θεώρημα ἀπουλίσσεως ἢ τύπος τοῦ OSTROGRADSKY ἢ τοῦ GAUSS	429
Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις	433

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII : ΔΙΑΝΥΣΜ. ΑΝΑΛΥΣΙΣ-ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΩΝ

§1. Γενικαὶ ἔννοιαι	437
§2. Παράγωγος διανυσμ. συναρτήσεως πρᾶγμ. μεταβλητῆς	442
§3. Παράγωγος συναρτήσεως κατὰ δοθεῖσαν κατεύθυνσιν	446
§4. Κλίσις συναρτήσεως (gradient)	449
§5. Ἀπουλίσσις (divergence)	451

VII

	<u>ΣΕΛΙΣ</u>
§6. Περιστροφή (Rotation ή Curl)	453
§7. Πεδίου των gradient-Δυναμιών πεδίων	455
§8. Κυκλοφορία και όληνη ροή διανυσματικού πεδίου	459
§9. Όλουθηρωτικοί τύποι υπό διανυσματική διατύπωση	460
§10. Διανυσματικοί διαφορικοί τελεστές εις καρτυλ. συντεταγμένες	467
§11. Έφαρμογές των διανυσματικών τελεστών εις τας κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες	471
§12. Σωληνοειδή διανυσματικά πεδία	474
§13. Έξισώσεις συνεχείας	476
§14. Νευτώνεια πεδία	477
§15. Ηλεκτρομαγνητισμός	479
Συμπληρώματα και άσκήσεις	480

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ MAINARDI-CODAZZI

§1. Αι εξισώσεις των Mainardi-Codazzi	487
---	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Συμπληρώματα επί των άυροτάτων ευναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Λίναξ Ξενογλώσσων όνομάτων	501
Εύρετήριο όρων	502
Βιβλιογραφία	506

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

§ 1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΝΟΡΜΕ - ΧΩΡΟΣ ΜΕ ΝΟΡΜΕ

Όρισμός 1-1-1. Εἷς διανυσματικὸς χώρος E ἐπὶ τοῦ σώματος R τῶν πραγμ. ἀριθμῶν λέρομεν ὅτι εἶναι εἷς χώρος μέ *norme*, ἐὰν ἔχῃ ὀρισθῇ ἐπὶ τοῦ E μία μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησις, συμβολιζομένη διὰ $\| \cdot \|$, δηλ. $E \ni x \rightarrow \|x\| \in R_0^+$, ἔχουσα τὰς κατωθὶ ιδιότητες:

$$1^\circ/ \quad \|x\| = 0, \text{ ἐὰν καὶ μόνον, ἐὰν } x = \theta^{**}$$

$$2^\circ/ \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ διὰ καὶ } \lambda \in R \text{ καὶ } x \in E$$

$$3^\circ/ \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ οἷωνδήποτε ὄντων τῶν } x, y \in E. \text{ (Τριγωνικὴ ιδιότης).}$$

Ἡ συνάρτησις $\| \cdot \|$ καλεῖται *norme* ἐπὶ τοῦ E , τὸ δὲ ζεύγος $(E, \| \cdot \|)$ καλεῖται *χώρος μέ norme*. Αἱ ιδιότητες 2 καὶ 3 σημαίνουν, ὅτι ἡ $\|x\|$ εἶναι μία *υπερὶ* συνάρτησις ἐπὶ τοῦ E .

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ιδιοτήτων εὐνόηως διαπιστοῦνται τὰ ἀκόλουθα:

$$1^\circ/ \quad \|-x\| = \|x\|$$

$$2^\circ/ \quad \|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\|$$

$$3^\circ/ \quad \|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|.$$

Τὸ σύμβολον $\| \cdot \|$ θὰ χρησιμοποιῶμεν ὅταν πρὸκειται περὶ μιᾶς *norme* ἐπὶ τοῦ E . Ἐὰν ἔχωμεν πλείονας *normes* ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ χώρου, τότε θὰ χρησιμοποιῶμεν τὰ σύμβολα $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$, κ.τ.λ.

Παραδείγματα: $1^\circ/$ Ἐστω $E = R$. Ἡ συνάρτησις $x \rightarrow |x|$ εἶναι προφανῶς μία *norme* ἐπὶ τῆς εὐθείας R .

$2^\circ/$ Θεωροῦμεν τὸν διανυσματικὸν χώρον E τῶν ἐλεύθερων διανυσμάτων τοῦ σπινθόρου χώρου. Τὸ ἀπόλυτον μήκος αὐτῶν εἶναι μία *norme* ἐπὶ τοῦ E .

$3^\circ/$ Ἐπὶ τοῦ Εὐκλείδειου χώρου R^n ὀρίσομεν τρεῖς *normes*: $N_1(\cdot)$, $N_2(\cdot)$, $N_3(\cdot)$ ὡς ἀπο-

* Συμβολίζομεν με θ τὸ μηδενικὸν στοιχεῖον τοῦ διανυσματικοῦ χώρου.

Πρόσδωσ: "Εστω $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ έν διάνυσμα του \mathbb{R}^p . Ορίσομεν:

$$i) \quad N_1(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} = \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$ii) \quad N_2(x) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_p| = \sum_{i=1}^p |x_i|$$

$$iii) \quad N_3(x) = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|) = \max_{1 \leq i \leq p} (|x_i|)$$

Αί ούτω όρισθείσαι συναρτήσεϊς είναι normes.

Αί ιδιότητες 1 και 2, προφανώς, πληροούνται. Η 3η ιδιότης χρήσει αποδείξεως.

Διά τήν $N_1(x)$.

$$\text{Άρκει νά δείξωμεν: } \left(\sum_{i=1}^p (x_i + n_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^p n_i^2 \right)^{1/2}.$$

Δι ύψώσεως άφοτέρων τών μελών εις τό τετράγωνον, άρκει νά δείξωμεν:

$$\sum_{i=1}^p (x_i + n_i)^2 \leq \sum_{i=1}^p x_i^2 + \sum_{i=1}^p n_i^2 + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^p n_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{ή άρκει νά δείξωμεν:}$$

$$\sum_{i=1}^p |x_i| \cdot |n_i| \leq \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^p n_i^2 \right)^{1/2}.$$

Η τελευταία άνισότης είναι ή γνωστή έν τής Αλγέβρας άνισότης τών Cauchy-Schwarz.

Διά τήν $N_2(x)$.

Διά υάθε $1 \leq i \leq p$ έχομεν:

$$|x_i + n_i| \leq |x_i| + |n_i|, \text{ όθεν και } \sum_{i=1}^p |x_i + n_i| \leq \sum_{i=1}^p |x_i| + \sum_{i=1}^p |n_i|.$$

Έν τής τελευταίας σχέσεως και του όρισμού τής $N_2(x)$ έχομεν:

$$N_2(x+y) = \sum_{i=1}^p |x_i + n_i| \leq \sum_{i=1}^p |x_i| + \sum_{i=1}^p |n_i| = N_2(x) + N_2(y).$$

Διά τήν $N_3(x)$.

$$\text{Έχομεν } N_3(x+y) = \max(|x_1 + n_1|, |x_2 + n_2|, \dots, |x_p + n_p|)$$

$$\leq \max\{(|x_1| + |n_1|), (|x_2| + |n_2|), \dots, (|x_p| + |n_p|)\}$$

$$= \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|) + \max(|n_1|, |n_2|, \dots, |n_p|) = N_3(x) + N_3(y).$$

Όστε: $N_3(x+y) \leq N_3(x) + N_3(y)$.

Σχέσεις μεταξύ τῶν τριῶν προηγουμένων normes.

Πρόταση I-1-1. Ἐστω τὸ διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$N_3(x) \leq N_1(x) \leq N_2(x) \leq p \cdot N_3(x)$$

Ἀπόδειξις: α) Ἐστω $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Διὰ ὑπόλοιπο i , ὅπου $1 \leq i \leq p$, θὰ ἔχωμεν:

$$N_3^2(x) = x_i^2. \text{ Συνεπῶς } N_3^2(x) \leq N_1^2(x) \text{ ἢ } N_3(x) \leq N_1(x).$$

$$\beta). \text{ Εἶναι δὲ, } N_1^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 \leq (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_p|)^2 = N_2^2(x).$$

$$\text{Ὅθεν } N_1(x) \leq N_2(x).$$

$$\gamma) \text{ Διὰ τὰς } 1 \leq i \leq p \text{ εἶναι } |x_i| \leq N_3(x).$$

$$\text{Συνεπῶς: } N_2(x) = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_p| \leq p \cdot N_3(x).$$

Ἰσοδύναμοι normes

Ὁρισμός I-1-2. Ἐστω ὁ διανυσματικὸς χώρος E ἐπὶ τοῦ σώματος \mathbb{R} τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καὶ N, N' δύο normes ἐπ' αὐτοῦ. Θὰ λέρωμεν ὅτι ἡ norme N' εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν norme N ($N' \sim N$), ἐὰν ὑπάρχουν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ α, β ($0 < \alpha \leq \beta$) τοιοῦτοι, ὥστε διὰ τὰς $x \in E$ νὰ ἔχωμεν:

$$\alpha \cdot N(x) \leq N'(x) \leq \beta \cdot N(x). \quad (1)$$

Ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα σχέση \sim , εἰς τὸ σύνολον τῶν normes ἑνὸς διανυσματικοῦ χώρου E εἶναι μία σχέση ἰσοδυναμίας.

Πράγματι:

1º/ Ἡ \sim εἶναι ἀνακλῆστικὴ: Ἐὰν λάβωμεν $N' = N$ καὶ $\alpha = \beta = 1$ ἡ σχέση (1) ἐπαληθεύεται. Συνεπῶς διὰ τὰς $x \in E$ ἔχομεν $N \sim N$.

2º/ Ἡ \sim εἶναι συμμετρικὴ: Διὰ τὰς $x \in E$ ἔχομεν:

$$\alpha \cdot N(x) \leq N'(x) \leq \beta \cdot N(x) \implies \frac{1}{\beta} N'(x) \leq N(x) \leq \frac{1}{\alpha} N'(x).$$

3º/ Ἡ \sim εἶναι μεταβατικὴ: Ἐστω ὅτι ἡ $N' \sim N$ καὶ ἡ $N \sim N''$. Θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ $N' \sim N''$.

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς \sim , θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha \cdot N(x) \leq N'(x) \leq \beta \cdot N(x)$$

$$\gamma \cdot N''(x) \leq N(x) \leq \delta \cdot N''(x).$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\alpha \cdot \gamma \cdot N''(x) \leq N'(x) \leq \beta \cdot \delta \cdot N''(x)$$

δηλ. $N' \sim N''$.

Συμφώνως προς την Πρότασιν I-1-1 αι τρεις normes N_1, N_2, N_3 αι όρισθείσαι επί του χώρου \mathbb{R}^p είναι ισοδύναμοι.

Όπως θά ίδωμεν κατωτέρω ή ανωτέρω γνώσις της ισοδυναμίας έχει μεράλην σημασίαν εις την μετρίτην τοπολογία.

§ 2. ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Όρισμός I-2-1. Καλούμεν απόστασιν (ή μετρικήν) επί του συνόλου E καθε μη άρνητιυήν συνάρτησιν d ώρισμένην επί του $E \times E$, δηλ. $E \times E \ni (x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) \in \mathbb{R}^+$, καί ή όποία έχει τας άκοιούδους ιδιότjτας:

$$1^\circ/ \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$2^\circ/ \quad d(x, y) = d(y, x), \text{ διά καθε } (x, y) \in E \times E \quad (\text{Συμμετρίυή ιδιότjς}).$$

$$3^\circ/ \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \text{ οίωνδύποτε όντων των } x, y, z \text{ του } E \quad (\text{Τριγωνική ιδιότjς}).$$

Ένα σύνολον E έφωδιασμένον με μίαν απόστασιν d καλεϊται μετρίυός χώρος καί πράφομεν (E, d) ή απλώς E , εάν δέν ύπάρχη κίνδυνος συνχύσεως.

Σημείωσις: Έάν ύκανόηιοιυνται μόνον ή 2° καί 3° ιδιότjς διά την d , ούχί όμως καί άνάγκη καί ή 1° , τότε ή d καλεϊται ψευδο-άπόστασις, ή άλλως ψευδομετρίυή επί του E , τό δέ $5\epsilon\upsilon\chi\text{ος}$ (E, d) καλεϊται τότε ψευδομετρίυός χώρος.

Όττω, π.χ., άν E είναι οίωνδύποτε σύνολον καί όρίσωμεν: $d(x, y) = 0$ διά καθε $(x, y) \in E \times E$, τότε ή d , προφανώς, δέν είναι απόστασις- έυτός άν τό $E = \emptyset$ ή έχη έν μόνον σημείον. Αύτη όμως, ως ευθύως συνάρεται, είναι μία ψευδομετρίυή επί του E .

Συμφώνως προς την 3° ιδιότjτα οίωνδύποτε όντων των x, y, z του E θά έχωμεν:

$$\left. \begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned} \right\}$$

Συνεπώς:

$$\left. \begin{aligned} d(x, z) - d(x, y) &\leq d(y, z) \\ d(x, y) - d(x, z) &\leq d(y, z) \end{aligned} \right\} \implies |d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z).$$

Παραδείγματα: $1^\circ/$ Ο σπήδης χώρος έφωδιασμένος με την απόστασιν την διδομένην ύπό την έννοιαν της Εύκλειδείου γεωμετρίας είναι ένας μετρίυός χώρος.

2%/ Η πραγματική ευθεία \mathbb{R} ή το μιγαδικόν επίπεδον \mathbb{C} εφοδιασμένον με την απόστασιν $d(x,y) = |x-y|$, είναι μετρίυός χώρος.

3%/ ό Εύκλειδεις χώρος \mathbb{R}^p υαδίσταται ένας μετρίυός χώρος, εάν όρίσωμεν εις αυτόν μιαν τών υάτωδι απόστασεων:

Έστωσαν πρός τούτοις, $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ δύο στοιχεΐα του χώρου τούτου:

Όρίσόμεν:

$$d_1(x,y) = \left(\sum_{i=1}^p (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Εύκλειδεις απόστασις})$$

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^p |\xi_i - \eta_i|$$

$$d_3(x,y) = \max_{1 \leq i \leq p} \{ |\xi_i - \eta_i| \}.$$

Όπως υαί εις τήν περίπτωσιν τής norme ούτω υαί έδω αποδεικνύεται, ότι έυάστη τών τριών άνωτέρω συναρτήσεων όρίσει μιαν απόστασιν υαί μάλιστα ισχύει:

$$d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d_3(x,y) \leq p \cdot d_1(x,y).$$

4%/ Έστω $C[a,b]$ τό σύνολον τών συνεχών συναρτήσεων τών ώρισμένων εις τό διάστημα $[a,b]$. Τούτο υαδίσταται μετρίυός χώρος, εάν όρίσωμεν εν αυτώ ως απόστασιν μεταξύ δύο συναρτήσεων $x(t)$ υαί $y(t)$ αυτού τήν διδομένην υπό τής σχέσεως:

$$d(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Ευνόλως διαπιστοΐται ότι ή άνωτέρω σχέση εις όρίσει μιαν απόστασιν.

Όρισμός τής απόστασεως μέσω τής norme.

Έστω ό πραγματιυός διανυσματιυός χώρος E με norme. Οίλωνδήποτε όντων τών $(x,y) \in E \times E$ θέτομεν:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Η ούτω όρισθεΐσα συνάρτησις $d(\cdot, \cdot)$ είναι πράγματι μια απόστασις, διότι:

$$1\% \quad d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x-y = \theta \iff x = y.$$

$$2\% \quad d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x).$$

$$3\% \quad d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Συνεπώς, ένας διανυσματιυός χώρος με norme είναι συμχρόνως ένας μετρίυός χώρος.

Διά την απόστασιν ισχύουν καί τά κάτωθι:

$$1\%/. \quad d(x, \theta) = \|x - \theta\| = \|x\|.$$

$$2\%/. \quad d(x+a, y+a) = \|(x+a) - (y+a)\| = \|x-y\| = d(x, y).$$

Ἐστω E ἕνας μετρίσιος χώρος καί E' ἕν ὑποσύνολον αὐτοῦ. Ὁ E' καθίσταται καί αὐτός μετρίσιος χώρος λαμβάνοντες ὡς ἀπόστασιν δύο στοιχείων τοῦ E' τήν ἀπόστασιν των ἐντός τοῦ E .

§ 3. ΟΡΙΟΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΕΝΤΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Ἐστω E ἕνας μετρίσιος χώρος καί d ἡ ἀπόστασις ἐντός αὐτοῦ. Εἰς τό ἔξης δά τόν συμβολίζωμεν οὕτω: (E, d) .

Ὁρισμός 1-3-1. *Θά λέρωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία (x_n) , $n \geq 1$ τῶν σημείων τοῦ E τείνει πρὸς τό σημεῖον $x \in E$, ἐάν ἡ $d(x_n, x) \rightarrow 0$ τοῦ $n \uparrow \infty$, ἢ, ἀλλῶς διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἰς ἀριθμός $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n \geq N(\varepsilon)$ νά ἔχωμεν: $d(x_n, x) < \varepsilon$. Θά γράψωμεν δέ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ἢ $x_n \rightarrow x$ τοῦ $n \uparrow \infty$.*

Κατ' ἀναλογία πρὸς τήν σύνηθισιν τῶν ἀκολουθιῶν πραγμ. ἀριθμῶν ἔχομεν τὰς κάτωθι προτάσεις:

Πρότασις 1-3-1. Τό ὅριον τῆς ἀκολουθίας (x_n) , $n \geq 1$ ἐντός τοῦ μετρίσιου χώρου (E, d) , ἂν ὑπάρχη, εἶναι μονοσημάντως ὁρισμένον.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία (x_n) , $n \geq 1$ τείνει πρὸς δύο διαφορετικὰ ὅρια, ἔστωσαν ταῦτα τὰ σημεία x καί x' τοῦ χώρου E . Θέτομεν:

$d(x, x') = \alpha > 0$. Ἐπομένως διὰ $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί N, N' τοιοῦτοι, ὥστε, συγκρίνως πρὸς τόν ὁρισμόν τῆς συνηθίσεως, νά ἔχωμεν:

$$d(x_n, x) < \frac{\alpha}{2} \quad \text{διὰ } n \geq N$$

$$d(x_n, x') < \frac{\alpha}{2} \quad \text{διὰ } n \geq N'.$$

Ὅθεν, διὰ $n \geq \max(N, N')$ ἔχομεν:

$$d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x') < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha \quad \text{ἢ} \quad d(x, x') < \alpha, \text{ ὅπερ ἄτοπον.}$$

Ὑπακολουθίαι:

Ἐστω $\{x_n\}$ μία ἀκολουθία σημείων τοῦ μετρίσιου χώρου (E, d) καί $\{k_n\}$ μία ἀκολουθία

φυσικών αριθμών γησιώς αυξουσα, δηλ. $k_n < k_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Εάν θεωρήσωμεν ἐν τῆς ἀκολουθίας $\{x_n\}$ τοὺς ὅρους $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$, τότε ἔχομεν δημιουργήσῃ μιαν νέαν ἀκολουθίαν σημείων τοῦ E , διότι:

$$n \longrightarrow k_n \longrightarrow x_{k_n}$$

Ἡ οὕτω δημιουργηθεῖσα ἀκολουθία $\{x_{k_n}\}$ καλεῖται ὑπακολουθία τῆς $\{x_n\}$.

Ὅς ἐν τοῦ τρόπου τῆς κατασκευῆς τῆς τοῦ $n \longrightarrow \infty$ καὶ τό $k_n \longrightarrow \infty$. Ἦτοι διὰ μᾶθε N (φυσικόν) ὑπάρχει εἰς φυσικὸς \bar{N} τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέση $n > N \longrightarrow k_n > \bar{N}$.

Πρότασις I-3-2. Εάν ἡ ἀκολουθία $\{x_n\}$ συρμλίνῃ πρὸς τὸ x , τότε μᾶθε ὑπακολουθία αὐτῆς συρμλίνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον.¹⁾

Ἀπόδειξις: Ἐστω $x_n \longrightarrow x$ τοῦ $n \uparrow \infty$. Ὅθεν διὰ μᾶθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἰς θετικὸς ἀριθμὸς $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέση $n > N(\varepsilon) \implies d(x_n, x) < \varepsilon$ (1).

Λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὑπακολουθίας ὑπάρχει εἰς ἀιέριος $\bar{N}(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέση $n > N(\varepsilon) \longrightarrow k_n > \bar{N}(\varepsilon)$. Εάν δέ $N_0(\varepsilon) = \max\{N(\varepsilon), \bar{N}(\varepsilon)\}$ καὶ εάν $k_n > N_0(\varepsilon)$, τότε, λόγω τῆς (1), θά ἔχωμεν καὶ $d(x_{k_n}, x) < \varepsilon$. Ἀρα ἡ ὑπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ συρμλίνει πρὸς τὸ x .

ὁ χώρος R^1 .

Ἡδὴ ἄς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν τοῦ χώρου R^1 μὲ τὰς τρεῖς ἐν αὐτῷ ὁρισεῖσας ἀποστάσεις: Ὅς γνωστὸν μεταξὺ αὐτῶν ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$d_3(x, y) \leq d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq p d_3(x, y).$$

Λόγω τῶν ἀνωτέρω ἀξιοσημειώτων σχέσεων εάν μία ἀκολουθία σημείων ἐντὸς τοῦ χώρου R^1 συρμλίνῃ κατὰ τὴν ἔννοιαν μιᾶς ἐν τῶν ἀνωτέρω ἀποστάσεων, θά συρμλίνῃ καὶ κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν ἄλλων ἀποστάσεων. Κατόπιν τούτων αἱ ἀποδείξεις τῶν κατωτέρω προτάσεων θά γίνωνται διὰ τῆς χρήσεως μιᾶς τῶν ἀνωτέρω ἰσοδυνάμων ἀποστάσεων, ἔστω τῆς d_2 .

Πρότασις I-3-3. Ἐστω (x_n) , $n \geq 1$ μία ἀκολουθία σημείων ἐντὸς τοῦ μετρίου χώρου (R, d) καὶ $x \in R$. Ἐτόμεν:

$x_n = (E_{n1}, E_{n2}, \dots, E_{np})$ καὶ $x = (E_1, E_2, \dots, E_p)$. "Ἐνα ἢ x_n τεινῇ πρὸς τὸ x τοῦ $n \uparrow \infty$ πρὲς καὶ ἀρνεῖ $E_{n1} \rightarrow E_1, E_{n2} \rightarrow E_2, \dots, E_{np} \rightarrow E_p$ τοῦ $n \uparrow \infty$.

¹⁾ Ἡ σύγκλισις μιᾶς ὑπακολουθίας τῆς (x_n) , $n \geq 1$ δὲν συνεπάγεται καὶ τὴν συρμλίνῃ τῆς (x_n) , $n \geq 1$. Ἡ δὲ ἀπόμλσις μιᾶς ὑπακολουθίας τῆς (x_n) , $n \geq 1$ συνεπάγεται καὶ τὴν ἀπόμλσιν τῆς (x_n) , $n \geq 1$.

Απόδειξις: 'Η $x_n \rightarrow x$ του $n \uparrow \infty \iff d_2(x_n, x) \rightarrow 0$

$$\iff |x_{n1} - x_1| + |x_{n2} - x_2| + \dots + |x_{np} - x_p| \rightarrow 0 \text{ του } n \uparrow \infty \iff$$

$$|x_{n1} - x_1| \rightarrow 0, |x_{n2} - x_2| \rightarrow 0, \dots, |x_{np} - x_p| \rightarrow 0 \text{ του } n \uparrow \infty$$

$$\iff x_{n1} \rightarrow x_1, x_{n2} \rightarrow x_2, \dots, x_{np} \rightarrow x_p \text{ του } n \uparrow \infty \text{ ὅξ.δ.}$$

Ἐν τῶν προηγουμένων προτάσεων συνάγεται, ὅτι ἡ γνῶσις τοῦ ὁρίου μιᾶς ἀκολουθίας σημείων τοῦ χώρου \mathbb{R}^p ἀνάγεται εἰς τὴν γνῶσιν τοῦ ὁρίου μιᾶς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁρισμός I-3-2. Ἐστω ὁ μετρικὸς χώρος (E, d) καὶ μία ἀκολουθία σημείων $(x_n), n \geq 1$ αὐτοῦ. Θὰ πῆρῳμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀκολουθία τοῦ Cauchy ἢ βασιστή, ἐὰν διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ εἰς ἀμέριστος $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $m, n \geq N(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Πρότασις I-3-3. Ἐὰν μία ἀκολουθία $(x_n), n \geq 1$ σημείων τοῦ μετριοῦ χώρου (E, d) συνηλὴν πρὸς ἓν σημεῖον $x \in E$, τότε αὕτη εἶναι βασιστή.

Ἀπόδειξις: Ἐστω ὅτι ἡ $(x_n), n \geq 1$ συνηλὴν πρὸς τὸ $x \in E$. Τότε διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἰς θετικὸς ἀριθμὸς $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n \geq N(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ὅθεν διὰ $n \geq N(\varepsilon)$ καὶ $m \geq N(\varepsilon)$ ἔχομεν:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ ἥτοι ἡ } (x_n), n \geq 1 \text{ εἶναι βασιστὴ ἀκολουθία.}$$

Θεώρημα I-3-1. (Γενικευμένον κριτήριον τοῦ Cauchy διὰ τὸν χώρον \mathbb{R}^p).

ἵνα μία ἀκολουθία $(x_n), n \geq 1$ σημείων τοῦ μετριοῦ χώρου (\mathbb{R}^p, d) συνηλὴν πρὸς ἓν σημεῖον καὶ ἀρμεῖ αὕτη νὰ εἶναι μία βασιστὴ ἀκολουθία.

Ἀπόδειξις: Τὸ ὅτι μία συνηλίνουσα ἀκολουθία ἐντὸς τοῦ \mathbb{R}^p εἶναι βασιστή, συνάγεται ἐν τῇ προτάσει I-3-3 εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $E = \mathbb{R}^p$.

Ἐστω ἥδη ὅτι ἡ ἀκολουθία $(x_n), n \geq 1$, ὅπου $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np})$ εἶναι βασιστή. Τότε διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἰς ἀριθμὸς $N(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n, m \geq N(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν: $d_2(x_n, x_m) < \varepsilon$ (1) ἢ διὰ $n, m \geq N(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν: $|x_{n1} - x_{m1}| + |x_{n2} - x_{m2}| + \dots + |x_{np} - x_{mp}| < \varepsilon$ (1').

Απόδειξις: Έστωσαν ἐντὸς τοῦ διανυσματικοῦ χώρου E δύο ἰσοδύναμοι $\text{normes } \|\cdot\|$ καὶ $\|\cdot\|_1$. Ὡς γνωστὸν ὑπάρχουν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ($0 < \alpha \leq \beta$) τοιοῦτοι, ὥστε διὰ πᾶθε $x \in E$ νὰ ἔχωμεν:

$$\alpha \cdot \|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta \cdot \|x\| \quad (1)$$

19/ Ἐστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (x_n) συγκλίνει πρὸς τὸ x ὡς πρὸς τὴν $\text{norme } \|\cdot\|_1$, τότε διὰ πᾶθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἰς ἀριθμὸς $N(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n > N(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν:

$$\|x_n - x\|_1 < \alpha \cdot \varepsilon. \quad \text{Τότε κατὰ μείζονα λόγον διὰ } n > N(\varepsilon) \text{ θὰ ἔχωμεν, λόγω τῆς (1), καὶ } \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

20/ Ἐάν ἡ (x_n) τείνῃ πρὸς τὸ x ὡς πρὸς τὴν $\text{norme } \|\cdot\|$, τότε διὰ πᾶθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ $n > N(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{\beta}$. Κατὰ μείζονα λόγον διὰ $n > N(\varepsilon)$ θὰ ἔχωμεν: $\|x_n - x\|_1 < \varepsilon$.

Ἐν τῷ ἀνωτέρῳ θεωρήματι ὁδηγούμεθα εἰς τὰ αὐτὰ περὶ ὁρίου συμπεράσματα ἐρ-
γασόμενοι δι' ἰσοδύναμων normes .

§ 4. ΑΝΟΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΝΘΕΤΑ

Εἰς τὸ Κεφάλαιον IV τοῦ A_1 τόμου ὠρίσαμεν τὴν τοπολογίαν τῆς πραγματικῆς εὐθεί-
ας \mathbb{R} . Ἡδὴ προτιθέμεθα ν' ἀναφέρωμεν, ἐν συντομία, τινὰ διὰ τὴν τοπολογίαν ἑνὸς μετρι-
κοῦ χώρου. Κατ' ἀρχάς θὰ δώσωμεν μερικoὺς βασικοὺς ὁρισμούς.

Ἐστω ὁ μετρίκος χώρος (E, d) , τὸ σημεῖον $a \in E$ καὶ ὁ ἀριθμὸς $\rho > 0$.

I. Καλοῦμεν *ἀνοικτὴν σφαῖραν* (ἀντ. *κλειστὴν σφαῖραν*) *υἱέντρου* a καὶ *αὐτίνος* ρ τὸ σύνολον $B(a, \rho)$ (ἀντ. $\bar{B}(a, \rho)$) τῶν σημείων x τοῦ E , τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν σχέσιν $d(a, x) < \rho$ (ἀντ. $d(a, x) \leq \rho$).

II. Καλοῦμεν *ἐπιφάνειαν σφαίρας υἱέντρου* a καὶ *αὐτίνος* ρ τὸ σύνολον τῶν σημεί-
ων τοῦ E , τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν σχέσιν $d(a, x) = \rho$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ μετρίκοῦ χώρου \mathbb{R}^1 συννθίζεται ἀντὶ τῆς λέξεως σφαῖρα νὰ
λέγωμεν δίσκος καὶ ἀντὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας νὰ λέγωμεν περιφέρεια κύβλου.

Ὁ χώρος \mathbb{R}^p . Εἰς τὸν χώρον \mathbb{R}^p ἐφωδιασμένον μετὰ τὴν ἀπόστασιν $d(a, x) = \|a - x\| =$
 $= \left(\sum_{i=1}^p (a_i - x_i)^2 \right)^{1/2}$, ὅπου $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ καὶ $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, ἡ ἀνοικτὴ σφαῖρα υἱέντρου
 a καὶ αὐτίνος ρ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ συνόλου:

$$B(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(a, x) < \rho\}$$

Η υλειστή σφαίρα κέντρου a και ακτίνας ρ ορίζεται υπό του συνόλου :

$$\bar{B}(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(a, x) \leq \rho\}$$

Η δέ επιφάνεια αυτής ορίζεται υπό του συνόλου :

$$S(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^p : d(a, x) = \rho\}.$$

Ευ των ανωτέρω προκύπτει ότι, υάδε ένωσις άνοιυτών σφαιρών κέντρου a είναι μία άνοιυτή σφαίρα. Όμοίως υάδε τομή υλειστών σφαιρών κέντρου a είναι όμοίως υλειστή σφαίρα.

Πρέπει νά παρατηρήσωμεν ότι, αί σφαίραι ενός μετριου χώρου E δέν έχουν έν νένει τās αytās γεωμετριουās ιδιόττητας μέ τās σφαίρας του χώρου \mathbb{R}^p .

Όρισμός I-4-1. *Είς ένα μετριοόν χώρον E θά λέρωμεν ότι ένα υποσύνολον A του E είναι άνοικτόν, εάν είναι τό κενόν ή διά υάδε $a \in A$ ύπάρκη μία άνοικτή σφαίρα κέντρου a και ακτίνας $\rho > 0$ περιεχομένη έντός του A .*

Συμφώνως πρós τόν όρισμόν, εάν τό A είναι άνοικτόν σύνολον, τότε διά υάδε $a \in A$ ύπάρχει $\rho > 0$ τοιοϋτον, ώστε $B(a, \rho) = \{x \in E : d(a, x) < \rho\} \subset A$.

Ευ του άνωτέρω όρισμοϋ παρατηροϋμεν ότι τό σύνολον των άνοιυτών συνόλων ενός μετριοϋ χώρου E έχει τās υάτωδι ιδιόττητας :

A_1 Κάδε ένωσις (πεπερασμένη ή μή) άνοιυτών συνόλων του E είναι άνοικτόν σύνολον.

A_2 Κάδε πεπερασμένη τομή άνοιυτών συνόλων του E είναι άνοικτόν σύνολον.

A_3 Ό χώρος E και τό κενόν \emptyset είναι άνοικτά σύνολα.

Η άπόδειξις των άνωτέρω ιδιοτήτων είναι άνάλογος μέ την έυτεθεισαν είς την σελ. 130 του A_1 τόμου.

Εάν ένας χώρος E είναι δυνατόν νά υαταστή μετριοός, τότε όρίζονται συγχρόνως τά άνοικτά και υλειστά¹⁾ σύνολα αϋτοϋ. Τότε λέρομεν ότι έχομεν εισάρει μίαν μετριοκίνη τοπολορίαν επί του E . Χαραυτηρισυτικόν του μετριοϋ χώρου ή της μετριοκίης τοπολορίας αϋτοϋ είναι ότι, δύναμεθα πάντοτε νά όρίσωμεν την σύγκλισιν μίας ά-υολουθίας σημείων του χώρου.

Είδιυώς είς τόν διανυσματοιυόν χώρον \mathbb{R}^p είς τόν όποϊον έχομεν όρίσει τρεις ίσο-δωάμοϋς νορμες, ως έυ τούτου και τās άντιστοιχους πρós αytās άποστάσεις, έπειδή μέ έυάστην των άνωτέρω νορμε ή άποστάσεων όρίζεται ή αϋτή σύγκλισις

¹⁾ βλ. όρισμόν I-4-2

δυνάμεθα νά εἰπωμεν ὅτι, ἡ ὑφ' ἐξάσσης ἐξ αὐτῶν εἰσαγομένη μετρινή τοπολογία εἶναι ἡ αὐτή.

Παρατήρησης: Αἱ ἀνωτέρω ιδιότητες A_1, A_2, A_3 χρησιμοποιούνται καί διὰ τόν ὁρισμόν ἑνός τοπολογικοῦ χώρου. Ἦτοι, ἐάν τὰ ὑποσύνολα A ἑνός συνόλου E πληροῦν τὰς ιδιότητες A_1, A_2, A_3 , τότε ταῦτα καλοῦνται ἀνοικτὰ σύνολα καί τό σύνολον E καλεῖται τοπολογικός χώρος. Ἐπίσης λέγομεν ὅτι τὰ ὑποσύνολα ταῦτα ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ E μίαν τοπολογίαν.

Ἐπὶ πλέον εἰς ἕνα μετρινόν χώρον πληροῦται καί μία τετάρτη ἐνδιαφέρουσα ιδιότης καλουμένη: "**Ἀξίωμα τῆς διαχωρισιμότητος τοῦ Hausdorff**", ἥτοι:

A_4 : Οἰωνδήποτε ὄντων τῶν σημείων α καί β τοῦ μετρινοῦ χώρου E ὑπάρχουν δύο ἀνοικτὰ σύνολα περιέχοντα ἀντιστοιχῶς τὰ α καί β τῶν ὁποίων ἡ τομή εἶναι τό κενόν σύνολον.

Ἀπόδειξις: Ἐάν d εἶναι ἡ ἀπόστασις $d(\alpha, \beta)$ ἀρυεῖ νά λάβωμεν τὰς ἀνοικτὰς σφαῖρας κέντρων α καί β καί αὐτίνος $\frac{d}{3}$. Αὗται δὲν δύνανται νά ἔχουν σὺδέν κοινόν σημεῖον, διότι ἐάν ὑπῆρχεν ἕν τοιοῦτον σημεῖον γ ἡ τριγωνική ιδιότης δά ἐόιδεν:

$$d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta) \quad \text{ἢ} \quad d(\alpha, \beta) \leq \frac{d}{3} + \frac{d}{3} = \frac{2d}{3}, \quad \text{ὅπερ ἄτοπον.}$$

Παραδείγματα:

1%/ Αἱ ἀνοικτὰ σφαῖραι εἶναι ἀνοικτὰ σύνολα.

2%/ Ἐπὶ τῆς εὐθείας \mathbb{R} , ἐφωδιασμένης μέ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀπολύτου τιμῆς, τὰ ἀνοικτὰ διαστήματα εἶναι ἀνοικτὰ σύνολα.

3%/ Ἐπὶ τοῦ χώρου $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, ἐφωδιασμένου μέ τό ὁρισθέν μέτρον τῆς ἀποστάσεως, τό σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἑνός κύκλου αὐτίνος $\rho > 0$, εἶναι ἀνοικτόν σύνολον.

4%/ Εἰς τόν p -χώρον \mathbb{R}^p , ἐφωδιασμένον μέ ἕν ἐκ τῶν γνωστῶν μέτρων, καλοῦμεν **ἀνοικτόν υπερδιάστημα** ἐπ' αὐτοῦ, μέ ἄρα τὰ σημεῖα $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ καί $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ τό σύνολον τῶν σημείων του, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι πληροῦν τὰς ἀνισότηας:

$$\{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p : \alpha_i < x_i < \beta_i, i=1, 2, \dots, p\}$$

Προβανῶς τοῦτο εἶναι ἕνα ἀνοικτόν σύνολον.

Εἰς κάθε μετρινόν χώρον τό σύνολον τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $d(\alpha, x) > \rho$ εἶναι ἀνοικτόν σύνολον.

Όρισμός I-4-2. Εἰς ἓνα μετρικόν χώρον E ἐν ὑποσύνολον A αὐτοῦ θὰ καλεῖται κλειστόν, ἐάν τὸ συμπληρωματικόν του εἶναι ἀνοικτόν.

Εὐνόως διαπιστοῦται, στηριζόμενοι εἰς τοὺς τύπους τοῦ De Morgan, ὅτι διὰ τὰ κλειστά σύνολα ἰσχύουν αἱ κατωθι ιδιότητες:

K_1 : Κάθε τομὴ (πεπερασμένη ἢ μὴ) κλειστῶν συνόλων εἶναι κλειστόν σύνολον.

K_2 : Κάθε πεπερασμένη ἔνωση κλειστῶν συνόλων εἶναι κλειστόν σύνολον.

K_3 : Τὸ κενόν σύνολον \emptyset καὶ ὁ χώρος E εἶναι κλειστά σύνολα.

Τὸ ἀξίωμα τοῦ Hausdorff δὲν μεταφέρεται κατὰ ἐνδιαφέροντα τρόπον εἰς τὰ κλειστά σύνολα.

Παραδείγματα:

1% Κάθε κλειστὴ σφαῖρα εἶναι κλειστόν σύνολον.

2% Εἰς τὴν πραγματικὴν εὐθεῖαν \mathbb{R} ἐφωδιασμένη μετὰ τὸ φυσικόν μέτρον τῆς ἀπολύτου τιμῆς, καθε κλειστόν διάστημα εἶναι ἓνα κλειστόν σύνολον.

3% Τὸ σύνολον τῶν σημείων x τοῦ μετρίου χώρου E μετὰ ιδιότητα: $d(a, x) \leq r$ εἶναι κλειστόν σύνολον.

4% Εἰς τὸν χώρον \mathbb{R}^p ἐφωδιασμένον μετὰ τὴν γνωστὴν Εὐκλείδειον ἀπόστασιν ἢ *norme*, ἓνα κλειστόν ὑπερδιάστημα μετὰ ἄκρα τὰ σημεία $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ καὶ $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἀνισότητας:

$$\{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p : \alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, p\}$$

Τοῦτο δὲ εἶναι ἓνα κλειστόν σύνολον.

Παρατηρήσεις:

1% Ὑπάρχουν ὑποσύνολα ἑνὸς μετρίου χώρου τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι οὔτε ἀνοικτά οὔτε κλειστά σύνολα π.χ. τὰ ἡμιανοικτά διαστήματα τῆς \mathbb{R} , ἐφωδιασμένης διὰ τοῦ φυσικοῦ τοῦ μέτρου, δὲν εἶναι οὔτε ἀνοικτά οὔτε κλειστά σύνολα.

2% Τὰ σύνολα \emptyset καὶ E τοῦ μετρίου χώρου E εἶναι συγχρόνως ἀνοικτά καὶ κλειστά σύνολα.

3% Μεταξὺ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀνοικτῶν καὶ κλειστῶν συνόλων πρέπει νὰ προσέχωμεν ὅταν πρὸνείται διὰ τομὴν ἢ ἔνωσην μὴ πεπερασμένου πλῆθους συνόλων.

§ 5. ΠΕΡΙΟΧΑΙ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΕΩΣ ΣΥΝΟΛΟΥ Κ.Τ.Λ.

I. Περιοχαί ενός σημείου.

Όρισμός I-5-1. Καλούμεν περιοχή V ενός σημείου a του μετρίου χώρου E να δέ υποσύνολον V του E περιέχον τουλάχιστον ἓν ανοικτόν σύνολον περιέχον τό a , ἢ ἀνομή, περιέχον ανοικτήν σφαῖραν ἢ υφειστήν σφαῖραν κέντρου a .

Αἱ ιδιότητες τῆς περιοχῆς αἱ μελετηθεῖσαι εἰς τὴν σελ. 132 τοῦ A_1 Τόμου μεταφέρονται καὶ εἰς τοὺς μετριοὺς χώρους. Παραδέτομεν ἀπλῶς, ἄνευ ἀποδείξεως, πρὸς ὑπενδύμωσιν τὸ βασιεὺν θεώρημα:

Θεώρημα I-5-1. Ἐὰν ἓνα υποσύνολον A τοῦ E εἶναι ἀνοικτόν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι περιοχή ἐκαστοῦ τῶν σημείων του.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι σχεδὸν ἡ αὐτὴ μετὰ τὴν εὐτεθεῖσαν εἰς τὴν σελ. 132 τοῦ A_1 Τόμου.

Παράδειγμα: Εἰς τὸν χώρον R^n ἔστω τὸ σημεῖον $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$. Μία περιοχή αὐτοῦ ὀρίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ τὰ ὅποια πληροῦν τὰς ἀνισότη-
τας: $|x_1 - a_1| < \varepsilon, |x_2 - a_2| < \varepsilon, \dots, |x_p - a_p| < \varepsilon$.

Ἡ ἀνωτέρω περιοχή καλεῖται καὶ συμμετρίῃ περιοχή τοῦ σημείου a .

II. Σημεῖα συσσωρεύσεως ἢ ὀριακά σημεῖα

Όρισμός I-5-2. Ἐστω A ἓν υποσύνολον τοῦ μετρίου χώρου E . Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον x εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως ἢ ὀριακὸν σημεῖον τοῦ A , ἐὰν καθε περιοχή τοῦ x περιέχῃ ἓνα τουλάχιστον σημεῖον τοῦ A διάφορον τοῦ x .

Αἱ ιδιότητες τοῦ σημείου συσσωρεύσεως αἱ μελετηθεῖσαι εἰς τὴν σελ. 133 τοῦ A_1 Τόμου μεταφέρονται καὶ ἐδῶ, ἥτοι:

- i) Ἐάν τὸ x_0 εἶναι σημεῖον συσσωρεύσεως τοῦ A εἰς καθε περιοχὴν αὐτοῦ ὑπάρχει μία ἀπειρία σημείων τοῦ A διαφόρων τοῦ x_0 .
- ii) Ἐὰν υφειστόν σύνολον περιέχει τὰ σημεῖα συσσωρεύσεως αὐτοῦ. Ἀντιστρόφως: Κάθε σύνολον τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ σημεῖα συσσωρεύσεως αὐτοῦ εἶναι υφειστόν.

III. Μεμονωμένον σημεῖον.

Ἐστω A ἓν υποσύνολον τοῦ μετρίου χώρου E . Ἐὰν σημεῖον $x \in A$ καλεῖται μεμονω-

μέμον σημείον, εάν τοῦτο δὲν εἶναι σημείον συσσωρεύσεως τοῦ A , ἤτοι εάν ὑπάρχη μία περιοχὴ V τοῦ x τοιαύτη, ὥστε $A \cap V = \{x\}$.

IV. Ἐγγύτατον ἢ συνοριακὸν σημείον ἑνὸς συνόλου.

Ἐστω A ἑν ὑποσύνολον τοῦ μετρίου χώρου E . Θὰ λέγωμεν ὅτι ἓνα σημείον x εἶναι ἐγγύτατον σημείον τοῦ συνόλου A , εάν καθε περιοχὴ τοῦ x τέμνη τὸ A , δηλ. διὰ καθε $V(x)$ ἔχομεν: $V(x) \cap A \neq \emptyset$.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ἰσοδυναμεῖ με τὸ κατωθί: Τὸ x εἶναι ἐγγύτατον σημείον τοῦ A , εάν τὸ x εἶναι σημείον τοῦ A ἢ σημείον συσσωρεύσεως αὐτοῦ.

Τὸ ἐγγύτατον σημείον ἑνὸς συνόλου A θὰ εἶναι ἢ σημείον συσσωρεύσεως ἀμφοτέρων τῶν συνόλων A καὶ CA ἢ σημείον συσσωρεύσεως τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ μεμονωμένον τοῦ ἄλλου. Τὸ σύνολον τῶν ἐγγυτάτων σημείων ἑνὸς συνόλου A καλεῖται θῆκη αὐτοῦ καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ \bar{A} .¹⁾

V. Συμπαγὴ σύνολα. Ἐστω ὁ μετρικὸς χώρος (E, d) καὶ $A \subseteq E$. Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ A εἶναι φραγμένον εάν διὰ καθε $x, y \in A$ ἢ $d(x, y) \leq M < +\infty$. Εἰδικῶς διὰ τὸν διανυσματικὸν χώρον $(E, \|\cdot\|)$ τὸ ὑποσύνολον A θὰ εἶναι φραγμένον, εάν διὰ καθε $x \in A$ ἢ $\|x\| \leq M' < +\infty$.

Ἐνα κλειστὸν καὶ φραγμένον σύνολον ἑνὸς μετρίου χώρου θὰ καλεῖται συμπαγές.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἔνωσις πεπερασμένου πλήθους συμπαγῶν συνόλων εἶναι συμπαγές σύνολον. Ὀμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι: τὰ συμπαγῆ ὑποσύνολα ἑνὸς μετρίου χώρου εἶναι κλειστά.

Παραδείγματα:

1%) Τὸ σύνολον $B(a, p)$ ἐν \mathbb{R}^n εἶναι συμπαγές.

Πράγματι: $\|x\| \leq \|x-a\| + \|a\| \leq p + \|a\| < +\infty$

2%) Κάθε κλειστὸν καὶ φραγμένον διάστημα $[a, b]$ ἐν \mathbb{R} εἶναι συμπαγές.

3%) Τὸ σύνολον $A = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ εἶναι συμπαγές, ἐνῶ τὸ σύνολον $B = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ δὲν εἶναι συμπαγές.

4%) Τὸ διάστημα $I = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$, ἔνθα $I_i = \{x \in \mathbb{R} : \alpha_i \leq x \leq \beta_i\}$ εἶναι συμπαγές.

VI. Σύνολον συνευτιυόν

Ἐστω τὸ σύνολον $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Τοῦτο θὰ καλεῖται συνευτιυόν, εάν διὰ καθε διαμέρισιν αὐτοῦ εἰς δύο μὴ κενὰ σύνολα A_1 καὶ A_2 ὑπάρχη τουλάχιστον ἓν σημείον τοῦ ἑνὸς τὸ ὁποῖον

¹⁾ Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἡ θῆκη \bar{A} ἑνὸς συνόλου A , ταυτίζεται με τὸ εἰσὶν ἑνὸς συνόλου περιέχον τὸ A .

είναι όριαυόν τού άλλου. "Η όπερ ίσοδυνάμως: "Η σχέση $A = A_1 \cup A_2$, όπου A_1, A_2 δύο σύνολα $\neq \emptyset$ τοιαύτα, ώστε ούδέν έξ αυτών νά περιέχη όριαυά σημεία τού άλλου (χωρισμένα σύνολα) νά μήν είναι δυνατή.

Παραδείγματα:

1%/ Είς τόν χώρον \mathbb{R}^2 τό σύνολον $A = \{(x, 0) : 0 \leq x < 2\} \cup \{(0, y) : 0 < y < 1\}$ είναι συνευτιυόν.

2%/ Είς τόν χώρον \mathbb{R}^1 μία σφαίρα ή ένα διάστημα είναι σύνολα συνευτιυά.

3%/ Επί τής εύθείας \mathbb{R} τά υάτωδι σύνολα είναι συνευτιυά:

$$(-\infty, \theta), (-\infty, \theta], (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, +\infty), (a, \theta), [a, \theta), (a, \theta].$$

4%/ θεωρούμεν τό σύνολον Q τών ρητών άριθμών έν \mathbb{R} . Είναι $Q \subset \mathbb{R}$. "Ας θεωρήσωμεν ήδη μίαν τυχοϋσαν διαμέρισην τού Q όρισομένην ως άνωλούθως:

$$A_1 = \{x \in Q : x < \sqrt{3}\}, \quad A_2 = \{x \in Q : x > \sqrt{3}\}.$$

Προφανώς $A_1 \cup A_2 = Q$, αλλά τά όριαυά σημεία τού A_1 είναι $< \sqrt{3} \notin Q$ υαθώς υαί τά όριαυά σημεία τού A_2 είναι $> \sqrt{3}$. "Οδεν δέν ύπάρχει τουλάχιστον έν σημείον τού ενός τό όποϊον νά είναι όριαυόν τού άλλου. "Αρα τό σύνολον Q δέν είναι συνευτιυόν.

"Εν άνοιυτόν υαί συνευτιυόν σύνολον δά υαληήται πεδίον.

Είς τά προαναφερθέντα παραδείγματα 1%/ υαί 2%/ τά σύνολα είναι πεδία, όπου ή θεωρηθείσα σφαίρα είναι άνοιυτή.

§ 6. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

"Εστω είς διανυσματιυός χώρος E ώρισμένος επί τού K (K : τό σύνολον τών πραγματιυών ή μιχαδιυών άριθμών). "Ορίσωμεν μίαν άπειυόνισιν $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ τού $E \times E$ έντός τού K έχουσα τάς υάτωδι ιδιόττας:

1%/ $\langle x, x \rangle \geq 0$ διά υάθε $x \in E$

2%/ $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta$

3%/ $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ διά υάθε $x \in E$ υαί $y \in E$ (όπου μέ $\bar{\alpha}$ συμβολίσομεν τό συυυγές τού $\alpha \in K$).

4%/ $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ διά υάθε $\lambda, \mu \in K$ υαί $x, y, z \in E$.

"Η τιμή $\langle x, y \rangle$ υαληήται έσωτεριυόν γινόμενον τών διανυσμάτων x, y .

"Ευ τής 3% υαί 4% ιδιόττος προϋπτει ότι:

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \bar{\mu} \langle x, z \rangle, \text{ εάν τά } \lambda, \mu \in K \text{ υαί } x, y, z \in E.$$

Εάν $K = \mathbb{R}$, τότε ἐκ τῆς 3^{ης} ιδιότητος ἔχομεν: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Τό ἑσωτερικὸν γινόμενον ὀρίζει ἐπὶ τοῦ E μία *norme* ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (1)$$

Πράγματι αἱ ιδιότητες 1 καὶ 2 αὐτῆς διαπιστοῦνται εὐλόγως. Τὴν τριγωνικὴν ιδιότητα τὴν ἀποδεικνύομεν ὡς ἀκολούθως:

θεωροῦμεν τὴν ἑξήρασιν:

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \quad (2)$$

ἥτις εἶναι πάντοτε θετικὴ.

Ἐάν ὁ λ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς τὸ κατὰ τὴν τριωνυμὸν ὡς πρὸς λ μέ πραγματικὸς συντελεστής, ἥτοι τὸ:

$$\langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \cdot \lambda + \langle y, y \rangle \cdot \lambda^2$$

εἶναι λόγῳ τῆς (2), μονίμως μὴ ἀρνητικόν.

Συνεπῶς $(\operatorname{Re} \langle x, y \rangle)^2 - \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0$, ἢ $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Ὅθεν,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

$$= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

ἥτοι:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Ἦθὴ ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀνισότητα:

$$\langle x, x \rangle + \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

θέτοντες $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ λαμβάνομεν τελικῶς:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (3) \quad (\text{Ἀνισότης τοῦ Schwartz}).$$

Ἐνας διανυσματικὸς χώρος E εἰς τὸν ὁποῖον ἔχομεν ὀρίζει ἓν ἑσωτερικὸν γινόμενον καὶ κατ' ἀκολουθίαν μίαν *norme* ὑπὸ τῆς σχέσεως (1) θὰ καλεῖται *χώρος τοῦ Hilbert* ἂν συγχρόνως οὗτος εἶναι καὶ πλήρης ὡς πρὸς τὴν (μετρικὴν) ἀπόστασιν τὴν ὀρισμένην ὑπὸ τῆς *norme*.

λαβόντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (1), εὐλόγως διαπιστοῦται ὅτι εἰς ἓνα *χώρον* τοῦ Hilbert πληροῦται ἡ σχέση:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (4) \quad (\text{Νόμος τοῦ παραλληλογράμμου}).$$

Είς έναν χώρο του Hilbert δύο στοιχεία x, y αυτού δά υαλούνται όρθογώνια υαί δά γράφωμεν $x \perp y$, εάν $\langle x, y \rangle = 0$. Τότε προφανώς υαί $\langle y, x \rangle = 0$, ήτοι υαί $y \perp x$.

Επειδή δέ, $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle$

$$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0,$$

έχομεν: $\|x+y\| = \|x-y\|$.

Όθεν ό νόμος του παραλληλογράμμου, λόγω της άνωτέρω σχέσεως, υαδίσταται:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (5) \quad (\text{Πυθαγόρειος σχέσις}).$$

Παράδειγμα: Είς τόν διανυσματιόν χώρον \mathbb{R}^p όρίσομεν έν έσωτεριόν γινόμενον υπό της σχέσεως:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i \cdot y_i$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ υαί $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ υαί υατά συνέπειαν μίαν norme υπό της σχέσεως:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^p |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Αποδεικνύεται ότι ούτος είναι υαί πλήρης, άρα είναι χώρος του Hilbert.

Συμπληρώματα υαί άσκήσεις:

1. Έστω E ό διανυσματιός χώρος τών συνεχών συναρτήσεων επί του $[0, 1]$. Έάν $f \in E$ όρίσομεν την L^1 -norme υπό του τύπου:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Δείξατε ότι ή άνωτέρω σχέσις όρίσει πράγματι μίαν norme.

2. Έστωσαν E υαί F δύο διανυσματιοί χώροι μέ normes παριστωμένας υπό του συμβόλου $\|\cdot\|$. Έστω $E \times F$ τό καρτεσιανόν γινόμενον τών χώρων.

Όρίσομεν την πρόσθεσιν δύο στοιχείων του $E \times F$ υαί τό γινόμενον ενός στοιχείου αύτου μέ έναν πραγματιόν αριθμόν ως άμολούθως:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$\gamma \cdot (x, y) = (\gamma x, \gamma y), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Δείξατε ότι ό $E \times F$ είναι διανυσματιός χώρος.

Έν συνεχεία όρίσομεν: $\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$

Δείξατε ότι ή άνωτέρω σχέσις όρίσει μίαν norme επί του $E \times F$.

3. Έστω E ένας μετρίσιμος χώρος με μέτρον (απόσταση) ρ και έστω η συνάρτησις σ ωρισμένη επί του $E \times E$ με τύπον: $\sigma(x, y) = \min \{ \rho(x, y), 1 \}$

Δείξατε ότι η σ είναι ένα μέτρον επί του E .

4. Έστω X ένας μετρίσιμος χώρος με απόσταση ρ , E ένα μὴ κενόν υποσύνολον του X και f_E μία πραγματιυή συνάρτησις επί του X ορισμένη υπό του τύπου $f_E(x) = \inf_{y \in E} \rho(x, y)$. (Ο αριθμός $f_E(x)$ καλεῖται ἀπόστασις του x ἀπὸ τοῦ E). Δείξατε ὅτι:

i) $|f_E(x) - f_E(x')| \leq \rho(x, x')$ διὰ τὰς $x, x' \in E$

ii) Ἡ f_E εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ X

iii) $f_E(x) = 0$, ἐὰν, καὶ μόνον ἐὰν, $x \in \bar{E}$.

5. Έστω X εἶναι ἓνας μετρίσιμος χώρος με ἀπόστασιν ρ καὶ διὰ τὰς μὴ κενόν καὶ φραγμένον σύνολον $A \subset X$ ὀρίσμεν ὡς διάμετρον τοῦ A τὸν ἀριθμὸν $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$. Δείξατε ὅτι: ἂν $A \subseteq B \subset X$, τότε $\delta(A) \leq \delta(B)$.

6. Έστω E εἶναι ὁ διανυσματιυός χώρος τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἐπὶ τοῦ διαστήματος $[0, 1]$. Ἐὰν $f, g \in E$, ὀρίσμεν:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

Δείξατε ὅτι ἡ ἀνωτέρω σχέσηις ὀρίσει ἓνα πραγματιυόν ἐσωτερικόν γινόμενον.

Ἐν συνεχείᾳ δύναμεθα νὰ ὀρίσωμεν μιαν L^2 -norme υπό του τύπου:

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

Θέτοντες $\|f\|_0 = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Δείξατε ὅτι: $\|f\|_2 \leq \|f\|_0$.

7. Έστω E τυχόν μὴ κενόν σύνολον. Ὀρίσμεν τὴν συνάρτησιν:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ἂν } x \neq y \\ 0, & \text{ἂν } x = y \end{cases} \quad \text{διὰ τὰς } x, y \in E$$

i) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ d εἶναι μία ἀπόστασις ἐπὶ τοῦ E .

ii) Νὰ ἐξετασθῇ ποῖαι ἀποληυθῖαι συμπεριλήνουν ἐν E .

iii) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὁ (E, d) εἶναι πλήρης μετρίσιμος χώρος.

iv) Δείξατε ὅτι τὰς ὑποσύνολον του χώρου αὐτοῦ εἶναι ἀνοιχτόν καὶ κλειστόν.

8. Έστω εἰς μετρινὸς χώρος (E, d) καὶ $\theta > 0$. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις:

$$d_\theta(x, y) = \theta \cdot d(x, y), \quad \forall (x, y) \in E \times E$$

εἶναι μία ἀπόστασις ἐπὶ τοῦ E καὶ ὅτι αἱ ἑξῆς προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι.

i) $A \subseteq E$ εἶναι ἀνοιχτὸν ἐν (E, d)

ii) A εἶναι ἀνοιχτὸν ἐν (E, d_θ) .

9. Δείξατε ἂν (E, d) εἶναι εἰς μετρινὸς χώρος, τότε καὶ ὁ χώρος (E, d^*) με $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, $(x, y) \in E \times E$ εἶναι ἐπίσης εἰς μετρινὸς χώρος καὶ μάλιστα φραγμένος.

10. Έστω $C_{[0,1]}$ τὸ σύνολον τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων με πεδίου ὁρισμοῦ τὸ διάστημα $[0, 1]$, ἥτοι:

$$C_{[0,1]} = \{f \mid [0, 1] \text{ συνεχῆς}, f([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Ὀρίσομεν τὴν συνάρτησιν:

$$d(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|, \quad f, g \in C_{[0,1]}$$

Δείξατε ὅτι ἡ $d(f, g)$ εἶναι μία (μετρινή) ἀπόστασις ἐν $C_{[0,1]}$ καὶ ὅτι ὁ οὕτως ὁρισμένος μετρινὸς χώρος $C_{[0,1]}$ εἶναι πλήρης.

Δείξατε ἐπὶ πλέον ὅτι διὰ τὸν ἀνωτέρω χώρον $C_{[0,1]}$ ἡ συνάρτησις:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)^{1/2}, \quad f \in C_{[0,1]}$$

εἶναι μία *norme* ἐπ' αὐτοῦ.

11. Δείξατε ὅτι τὸ κατωθὶ σύνολον:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

εἶναι συμπαγές, ἐνῶ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτὸ διὰ τὸ:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + 4y^2 \leq 4, x^2 - y^2 \neq 0, y \geq 0\}.$$

12. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεία \mathbb{R} τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπιγνόν σύνολον.

13. Δείξατε ὅτι καθεὶ διάστημα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι συνεπιγνόν σύνολον.

14. Δείξτε ότι ισχύει: εἰς τοπολογικὸς χώρος E εἶναι συνεπιπλὸς (συνεπιπλὸν σύνολον), τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ μόνα ὑποσύνολα, τὰ ὁποῖα εἶναι συγχρόνως ἀνοιχτὰ καὶ κλειστά εἶναι ὁ χώρος E καὶ τὸ κενὸν σύνολον.

15. Δείξτε ότι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὡς ὑποσύνολον τοῦ \mathbb{R} δὲν εἶναι συνεπιπλὸν σύνολον.

16. Ὁμοίως δείξτε ότι τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι συνεπιπλὸν σύνολον.

17. Ἐστω $E = \mathbb{R}^2$. Ὅρίσμεν μιὰν συνάρτησιν $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ διὰ τῆς σχέσεως:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|, & \text{ἐὰν } x_1 \neq y_1 \\ |x_2 - y_2|, & \text{ἐὰν } x_1 = y_1 \end{cases}$$

ἔνθα $x = (x_1, x_2)$ καὶ $y = (y_1, y_2)$. Δείξτε ότι ὁ (E, d) εἶναι εἰς μετρίκωτος χώρος.

18. Ἐστω (E, d) εἰς μετρίκωτος χώρος. Ἐξετάσατε ἐὰν τὰ ζεύγη (E, d^2) καὶ $(E, d^{1/2})$ εἶναι μετρίκωτοι χώροι.

19. Ἐστω ὁ Εὐκλείδειος χώρος $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Ὅρίσμεν τὰς κάτωθι δύο συναρτήσεις ἐπὶ τοῦ παραπάνω γινομένου $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$:

$$d_1: d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_2: d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Δείξτε ότι ἐκάστη τῶν ὡς ἄνω συναρτήσεων εἶναι μία ἀπόστασις ἐπὶ τοῦ \mathbb{R}^2 .

20. Ἐστω E τὸ σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀκολουθιῶν. Ὅρίσμεν ὡς

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \min\{|x_n - y_n|, 1\}, \quad \text{ἔνθα } x = (x_n), n \in \mathbb{N} \text{ καὶ } y = (y_n), n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι ὁ (E, d) εἶναι εἰς μετρίκωτος χώρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΡΙΣΜΕΝΑΙ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ ΜΕ ΤΙΜΑΣ ΕΠΙΣΗΣ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

§ 1. ΟΡΙΟΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Ἐστω ἡ συνάρτησις $f: X \rightarrow Y$, ὅπου X, Y δύο τυχόντες μετριοὶ χώροι. Ἐάν συμβῇ οἱ μετριοὶ χώροι νά εἶναι καί διανυσματικοί, τότε ἡ f καλεῖται *διανυσματική συνάρτησις*.

Ὁρισμός II-1-1. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f: E \rightarrow Y$, ὅπου $E \subset X$ καί X, Y μετριοὶ χώροι. Ἐστώσαν ἐπὶ πλέον τὰ σημεῖα $x_0 \in E$ καί $\ell \in Y$. Θά λέγωμεν ὅτι ἡ $f(x)$ *τείνει πρὸς τὸ σημεῖον ℓ* , ἢ *ἔχει ὄριον τὸ ℓ* , τοῦ x *τείνοντος πρὸς τὸ σημεῖον x_0* καί θά γράψωμεν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \ell \quad \text{ἢ} \quad f(x) \rightarrow \ell \quad \text{τοῦ} \quad x \rightarrow x_0,$$

τότε καί μόνον τότε, ἂν διὰ καθε $\varepsilon > 0$ δυνάμεθα νά εὑρωμεν ἓν $n(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε ἡ σχέσις:

$$0 < d_E(x, x_0) < n(\varepsilon) \implies d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

(Παριστῶμεν διὰ τοῦ d_E τὴν ἀπόστασιν ἐντὸς τοῦ E καί διὰ τοῦ d_Y τὴν ἀπόστασιν ἐντὸς τοῦ Y).

Παρατηρήσεις 1!. Σηπριζόμενοι εἰς τὴν τριγωνικὴν ιδιότητα τῆς ἀποστάσεως εὐνόως διαπιστοῦται ὅτι τὸ ἀνωτέρω ὄριον, ἐάν ὑπάρχη, εἶναι μονοσημάντως ὠρισμένον.

2!/. Ἐάν οἱ X, Y εἶναι διανυσματικοὶ χώροι μέ norme , τότε δυνάμεθα εἰς τὸν ἀνωτέρω ὀρισμόν νά ἀντιυαταστήσωμεν τὴν ἀπόστασιν $d(\cdot, \cdot)$ διὰ τῆς norme 1-1.

Ὁρισμός II-1-2α. Μέ τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις διὰ τὴν συνάρτησιν f , ἐάν συμβῇ

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, τότε ἡ συνάρτησις $f(x)$ θά καλεῖται *συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον x_0* .

Ἐάν ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς καθε σημεῖον τοῦ E , τότε αὕτη θά καλεῖται *συνεχὴς ἐπὶ τοῦ E* .

Ὁ ὀρισμός δύναται νά διατυπωθῇ καί ὑπὸ τὴν κατωτέρω τοπολογικὴν μορφήν:

Ὁρισμός II-1-2β. Λέγομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f: E \rightarrow Y$ εἶναι *συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον x_0 τοῦ E* , ἐάν διὰ καθε περιοχὴν V τοῦ $f(x_0)$ ὑπάρχη μία περιοχή V' τοῦ x_0 τῆς

όποιās ἡ εἰρών, μέσω τῆς f , νά υεῖται ἐντὸς τῆς V , δηλ. $f(V \cap E) \subset V$.

Εἶναι φανερόν ὅτι οἱ ὁρίσμοι II-1-2α καὶ II-1-2β εἶναι ἰσοδύναμοι, ἥτοι:

Ὁ ὁρίσμός II-1-2α συνεπάγεται τὸν II-1-2β καὶ ἀντιστρόφως:

Ἀπόδειξις: Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρίσμον II-1-2α διὰ τὰδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει εἰς θετικὸς ἀριθμὸς $n(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ σχέσηις:

$$d_E(x, x_0) < n(\varepsilon) \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad (1)$$

$$\text{Ἐστὼ } V = B(x_0, n(\varepsilon)) = \{x \in E : d_E(x, x_0) < n(\varepsilon)\} \quad (2)$$

$$\text{καὶ } V = \mathcal{U}(f(x_0), \varepsilon) = \{f(x) \in Y : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon\} \quad (3)$$

Ἐστὼ ἐν $x \in V \cap E$ συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (1) τὸ $f(x) \in V \implies f(V \cap E) \subset V$.

Εὐλόγως διαπιστοῦται καὶ τὸ ἀντίστροφον.

Ἡ συνέχεια μιᾶς συναρτήσεως εἶναι μία ιδιότης τοπιυτή, δηλ. ἵνα ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς ἓνα σημεῖον x_0 πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ περιορισμὸς αὐτῆς εἰς μίαν οἰανδήποτε περιοχὴν τοῦ x_0 νά εἶναι συνεχὴς.

Πρότασις II-1-1: Ἐστωσαν $(X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3)$ τρεῖς μετρίμοι χώροι καὶ αἱ συνεχεῖς συναρτήσεις:

$f_1: X \rightarrow Y$ καὶ $f_2: Y \rightarrow Z$. Τότε ἡ $f_2 \circ f_1: X \rightarrow Z$ εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις.

Ἀπόδειξις: Ἐστὼ $x_0 \in X$ καὶ ἔστω $\varepsilon > 0$. Θετομεν $y_0 = f_1(x_0)$. Ὑπάρχει ἓνας ἀριθμὸς $n(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ $d_1(y, y_0) < n \implies d_2(f_2(y), f_2(y_0)) < \varepsilon$.

Ἐπὶ πλέον ὑπάρχει ἓνας ἀριθμὸς $n'(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ $d_X(x, x_0) < n'(\varepsilon) \implies d_1(f_1(x), y_0) < n$.

Ὅθεν, ἡ $d_X(x, x_0) < n'(\varepsilon) \implies d_1(f_1(x), y_0) < n \implies d_2(f_2(f_1(x)), f_2(f_1(x_0))) < \varepsilon$.

Ἡ τελευταία συνεπαγωγὴ ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς $f_2 \circ f_1$ εἰς τὸ σημεῖον x_0 .

Πρότασις II-1-2: Ἐστὼ E ἐν ὑποσύνολον ἑνὸς μετρίμου χώρου X καὶ ἔστω $f: E \rightarrow Y$ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ E ἐντὸς τοῦ μετρίμου χώρου Y . Ἐστὼ $a \in E$. Ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ a , ἂν καὶ μόνον, ἂν, διὰ τὰδε ἀνοιχτοῦσαν $\{x_n\}$ σημείων τοῦ E , ἥτις συρμῖνει πρὸς τὸ a , νά ἔχωμεν: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος μετὰ αὐτὴν τῆς περιπτώσεως τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Μία σχετικὴ πρότασις ἀφορῶσα τὰς συνεχεῖς συναρτήσεις καὶ τὰ ἀνοιχτὰ σύνολα εἶναι ἡ κατωθι:

Πρότασις II-1-3: Ἡ $f: E \rightarrow Y$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ E , ἂν καὶ μόνον ἂν, ἡ ἀντίστροφος εἰρών μέσω τῆς f παντὸς ἀνοιχτοῦ συνόλου τοῦ Y νά εἶναι ἀνοιχτὸν σύνολον τοῦ E .

Πρόταση II-1-4. Έστω ο μετρίως χώρος (E, d) και a ένα σημείον του E . Τότε η συνάρτησις $x \rightarrow d(a, x)$ του E εντός της R είναι συνεχής.

Απόδειξις: Έστω $x_0 \in E$ και έν τυχόν $\varepsilon > 0$. θεωρούμεν έν τυχόν $x \in E$ εύρισκόμενον έντός άνοιγτῆς σφαίρας κέντρου x_0 και άυτίνος $< \varepsilon$, τότε δά έχωμεν:

$d(x, x_0) < \varepsilon$. Όθεν, $|d(a, x) - d(a, x_0)| \leq d(x, x_0) < \varepsilon$. Η τελευταία σχέση άποδεικνύει τήν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως $d(a, x)$.

§ 2. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤῆΣ ($f: R \rightarrow R^p$).

Έστω I ένα διάστημα τῆς R και η συνάρτησις $f: I \rightarrow R^p$, δηλ. $f(t) \in R^p$, όπου p φυσικός αριθμός.

Λέγοντες ότι αὐτή η συνάρτησις είναι συνεχής εἰς τό σημείον t_0 , κατά τόν όρισμόν II-1-1 έννοοῦμεν ότι: Διά υάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει έν $\eta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ώστε η σχέση $t \in I, |t - t_0| < \eta(\varepsilon) \implies \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$ (1)

Τότε δά γράφωμεν: $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

Διά υάθε $t \in I$ έχομεν:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)),$$

όπου f_1, f_2, \dots, f_p είναι συναρτήσεις του I εντός τῆς R καλούμεναι συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς $f(t)$.

Η έννοια τῆς συνεχείας τῆς f εἰς τό σημείον t_0 είναι η ίδια και διά τās τρεῖς νορμες του R^p .

Επομένως αἱ σχέσεις (1) αἱ καθορίζουσai τήν συνέχειαν τῆς f ισοδυναμοῦν μέ τās υάτωδι σχέσεις:

$$t \in I \text{ και } |t - t_0| < \eta(\varepsilon) \implies \sup (|f_1(t) - f_1(t_0)|, \dots, |f_p(t) - f_p(t_0)|) < \varepsilon. \quad \text{ή}$$

$$t \in I \text{ και } |t - t_0| < \eta(\varepsilon) \implies \begin{cases} |f_1(t) - f_1(t_0)| < \varepsilon \\ \dots \dots \dots \\ |f_p(t) - f_p(t_0)| < \varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

Όθεν, έν τών άνωτέρω δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν τήν υάτωδι πρότασιν:

Πρόταση II-2-1. Έστω η συνάρτησις $f: I \rightarrow R^p$. Η ικανή και άναγκαία συνθήκη ίνα η f είναι συνεχής εἰς τό $t_0 \in I$ είναι αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις f_1, \dots, f_p αὐτῆς νά είναι συνεχείς εἰς τό $t_0 \in I$.

Παράδειγμα: Η συνάρτησις $f(t) = (\sin t, \pi t, t)$ είναι μία συνεχής διανυσματική συνάρτησις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς t με τιμὰς εἰς τὸν χώρον \mathbb{R}^3 . Αὕτη, ὡς γνωστόν, παριστᾷ γεωμετρικῶς τὴν κυκλικήν σφαιρὰ ἑξήμισια.

§ 3. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ($f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$)

Ι. Ἐστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις f ὁρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον E τοῦ διανυσματικοῦ χώρου \mathbb{R}^1 ($f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$). Ἐπομένως διὰ τῆς $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^1$ θὰ ἔχωμεν: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας διὰ τὰς τρεῖς ἰσοδυνάμους norms τὰς ὁριθεύσας ἐπὶ τοῦ \mathbb{R}^1 μεταφέρεται καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὡς ἀμολοῦνται:

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν II-1-1, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν:

Διὰ τῆς $\varepsilon > 0$ ὑπάρξη ἓν $\eta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ πᾶν $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ἡ σχέσηις:

$$\|x - x_0\| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon$$

ἢ ὅπερ ἰσοδυνάμως: Αἱ σχέσεις:

$$|x_1 - x_1^0| < \eta(\varepsilon), |x_2 - x_2^0| < \eta(\varepsilon), \dots, |x_n - x_n^0| < \eta(\varepsilon)$$

συμπεπνύονται τὴν:

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)| < \varepsilon.$$

Τότε δὲ γράφωμεν:

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Ἀποδεικνύεται εὐνόηως ὅπως καὶ εἰς τὰς πραγματικὰς συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς, ὅτι:

Ἐάν $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^1$ καὶ αἱ συναρτήσεις $f(x)$ καὶ $g(x)$ εἶναι συνεχεῖς διὰ τῆς $x \in E$, τότε καὶ αἱ συναρτήσεις:

α) $f(x) + g(x)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ E

β) $f(x) \cdot g(x)$ " " " " "

γ) $\frac{f(x)}{g(x)}$ " " " " E διὰ τῆς x με $g(x) \neq 0$.

• Ὡς ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωση τῆς συνεχείας πραγματικῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν ἥτοι τῆς $z = f(x, y)$. Συμφώνως πρὸς τὸν τεθέντα ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς συνεχείας αὕτη θὰ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (ξ, η) τοῦ χωρίου D τοῦ xy -ἐπιπέδου ἐὰν διὰ ὑάδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἓνας δευτεῦς ἀριθμὸς $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε δι' ὅλα τὰ (x, y) ποὺ πληροῦν τὴν ἀνισότητα $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < \delta^2$ νὰ ἔχωμεν:

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon \quad (1).$$

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τροποποιεῖται ὡς ἀκολούθως:

Ἡ $f(x, y)$ θὰ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ (ξ, η) ἐὰν πληροῦται ἡ σχέση:

$$|f(\xi+h, \eta+k) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon \quad (2)$$

δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν (h, k) τοιαύτας, ὥστε $h^2 + k^2 < \delta$ καὶ τῶν σημείων $(\xi+h, \eta+k)$ ἀνηκόντων ἐντὸς τοῦ D .

Ὁμοίως ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς δύναται νὰ ἔχη καὶ τὴν ἰσοδύναμον διατύπωσιν: Ἡ $f(x, y)$ θὰ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον (ξ, η) ἐὰν διὰ ὑάδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἓνας δευτεῦς ἀριθμὸς $\delta_1(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $|f(\xi+h, \eta+k) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon \quad (3)$

δι' ὅλα τὰ h καὶ k τοιαῦτα ὥστε: $|h| < \delta_1(\varepsilon), |k| < \delta_1(\varepsilon)$.

II. Μερικὴ συνέχεια.

Ἐστω ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$. Θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη εἶναι μερικῶς συνεχὴς ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x_1 εἰς τὸ σημεῖον $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0)$, ἐὰν διὰ ὑάδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἓν $\eta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε ἡ σχέση:

$$|x_1 - x_1^0| < \eta(\varepsilon) \implies |f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0) - f(x_1, x_2^0, \dots, x_q^0)| < \varepsilon.$$

Μία συνάρτησις μερικῶς συνεχὴς ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν δὲν εἶναι ἀναγκαστικῶς καὶ συνεχὴς.

Ὡς περιορισθῶμεν, χάριν ἀπλότητος, εἰς τὴν συνάρτησιν $f(x, y)$ ὁρισμένην ἐπὶ τοῦ $E \subset \mathbb{R}^2$ καὶ ἔστω τὸ σημεῖον $M = (a, b) \in E$. Εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο αὕτη θὰ εἶναι μερικῶς συνεχὴς ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς x, y ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f(x, b)$ καὶ $f(a, y)$ εἶναι συνεχεῖς ὡς πρὸς x καὶ y ἀντιστοίχως.

Ὡς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν συνάρτησιν:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ἐὰν } x \neq 0, \eta \neq 0 \\ 0, & \text{ἐὰν } x = y = 0 \end{cases}$$

Ἡ συνάρτησις $f(x,0)=0$ ὡς σταθερά συνάρτησις καὶ διὰ $x=0$ εἶναι συνεχής.

Ὁμοίως ἡ $f(0,y)=0$ ὡς σταθερά συνάρτησις καὶ διὰ $y=0$ εἶναι συνεχής.

Ὅστε ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι μερικῶς συνεχής ὡς πρὸς ἐκάστην τῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$.

Ἦδη δὲ ἐξετάσωμεν ἐὰν αὕτη εἶναι συνεχής εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$.

Πρὸς τοῦτοις ἀρμεῖ διὰ καθε $\varepsilon > 0$ νὰ ὑπάρχη ἐν $\eta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ καθε (x,y) τὸ ὁποῖον πληροῖ τὰς σχέσεις: $|x| < \eta(\varepsilon)$, $|y| < \eta(\varepsilon)$ νὰ συνεπάγεται $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$ ἢ $|x| < \eta(\varepsilon)$, $|y| < \eta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$.

Διὰ $x=y$ ἀρμεῖ ἡ $|x|=|y| < \eta(\varepsilon)$ νὰ συνεπάγεται $|f(x,x)| < \varepsilon$.

Ἀλλὰ $f(x,x) = \frac{1}{x}$.

Ὅστε ἡ τελευταία σχέση, δηλ. $\frac{1}{x} < \varepsilon$, δὲν πληροῦται πάντοτε. Ἄρα ἡ $f(x,y)$ δὲν εἶναι συνεχής εἰς τὸ $(0,0)$.

Τὸ ἄνωτέρω παράδειγμα ἀποδεικνύει ἐπὶ πλέον ὅτι, δὲν δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν "ὡς ἀπροσδιορίστους μορφάς" μέ συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν, ὅπως μέ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, καὶ ὅτι τὸ ὅριον μιᾶς τοιαύτης ἀπροσδιορίστου μορφῆς δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ τρόπου καὶ ὅν τείνει τὸ μεταβλητὸν σημεῖον M πρὸς τὸ σημεῖον A εἰς ὃ μελετῶμεν τὴν συνάρτησιν, τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν τεινούσης πρὸς τὸ μηδέν.

§4. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $(x,y) \rightarrow f(x,y)$

Τὴν περίπτωσιν τοῦ ὁρίου τῆς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν ὑπίνομεν αὐτόπικον νὰ μελετήσωμεν ἐπενέστερον.

Ἐὰν τὸ σημεῖον $M(x,y)$ τείνη πρὸς τὸ σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ δύναται νὰ τείνη πρὸς ἓνα ὅριον, τὸ ὁποῖον ἐξαρτᾶται σύσσωμός ἐκ τοῦ δρόμου τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ σημεῖον $M(x,y)$, ἢ νὰ μὴν τείνη πρὸς οὐδὲν ὅριον.

π.χ. α) Ἐὰν τὸ $M(x,y)$ ἀκολουθεῖ ἐν εὐθύγραμμον τμήμα πολιτικῆς γωνίας θ_0 , τὸ ὅριον ἐξαρτᾶται, ἐν γενεῇ, ἐκ τῆς πολιτικῆς γωνίας θ_0 .

β) Ἐὰν τὸ $M(x,y)$ ἀκολουθεῖ μιαν καμπύλην ἔχουσα εἰς τὸ σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$ μιαν ἐφαπτομένην πολιτικῆς γωνίας θ_0 , τὸ ὅριον ἐξαρτᾶται ἐν γενεῇ ἐκ τῆς θ_0 .

γ) Τέλος, ἐὰν τὸ $M(x,y)$ διαγράψῃ μιαν σπείραν ἔχουσα τὸ $M_0(x_0,y_0)$ ὡς ἐν ἀσύμπτωτον σημείον, τότε δυνατόν νὰ μὴν ὑπάρχει ὅριον.

Ἐάν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ $f(x,y)$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τὸν ὁποῖον ἀκολουθεῖ τὸ σημεῖον $M(x,y)$ τείνον πρὸς τὸ $M_0(x_0,y_0)$, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ ὄριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$.

Τὸ πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ ὁρίου μιᾶς συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν δὲν εἶναι καί τόσο ἀπλό. Τὸ νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι μία συνάρτησις δὲν ἔχει ὄριον ἀντιμετωπίζεται σχετικῶς εὐνοηθῶ. Ἡ δυσκολία ἐγκυβεῖται ἐάν ἡ συνάρτησις ἔχῃ ὄριον, νὰ εὗρωμεν τοῦτο.

Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἀναφερόμεν διαφόρους μεθόδους, αἵτινες εἶναι ἰσοδύναμοι:

I. Διὰ στοιχειώδεις συναρτήσεις τὸ πιθανόν ὄριον μιᾶς συναρτήσεως, ἐάν δὲν μᾶς δίδεται, τὸ προσδιορίζομεν μέ μιαν κατάλληλον ἀκολουθίαν.

Τὰ κατωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν περίπου τὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν θὰ ἀκολουθῶμεν πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὁρίου.

Παράδειγμα 13%. Ἐστω ἡ συνάρτησις:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \eta \mu \frac{1}{y}, & \text{ἐάν } y \neq 0 \\ 0 & , \text{ ἐάν } y = 0 \end{cases}$$

Ἡ εὐρεθὴ τὸ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Λύσις: Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πιθανοῦ ὁρίου θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν:

$(x_n = \frac{1}{n\eta}, y_n = \frac{1}{n\eta})$ τοῦ $n \uparrow \infty$. Ἀντιμαδιστώντες εἰς τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν καὶ λαμβάνοντες τὰ ὅρια τοῦ $n \uparrow \infty$ ἔχομεν:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n\eta}, \frac{1}{n\eta}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\eta} \cdot \eta \mu \frac{1}{n\eta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n\eta}\right) \cdot 0 = 0$$

Ὅθεν, τὸ πιθανόν ὄριον τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ μηδέν.

ἵνα λοιπὸν τὸ 0 εἶναι τὸ ὄριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y) \rightarrow (0,0)$ ἀρκεῖ διὰ καθε $\varepsilon > 0$ νὰ ὑπάρχῃ ἓν $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν κατωθι συνεπαγωγὴν.

$$|x-0| = |x| < \delta(\varepsilon) \text{ καὶ } |y-0| = |y| < \delta(\varepsilon) \implies \left| x \eta \mu \frac{1}{y} \right| < \varepsilon \quad \eta$$

$$\alpha\iota \quad |x| < \delta(\varepsilon) \text{ καὶ } |y| < \delta(\varepsilon) \implies \left| \eta \mu \frac{1}{y} \right| < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$$

Θέτοντες $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, άρκει αι $|x| < \varepsilon$ και $|y| < \varepsilon$ να συνεπάγονται την

$$|\eta \mu \frac{1}{y}| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1, \text{ το όποιον ισχύει πάντοτε.}$$

Άρα $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. Προφανώς η $f(x,y)$ είναι και συνεχής εις το σημειον $(0,0)$.

28/ Δίδεται η συνάρτησις:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 - y^2), & \text{έαν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{" } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Νά εύρεθῇ, έάν ύπάρχη, τὸ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ και νά έξετασθῇ ἡ συνέχεια ταύτης εις τὸ σημειον $(0,0)$.

Λύσις: Θέτοντες $x = \frac{1}{n}$ και $y = \frac{1}{n+1}$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται μετὰ τὰς πράξεις:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n+1}{n^2 + (n+1)^2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \rightarrow 0$$

Τὸ πιθανόν λοιπόν ὅριον τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y) \rightarrow (0,0)$ εἶναι τὸ 0.

Εἶναι δέ $\left| \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} (x^2 - y^2) - 0 \right| = |x \cdot y| \cdot \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x \cdot y| < \varepsilon$, άρκει $|x| = |x-0| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$ και $|y| = |y-0| < \delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Ὅθεν ἡ $f(x,y) \rightarrow 0$ τοῦ $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Εἶναι φανερόν τώρα ὅτι ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχής εις τὸ σημειον $(0,0)$.

II. Τὸ πιθανόν ὅριον τῆς $f(x,y)$, τοῦ $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)$, δυνάμεθα νὰ τοῦ υπολογίσωμεν συχνά και μέ την βοήθειαν τῶν πολικῶν συντεταγμένων:

Πρὸς τούτοις θέτομεν $x = x_0 + \rho \sin \theta$, $y = y_0 + \rho \eta \mu \theta$. Τοῦ $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow \rho \rightarrow 0+$ και τὸ θ δύναται νά μεταβάλλεται καθ' αἰονδήποτε τρόπον. Δύναται δέ τὸ $\theta \rightarrow \pm \infty$.

Ἐυτελοῦντες τὸν μετασχηματισμόν εις τὴν $f(x,y)$ λαμβάνομεν.

$$f(x,y) = f(x_0 + \rho \sin \theta, y_0 + \rho \eta \mu \theta) = F(\rho, \theta).$$

Ἐάν τὸ $\lim_{\rho \rightarrow 0+} F(\rho, \theta) = \ell$ ύπάρχη και εἶναι ανεξάρτητον τοῦ θ , τότε τὸ πιθανόν ὅριον τῆς $f(x,y)$, τοῦ $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)$, εἶναι τὸ ℓ . Ἐν συνεχείᾳ δά ἐργασώμεν ὅπως εις τὰ προαναφερθέντα παραδείγματα. Τονίσομεν ἰδιαιτέρως-ὅπως ἐξ ἄλλου δά φανῇ και ἀπὸ ἑνα παράδειγμα- ἡ ύπαρξις τοῦ ὁρίου τῆς $F(\rho, \theta)$ τοῦ $\rho \rightarrow 0+$ και ἡ ανεξαρτησία αὐτοῦ ἐκ τοῦ θ δέν μᾶς ἐξασφαλίζει τὴν ύπαρξιν τοῦ ὁρίου τῆς $f(x,y)$ τοῦ $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τὸ $\lim_{\rho \rightarrow 0+} F(\rho, \theta)$ δὲν ὑπάρχει ἢ δὲν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ θ , τότε καὶ ἡ $f(x, y)$ δὲν ἔχει ὅριον τοῦ $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Παράδειγμα 1% Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x,y)}{x^2+y^2}$.

Λύσις: θέτομεν $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \eta\mu \theta$ καὶ ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \frac{\eta\mu(\rho^2 \eta\mu \theta \sin \theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0+} \frac{\eta\mu(\frac{\rho^2}{2} \eta\mu 2\theta)}{(\frac{\rho^2}{2} \eta\mu 2\theta)} \cdot \frac{\eta\mu 2\theta}{2} = 1 \cdot \frac{\eta\mu 2\theta}{2}.$$

Τὸ ὅριον δὲν εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς (πολλυπλῆς) γωνίας θ , συνεπῶς τὸ ζητούμενον ὅριον δὲν ὑπάρχει.

2%. Ἐστω ἡ συνάρτησις f μὲ πεδῖον ὁρισμοῦ τὸ $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ διδομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot e^{-\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)^2}.$$

Ἐξετάσατε ἐὰν ὑπάρχη τὸ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Λύσις: θέτοντες $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \eta\mu \theta$ ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις γράφεται:

$$f(x, y) = f(\rho \sin \theta, \rho \eta\mu \theta) = \frac{2 \sin \theta}{\rho} \cdot e^{-\frac{4 \sin^2 \theta}{\rho^2}} \rightarrow 0 \text{ τοῦ } \rho \rightarrow 0+.$$

Ἐντεῦθεν ἡ $f(x, y)$ τείνει πρὸς τὸ 0, ὅταν τὸ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ἐπὶ ἐκάστης εὐθείας διέρχουμένης διὰ τῆς ἀρχῆς.

Ἐξ ἄλλου ἐὰν τὸ σημεῖον $M(x, y)$ υἱνεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Γ μὲ εἰσώσιν $x^2+y^2=2x$ (ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς), τότε $f(x, y) = \frac{1}{e}$ διὰ καὶ $(x, y) \in \Gamma - \{(0, 0)\}$.

Ἐξ οὗτοῦ ἔπεται ὅτι ἡ $f(x, y)$ δὲν ἔχει ὅριον τοῦ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

III. Διὰ τὴν εὑρεσιν τοῦ πιθανοῦ ὁρίου πολλὰ μᾶλλον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀμολουθίαν $(x_n, \lambda x_n)$, $\lambda \neq 0$ μὲ $x_n \rightarrow 0$ διὰ $n \rightarrow \infty$ καὶ ἐὰν τὸ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, \lambda x_n)$ ὑπάρχη καὶ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ λ , τοῦτο θὰ εἶναι τὸ πιθανόν ὅριον τῆς $f(x, y)$ τοῦ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Ἐν ἑνάντια περιπτώσει ἐὰν τὸ ὅριον τῆς $f(x_n, \lambda x_n)$ ἑξαρτᾶται ἐκ τοῦ λ , τότε τὸ ὅριον τῆς $f(x, y)$ δὲν ὑπάρχει.

Παράδειγμα: Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ὑπάρχη τὸ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x,y)}{x^2+y^2}$.

Λύσις: θεωροῦμεν τὴν ἀμολουθίαν $(x_n, \lambda x_n)$, $\lambda \neq 0$ μὲ $x_n \rightarrow 0$ τοῦ $n \uparrow \infty$. Τότε

και $(x_n, \lambda x_n) \rightarrow (0, 0)$ του $n \uparrow \infty$. Θα έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\mu(x_n - \lambda x_n)}{x_n^2 + \lambda^2 x_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\mu(\lambda x_n^2)}{(\lambda^2 + 1)x_n^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\mu(\lambda x_n^2)}{(\lambda x_n^2)} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \cdot 1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}. \text{ Ήτοι το όριο εξαρτά-}$$

ται έμ του λ .

Άρα το όριο της δοθείσης συναρτήσεως δεν υπάρχει.

§5. ΕΠΑΛΛΗΛΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ $(x, y) \rightarrow f(x, y)$.

Έστω η συνάρτησις $f(x, y)$. Καλούμεν επάλληλα όρια ταύτης τά $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$ και $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$. Ταύτα δεν είναι κατ'ανάγκην ίσα.

Η ισότης των ανωτέρω όριων δεν συνεπάγεται πάντοτε την ύπαρξιν του $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$.

Η διαφορετικώς: Εάν τά επάλληλα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y))$ και $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y))$ είναι ίσα, τότε η κοινή τιμή των είναι το πιθανόν όριον της $f(x, y)$ του $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτησις $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$. Θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y}) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

Όθεν τά επάλληλα όρια δεν είναι ίσα και κατ'α συνέπειαν το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Παρατήρησις: Έμ της υπάρξεως του $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ δεν συνεπάγεται πάντοτε η ύπαρξις των επάλληλων όριων.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτησις:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \mu \frac{1}{y}, & \text{εάν } y \neq 0 \\ 0, & \text{εάν } y = 0 \end{cases}$$

Απεδείχθη (βλ. παράδειγμα 1^ο §4) ότι, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

Παρατηρούμεν ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ και ότι το $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

πράγματι λαμβάνοντες τας ακολουθίας $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n^* = \frac{1}{2n + \frac{1}{2}}$ θα έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \mu n) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \mu (2n + \frac{1}{2})) = x$$

Όθεν το $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$ υπάρχει, ενώ το $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ δεν υπάρχει.

§ 6. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$

Έστω η διανυσματική συνάρτησις f ὁρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον τοῦ \mathbb{R}^q με τιμὰς ἐντὸς τοῦ διανυσματικοῦ χώρου \mathbb{R}^p .

Έστω διὰ τὰδε $x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ τὸ σημεῖον $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ἔχει συντεταγμένες $(f_1(x_1, x_2, \dots, x_q), f_2(x_1, x_2, \dots, x_q), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_q))$, ὅπου αἱ f_1, f_2, \dots, f_p εἶναι πραγματικαὶ συναρτήσεις καλούμεναι συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$.

Εὐνόμως διαπιστοῦται ὅτι: ἵνα ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν II-2-1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ πραγματικαὶ συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2, \dots, x_q), f_2(x_1, x_2, \dots, x_q), \dots, f_p(x_1, x_2, \dots, x_q)$ νὰ εἶναι συνεχεῖς.

Σπουδαῖα Παρατήρησις: Ἐπειδὴ τὸ μιραδιὸν ἐπίπεδον \mathbb{C} « ταυτίζεται » πρὸς τὸν χώρον \mathbb{R}^2 , τ'ἀνωτέρω συμπεράσματα ἐφαρμόζονται εἰς μιραδιώδεις συναρτήσεις μιᾶς μιραδιωτῆς μεταβλητῆς.

Παράδειγμα: Ἡ συνάρτησις $(x, y) \rightarrow (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ με πεδίον ὁρισμοῦ τὸν δίσκον $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$ εἶναι μία διανυσματικὴ συνάρτησις δύο μεταβλητῶν τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 ἐντὸς τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 .

Πράξεις με διανυσματικὰς συναρτήσεις.

Έστωσαν αἱ διανυσματικαὶ συναρτήσεις f, g ὁρισμέναι ἐπὶ τοῦ $E \subset \mathbb{R}^q$ με τιμὰς ἐν \mathbb{R}^p . Έστω δὲ $f = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$ καὶ $g = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις αὐτῶν.

Ὀρίσομεν:

$$f + g = \{f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_p + g_p\}$$

$$\text{καὶ} \quad \lambda \cdot f = \{\lambda \cdot f_1, \lambda \cdot f_2, \dots, \lambda \cdot f_p\}.$$

Συμφώνως πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμούς, διὰ τὰδε $x \in E \subset \mathbb{R}^q$ ὁ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \{(f_1+g_1)(x), (f_2+g_2)(x), \dots, (f_p+g_p)(x)\} \\ &= \{f_1(x)+g_1(x), f_2(x)+g_2(x), \dots, f_p(x)+g_p(x)\} \\ &= \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\} + \{g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x)\} \\ &= f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Ὁμοίως: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$

Ευνόως διαπιστώνεται ότι: το σύνολον τῶν ἀνωτέρω διανυσματικῶν συναρτήσεων τῆς διανυσματικῆς μεταβλητῆς ἀποτελεῖ ἕνα διανυσματικὸν χώρον.

Ὁμοίως ὀρίζομεν ὡς ριζόμενον τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως f ἐπὶ μίαν πραγματικὴν συνάρτησιν φ , ἀμφοτέρων ὠρισμένων ἐπὶ τοῦ $E \subset \mathbb{R}^1$, ὡς ἀπολούδως:

$$f \cdot \varphi = \{f_1 \cdot \varphi, f_2 \cdot \varphi, \dots, f_p \cdot \varphi\}$$

Προφανῶς ἔχομεν: $(f \cdot \varphi)(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$.

Παρατήρησις: Ἐάν $q=1$, τότε ἔχομεν τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ καὶ ἔχομεν πάλιν τοὺς ἐν § 2, ὁρισμούς καὶ συμπεράσματα.

Πρότασις II-6-1. Ἐστωσαν f, g διανυσματικαὶ συναρτήσεις ὠρισμέναι ἐπὶ τοῦ $E \subset \mathbb{R}^1$ με τιμὰς ἐν \mathbb{R}^p . Ἐάν διὰ τῆς αὐτῆς $x \in E$ αἱ f, g εἶναι συνεχεῖς, τότε καὶ αἱ συναρτήσεις $f \pm g$ καὶ $\lambda \cdot f$ θὰ εἶναι συνεχεῖς.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος μετὰ τὴν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων.

Διανυσματικὴ ἔκφρασις μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως.

Ἄς περιορισθῶμεν εἰς τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν f ὠρισμένην ἐν ὑποσύνολον E τοῦ \mathbb{R}^3 με τιμὰς ἐντός τοῦ \mathbb{R}^3 .

Ἐστωσαν $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς f . Εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$ τοῦ E ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον:

$$f(x, y, z) = \{X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)\} \text{ τοῦ } \mathbb{R}^3.$$

Ἐστω $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ μία τυχοῦσα βάσις τοῦ \mathbb{R}^3 ἀρχῆς O . Τὸ διάνυσμα $\vec{OM}(x, y, z) = \vec{\epsilon}$ καλεῖται διάνυσμα θέσεως τοῦ σημείου $M(x, y, z)$.

Δυνάμεθα λοιπὸν τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν f νὰ τὴν γράψωμεν οὕτως:

$$f(\vec{\epsilon}) = \vec{i} \cdot X(x, y, z) + \vec{j} \cdot Y(x, y, z) + \vec{k} \cdot Z(x, y, z). \quad (1)$$

Ἡ συνάρτησις $f(\vec{\epsilon})$ ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ E λέγομεν ὅτι εἶναι ἕνα διανυσματικὸν πεδῖον ἐπὶ τοῦ E .

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, ὅπου $I \subset \mathbb{R}$ διὰ τῆς αὐτῆς $t \in I$ καὶ ἡ $f(t)$ ἔχει συντεταγμένας συναρτήσεις $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, ἡ (1) γράφεται:

$$f(t) = \vec{i}X(t) + \vec{j}Y(t) + \vec{k}Z(t).$$

§ 7. ΟΜΑΛΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω η διανυσματική συνάρτησις f ὁρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον A τοῦ \mathbb{R}^1 μέ τι-
μάς ἐντὸς τοῦ διανυσματικοῦ χώρου \mathbb{R}^p . Θὰ λήρωμεν ὅτι ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπὶ
τοῦ A , τότε καὶ μόνον τότε, ἂν:

Διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἓν $\eta(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τοῦ ε), τοιοῦτον ὥστε:

$$\forall x', x'' \in A \text{ μὲ } \|x' - x''\| < \eta(\varepsilon) \implies \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon \quad (1)$$

Εἶναι φανερόν ὅτι ἂν ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπὶ τοῦ A , εἶναι καὶ συνεχὴς ἐπ'
αὐτοῦ.

Τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν εἶναι ἀληθές.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ (1) εὐνόως ἀποδεικνύεται ἡ κατωθί:

Πρότασις II - 7-1. Ἡ συνάρτησις $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν $A \subset \mathbb{R}^1$ τότε,
καὶ μόνον τότε, ἂν εὐάστη τῶν συντεταγμένων συναρτήσεων f_1, f_2, \dots, f_p εἶναι ὁμα-
λῶς συνεχὴς ἐν A .

Ἀπόδειξις: Ἐστω ὅτι ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν A , τότε

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in A \text{ μὲ } \|x' - x''\| < \eta(\varepsilon) \implies \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$$

τότε ὅμως θὰ ἰσχύη καὶ:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in A \text{ μὲ } \|x' - x''\| < \eta(\varepsilon) \implies |f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon, i=1, 2, \dots, p$$

ἄρα καὶ $f_i, i=1, 2, \dots, p$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχεῖς.

Ἀντιστρόφως: Ἐστω ὅτι $\forall i=1, 2, \dots, p$ ἡ $f_i(x)$ εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν A , τότε:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in A \text{ μὲ } \|x' - x''\| < \eta(\varepsilon) \implies |f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$$

Τότε ὅμως εἶναι:

$$\|f(x') - f(x'')\| = \left(\sum_{i=1}^p |f_i(x') - f_i(x'')|^2 \right)^{1/2} < \left(p \frac{\varepsilon^2}{p} \right)^{1/2} = \varepsilon. \forall x', x'' \in A \text{ μὲ } \|x' - x''\| < \eta(\varepsilon).$$

Ἄρα ἡ f εἶναι ὁμαλῶς συνεχὴς ἐν A .

Διὰ διανυσματικὰς συναρτήσεις τὸ θεώρημα II-7-1, τόμος Α' σελ. 339, διατυπῶνται ὡς ἑξῆς:

Θεώρημα II - 7-1. Πᾶσα συνάρτησις $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ συνεχὴς εἰς ἓν συμπαγὲς ὑποσύνολον K
τοῦ \mathbb{R}^1 εἶναι καὶ ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ.

Συμπληρώματα και άσκησης:

1. Εύρατε το πεδίο ορισμού των κάτωδι συναρτήσεων:

i) $f(x,y) = \log(16-x^2-y^2) : (x^2+y^2 < 4)$ ii) $f(x,y) = \sqrt{6-(2x+3y)}$ iii) $f(x,y,z) = (x+z)^y$

2. Έστω η πραγματινή συνάρτησις $f(x,y)$, $(x,y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, όπου U ανοικτόν σύνολον και έστω έν σημείον $(x_0, y_0) \in U$. Υποθέτομεν ότι υπάρχει τό $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = \ell < +\infty$, επί πλέουσ δέ ότι υπάρχουν έν \mathbb{R} τά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)$, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$. Νά δειχθῇ ότι τότε υπάρχουν και τά επάλληλα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y))$, $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y))$ και έυαστον τούτων είναι ίσον πρὸς ℓ .

3. Εξετάσατε εάν υπάρχουν τά κάτωδι όρια και εάν καταστατικῶς υπολογίσατε αὐτά.

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$, iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1+y^2)\eta\mu x}{x}$, iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

4. Νά δειχθῇ ότι δέν υπάρχει τό όριον $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{y^2+z}{x+yz}$

Υπόδ: Θεωρήσατε ότι τό σημείον $M(x,y,z)$ κινεῖται κατά μήκος τῆς εὐθείας (ε) τῆς διερχομένης διά τοῦ σημείου $A(1,1,1)$ και παραλλήλου πρὸς τό διάνυσμα $(\lambda, 1, 1)$, όπου λ παράμετρος, πῶι επί τῆς εὐθείας τῆς ἐκούσης ἔξισωσιν:

$$\frac{x-1}{\lambda} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} = \rho \quad \text{ἐξ ἧς λαμβάνομεν } x = \rho\lambda + 1, y = \rho + 1, z = \rho + 1$$

$$\text{Τότε ἡ δοδεῖσα συνάρτησις γράφεται: } \frac{y^2+z}{x+yz} = \frac{\rho^2+3\rho}{\rho\lambda+\rho^2} = \frac{\rho+3}{\lambda+\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \frac{3}{\lambda}$$

Παρατηροῦμεν ότι τό όριον ἐξαρτᾶται ἐν τῆς εὐθείας (ε). Ἀρα δέν υπάρχει.

5. Εάν $a > 0$ και θ πραγματικὸς ἀριθμὸς νά δειχθῇ ότι: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x^y = a^b$. Ἀπολοῦδως δειξατε ότι δέν υπάρχει τό $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$.

- 5α. Δείξατε τό θεώρημα: i) Έστω ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ είναι ὠρισμένη εἰς ἓνα πεδίοη D και συνεχῆς εἰς τό σημείον (x_1, y_1) τοῦ D . Εάν $f(x_1, y_1) > 0$, τότε υπάρχει μία περιοχή τοῦ (x_1, y_1) ἐντὸς τῆς ὁποίας ισχύει: $f(x,y) > \frac{1}{2} f(x_1, y_1) > 0$.

ii) Έστω ἡ $f(x,y)$ είναι συνεχῆς ἐντὸς τοῦ D και είναι θετινῇ δι' ἓνα τουλάχιστον σημείον τοῦ D και ἀρνητινῇ δι' ἓνα τουλάχιστον σημείον τοῦ D . Τότε ἡ $f(x,y) = 0$ δι' ἓνα τουλάχιστον σημείον τοῦ D .

(Υπόδ: i) Εἰς τὸν ὀρισμὸν τῆς συνεχείας θέσατε $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_1, y_1)$).

6. Δίδεται ἡ συνάρτησις :

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu \frac{1}{y}, & \text{ἂν } y \neq 0 \\ 0, & \text{ἂν } y = 0 \end{cases}$$

Δείξατε ὅτι ἱσχύει : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, ἐπὶ πλεόν νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ὑπάρχουν τὰ ὅρια :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right) \text{ καὶ } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right).$$

7. Δίδεται ἡ συνάρτησις :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \cdot \eta\mu \frac{1}{y}, & \text{ἂν } x \neq 0 \text{ καὶ } y \neq 0 \\ 0, & \text{ἂν } x=0 \text{ ἢ } y=0 \end{cases}$$

Προσδιορίσατε ποία ἐκ τῶν ὑπὸ τῶν ὁρίων ὑπάρχουν :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right), \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

Εἰς καταφατικὴν περίπτωσιν ὑπολογίσατε ταῦτα.

8. Δίδεται ἡ συνάρτησις :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}, \text{ με } x^2 y^2 + (x-y)^2 \neq 0.$$

Δείξατε ὅτι δὲν ὑπάρχει τὸ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Ἐπὶ πλεόν δείξατε ὅτι τὰ ἐπ'ἀλλήλη ὅρια ὑπάρχουν καὶ εἶναι ἴσα μεταξὺ τῶν.

9. Δίδεται ἡ συνάρτησις :

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy, & \text{ἂν } (x,y) \neq (1,2) \\ 0, & \text{ἂν } (x,y) = (1,2) \end{cases}$$

Στηριζόμενοι εἰς τὸν ὁρισμὸν τῆς συνεχείας, ὅπως διευκρινίσθη εἰς τὴν §3, ἐξετάσατε τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως εἰς τὰ σημεία :

$$i) (x_0, y_0) \neq (1,2), \quad ii) (1,2).$$

Πῶς δύνασθε νὰ ἐπιτύχετε μίαν ἄρσιν τῆς ἀσυνεχείας εἰς τὸ σημεῖον $(1,2)$;

10. Ἐξετάσατε μετὰ τὴν βοήθειαν τῶν πολιτικῶν συντεταγμένων τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ἂν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ἂν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$.

11. Δίδεται η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Δείξτε ότι αυτή είναι συνεχής εις το σημείο $(0,0)$.

12. Εύρατε, αν υπάρχουν, τα κάτωδι όρια:

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3-2y^3}{x^2+y^2}$, ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,\pi)} x \cdot \eta \mu \frac{y}{x}$, iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \log(x^2+y^2)$.

13. 'Εξετάσατε ως προς την συνέχειαν εις το σημείο $(0,0)$ την συνάρτησιν με τύπον:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \log(x^2+y^2), & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

14. Διά ποίαν τιμήν του α η συνάρτησις:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι συνεχής εις το σημείο $(0,0)$;

15. Μελετήσατε ως προς την συνέχειαν την συνάρτησιν με τύπον:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}, & \text{αν } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

16. 'Εξετάσατε ως προς την ομαλήν συνέχειαν την συνάρτησιν με τύπον:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

εις τον τόπον, ο οποίος ορίζεται υπό του συνόλου $A = \{(x,y) : |x|+|y| \leq 1\}$.

17. Δείξτε ότι η $f(x,y)$ είναι συνεχής εάν:

- i) Όταν το y είναι σταθερόν ή f είναι μία συνεχής συνάρτησις του x ;
ii) Όταν το x είναι σταθερόν ή f είναι ομαλώς συνεχής ως προς y υπό την έννοιαν:

Διά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει έν $\delta(\varepsilon)$ ανεξάρτητον των x και y τοιούτον ώστε να έχωμεν:

$$|f(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon \text{ όταν } |y - y| < \delta(\varepsilon).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ - ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

§1. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Έστω $M = (x_1, x_2, \dots, x_q) \longrightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ μία πραγματιυή συνάρτησις ώρισμένη εις έν άνοιυτόν σύνολον V τοῦ διανυσματιυού χώρου \mathbb{R}^q . Έστω $M \in \mathbb{R}^q$. Προτιθέμεθα νά όρί-
σωμεν τάς q μεριυάς παραγώγους τής f εις τό σημείον M .

Κατ' άρχάς άς περιοριδώμεν εις τήν περίπτωσιν τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 .

Έστω $M = (x, y, z) \longrightarrow f(M) = f(x, y, z)$ μία πραγματιυή συνάρτησις ώρισμένη εις έν άνοιυτόν ύποσύνολον V τοῦ \mathbb{R}^3 υαί έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$.

Η συνάρτησις $x \longrightarrow f(x, y_0, z_0)$ είναι μία πραγματιυή συνάρτησις μιυάς μόνον πραγ-
ματιυής μεταβλήτης, τής x , ώρισμένη εις έν άνοιυτόν διάστημα κέντρου x_0 υαί ή παρά-
γωγος αὔτης, ώς πρós x , έφ' όσον ύπάρχει, δηλ. τό:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} \quad \text{υαί λέιται} \quad \text{μεριυή παρά-}$$

γωγος τής f , ώς πρós x , εις τό σημείον (x_0, y_0, z_0) .

Η άνωτέρω μεριυή παράγωγος συμβολίεεται οὔτω:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) \text{ ή } \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}.$$

Θεωρούντες τάς συναρτήσεις $y \longrightarrow f(x_0, y, z_0)$ υαί $z \longrightarrow f(x_0, y_0, z)$, όρίεομεν αναλόγως
τάς μεριυάς παραγώγους τής f ώς πρós y ή z εις τό σημείον $M(x_0, y_0, z_0)$ υαί τάς συμ-
βολίεομεν οὔτω:

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) \text{ ή } \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) \text{ ή } \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}.$$

Γενιυώς ή μεριυή παράγωγος τής $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ εις τό σημείον $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_q^0)$,
ώς πρós x_i , ένθα $1 \leq i \leq q$, όρίεεται ώς ή παράγωγος, εάν ύπάρχη, τής συναρτήσεως
 $x_i \longrightarrow f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_q^0)$, ήτοι:

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_q^0)}{\partial x_i} = \lim_{x_i \rightarrow x_i^0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i, \dots, x_q^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_q^0)}{x_i - x_i^0} \quad \Bigg)$$

Συμβολίζεται δὲ αὕτη καὶ οὕτω: $f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$.

Μία συνάρτησις q μεταβλητῶν ἔχει q τό πλήθος μεριῶν παραγώγους αἱ τάξεως.

Οἱ κανόνες παραχωρίσεως συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς μεριῶν παραγώγους συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν.

Εἰδιωῶς ἔχομεν:

- α) Ἡ μεριῦν παράγωγος σταθερᾶς συναρτήσεως ὡς πρὸς οἰανδήποτε μεταβλητὴν εἶναι 0, ἥτοι: $\frac{\partial c}{\partial x_i} = 0$.
- β) Ἡ μεριῦν παράγωγος μιᾶς μεταβλητῆς ὡς πρὸς αὐτὴν τὴν ἰδίαν εἶναι ἴση πρὸς 1, ἥτοι: $\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1$.
- γ) Ἡ μεριῦν παράγωγος μιᾶς μεταβλητῆς ὡς πρὸς μίαν ἄλλην ἰσοῦται πρὸς μηδέν, ἥτοι: $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = 0$.

Παραδείγματα:

1^η) Ἐστω $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 + y^3 - 1$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 3y^2$

2^η) Ἐστω $f(x, y) = a \cdot x$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3^η) Ἐστω $f(x, y) = a$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

4^η) Ἐστω $f(x, y, z) = x + y + z + 1$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 1$.

5^η) Ἐστω $f(x, y) = x^y$, $x > 0$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$.

6^η) Ἐστω $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$. Εἶναι $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ καὶ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Γεωμετρικὴ ἐρμηνεία τῶν μεριῶν παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$

Ἐστω $z = f(x, y)$ μία ἐπιφάνεια (πρβλ. § 3. κεφ. II) μέ γραφικὴν παράστασιν ὡς ἐν σχ. 1 (βλ. ἐπομένην σελίδα).

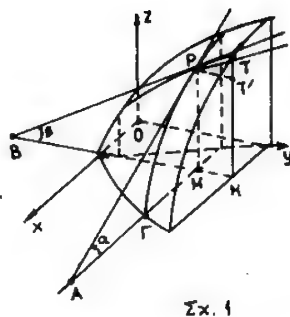
Θεωρούμεν τὸ σημεῖον $P(x_0, y_0, z_0)$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. Τὸ ἐπίπεδον $y=y_0$ τέμνει τὴν γραμμικὴν παράστασιν τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὴν γραμμὴν PG με ἐξίσωσιν: $z=f(x, y_0)$, $y=y_0$.

Τότε ὁμως, συμφώνως πρὸς τὴν γεωμετρικὴν ἔρμηνείαν τῆς παραπάνω συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς (βλ. Τόμος Α, σελ. 269), εἶναι:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \epsilon\phi \alpha,$$

ὅπου α εἶναι ἡ γωνία τοῦ ὀξυγώνου τῶν x μετὰ τὴν ἐφαπτομένην PA τῆς τομῆς PG εἰς τὸ σημεῖον $P(x_0, y_0, z_0)$. Ὀμοίως συνεπτόμενοι ἔχομεν ὅτι (βλ. σκ. 1):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \epsilon\phi \beta.$$



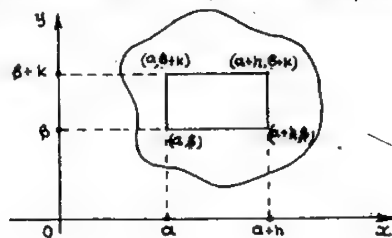
§2. ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Πρότασις III -2-1. Ἐάν ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(M)$, ὅπου $M=(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ἐπιδέχεται εἰς τὸ σημεῖον A μεριμὰς παραγώγους συνεχεῖς, τότε ἡ $f(M)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον A .

Ἀπόδειξις: Ἄς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχάς τὴν συνάρτησιν $f(x, y)$, ἥτις ἔχει εἰς τὸ σημεῖον $A(a, \beta)$ καὶ εἰς μιαν περιοχὴν V αὐτοῦ μεριμὰς παραγώγους $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ καὶ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν συνεχεῖς εἰς τὸ σημεῖον $A(a, \beta)$.

Εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y)$ δέτομεν: $x=a+h$, $y=\beta+k$ καὶ ἔστω $\Delta=f(M)-f(A)=f(a+h, \beta+k)-f(a, \beta)$.

ὑποθέτομεν ὅτι, τὰ $|h|$, $|k|$ εἶναι ἀρμετὰ μικρά, ὥστε πάντα τὰ σημεῖα τοῦ ὀρθογωνίου τοῦ ἔχοντος ὡς ἀπέναντι κορυφὰς τὰ A καὶ M καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τοὺς ἄξονας ν' ἀνήκουν εἰς τὴν θεωρηθεῖσαν περιοχὴν V . (βλ. Σκ. 1).



Σκ. 1

Δυνάμεθα λοιπόν να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b) \\ &= h \cdot f'_x(a+\theta \cdot h, b+k) + k f'_y(a, b+\theta'k) \quad (1) \quad \text{όπου } 0 < \theta, \theta' < 1.\end{aligned}$$

Λόγω της υποθέσεως της συνεχείας της f'_x εις τό σημείον $A(a, b)$ έχουμε:

$$f'_x(a+\theta \cdot h, b+k) = f'_x(a, b) + \varepsilon_1(h, k)$$

όπου η συνάρτησις $\varepsilon_1(h, k) \rightarrow 0$ του $M \rightarrow A$.

Όμοίως $f'_y(a, b+\theta'k) = f'_y(a, b) + \varepsilon_2(k)$, όπου η $\varepsilon_2(k) \rightarrow 0$ του $M \rightarrow A$.

Όθεν, η (1) γράφεται: $f(M) - f(A) = h \cdot f'_x(A) + k \cdot f'_y(A) + h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2 \quad (2)$

Του $M \rightarrow A$ τὰ $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ και συγχρόνως τὰ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$.

Άρα $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$, δηλ. η $f(x, y)$ είναι συνεχής εις τό σημείον $A(a, b)$.

Η άνωτέρω απόδειξις έπυτείνεται και διά συναρτήσεϊς περισσότεραν μεταβλητών.

Παρατήρησις: Η ύπαρξις των μεριων παραγώγων μιᾶς συναρτήσεως εις ένα σημείον δέν συνεπάχεται την συνέχειαν της συναρτήσεως εις αυτό τό σημείον.

Περί του άνωτέρω θεβαιούμεθα και έυ του υάτωδι παραδείμματος:

$$\text{Έστω η συνάρτησις: } f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } xy \neq 0 \\ x+y, & \text{αν } xy = 0 \end{cases}$$

Η ως άνω συνάρτησις εις τό σημείον $(0, 0)$ έχει μεριυάς παραγώγους ίσας, ήτοι:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{και}$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Η f όμως δέν είναι συνεχής εις τό σημείον $(0, 0)$, διότι εάν θεωρήσωμεν την άμο-
λουδιαν $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, τότε $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1$, διότι $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \neq 0$ και $f(0, 0) = 0 \neq 1$. Δη-
λαδή διά $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \neq f(0, 0)$. Άρα η f δέν είναι συνεχής εις τό
σημείον $(0, 0)$, παρ' ότι υπάρχουν αι μεριυαί παράγωγοι αυτής εις τό έν λόγω σημείον.

§ 3. ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω $M = (x, y, z) \rightarrow f(M) = f(x, y, z)$ μία πραγματιυή συνάρτησις ώρισμένη εις έν
άνοιυτόν ύποσύνολον \mathcal{V} του \mathbb{R}^3 .

Θά λέγωμεν ότι η f είναι διαφορίσιμος εις τό σημείον $M_0(x_0, y_0, z_0) \in U$, εάν υπάρ-
χουν σταθεραί a_0, a_1, a_2, a_3 τοιαῦται, ὥστε ἡ $f'(M)$ νά δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν
κάτωδι μορφήν:

$$f(M) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(y-y_0) + a_3(z-z_0) + \|M-M_0\| \cdot \varepsilon(\|M-M_0\|), \quad (1)$$

ὅπου ἡ συνάρτησις $\varepsilon(\|M-M_0\|)$, ὀρισμένη ὑπό τῆς ἀνωτέρω σχέσεως διὰ $M \neq M_0$ ἔχει τήν
ιδιότητα: $\varepsilon(\|M-M_0\|) \rightarrow 0$ τοῦ $M \rightarrow M_0$ καί $\varepsilon(0) = 0$.

Ὁ συμβολισμός $\|\cdot\|$ παριστᾷ μία τῶν τριῶν γνωστῶν normes ἐπὶ τοῦ \mathbb{R}^3 .

Θά λέρωμεν ότι η f εἶναι διαφορίσιμος ἐν U , ὅταν εἶναι διαφορίσιμος εις καθέκαστον αὐτοῦ.

Πρότασις III-3-1. Ἐάν μία συνάρτησις $f(x, y, z)$ εἶναι διαφορίσιμος εις τό σημείον
 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, τότε ἰσχύουν τά κάτωδι:

α) Ἡ f εἶναι συνεχής εις τό σημείον M_0 καί ἰσχύει: $f(M_0) = a_0$.

β) Ἡ f ἐπιδέχεται μεριῶς παραγώρους πρώτης τάξεως εις τό σημείον M_0 καί ἰσχύουν:

$$f'_x(M_0) = a_1, f'_y(M_0) = a_2, f'_z(M_0) = a_3.$$

Ἀπόδειξις: α) Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) διὰ $M = M_0$ λαμβάνομεν: $f(M_0) = a_0$.

Εἶναι δέ $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = a_0 = f(M_0)$. Ὅθεν ἡ f εἶναι συνεχής εις τό σημείον M_0 .

β) Ἡ (1) διὰ $y = y_0, z = z_0$ γράφεται:

$$f(x, y_0, z_0) = f(x_0, y_0, z_0) + a_1(x-x_0) + |x-x_0| \cdot \varepsilon(|x-x_0|).$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος διὰ $x \neq x_0$ λαμβάνομεν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0} = a_1,$$

Συνεπῶς ἡ $f'_x(x_0, y_0, z_0)$ ὑπάρχει καί ἰσοῦται πρὸς a_1 .

Δι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ εὐρίσκομεν:

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = a_2 \text{ καί } f'_z(x_0, y_0, z_0) = a_3$$

κατόπιν τούτων ἡ (1) γράφεται:

$$f(M) = f(M_0) + f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x-x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y-y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z-z_0) + \|M-M_0\| \cdot \varepsilon(\|M-M_0\|)$$

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἐπευτείνεται καί διὰ μίαν συνάρτησιν p τῶ πλῆθος μεταβλητῶν.

Πρότασις III-3-2. Κάθε πραγματιυή συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν ἔχουσα μεριῶς
παραγώρους συνεχεῖς εις ἓνα σημείον εἶναι διαφορίσιμος εις αὐτό τό σημείον.

Απόδειξις: Ἄς θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως $f(x, y, z)$ τριῶν μεταβλητῶν. Ἐστώσαν τὰ σημεία $M_0(x_0, y_0, z_0)$ καὶ $M(x, y, z)$.

Λόγω τοῦ ὅτι ἡ συνάρτησις ἔχει μεριῶς παραγώγους συνεχεῖς, ἐφαρμόζοντες τὴν σχέσιν (2) τῆς προτάσεως III-2-1 (βλ. ἀπόδειξιν προτάσεως) διὰ τὴν περίπτωσιν τριῶν μεταβλητῶν, θὰ ἔχωμεν:

$$f(M) = f(M_0) + h \cdot f'_x(M_0) + k \cdot f'_y(M_0) + \ell \cdot f'_z(M_0) + h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2 + \ell \cdot \varepsilon_3, \quad (1)$$

ὅπου τοῦ $M \rightarrow M_0$ τὰ $(h, k, \ell) \rightarrow (0, 0, 0)$ καθὼς καὶ τὰ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \rightarrow (0, 0, 0)$.

Ὅρισομεν ἥδη τὴν συνάρτησιν:

$$\varepsilon(\|M - M_0\|) = \begin{cases} \frac{h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + \ell\varepsilon_3}{\|M - M_0\|}, & \text{ἂν } M \neq M_0 \\ 0 & \text{ἂν } M = M_0 \end{cases}$$

Λόγω τῆς ἰσοδυναμίας τῶν τριῶν norms ἐν \mathbb{R}^3 ἔχομεν:

$$\|M - M_0\| = \sup(|h|, |k|, |\ell|), \text{ συνεπῶς } \frac{|h|}{\|M - M_0\|} \leq 1, \frac{|k|}{\|M - M_0\|} \leq 1, \frac{|\ell|}{\|M - M_0\|} \leq 1.$$

Ὅθεν: $|\varepsilon(\|M - M_0\|)| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|$, ὅπερ ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς $\varepsilon(\|M - M_0\|)$ εἰς τὸ M_0 , ὁπότε $\varepsilon(\|M - M_0\|) \rightarrow 0$ τοῦ $M \rightarrow M_0$.

Ἐν τοῦ τρόπου ὁρισμοῦ τῆς $\varepsilon(\|M - M_0\|)$ καὶ τῆς (1) δύναμεθα νὰ γράψωμεν:

$$f(M) = f(M_0) + f'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + f'_z(M_0) \cdot (z - z_0) + \|M - M_0\| \cdot \varepsilon(\|M - M_0\|).$$

Ἡ τελευταία σχέση ἀποδεικνύει ὅτι ἡ συνάρτησις $f(M)$ εἶναι διαφορίσιμος εἰς τὴν θέσιν M_0 .

Ἐν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως προκύπτει ὅτι τὸ μεραλύτερον μέρος τῶν χρησιμοποιουμένων συναρτήσεων εἶναι διαφορίσιμοι (π.χ. πολυώνυμα, ἐυθετισταὶ συναρτήσεις κ.τ.λ.).

Μία συνάρτησις πληροῦσα τὰς ὑποθέσεις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως καλεῖται **κατὰ συνέχειαν διαφορίσιμος**.

Παρατήρησις: Εἶναι δυνατόν μία συνάρτησις νὰ εἶναι διαφορίσιμος εἰς ἓν σημεῖον καὶ αἱ μεριῶς παράγωγοι νὰ εἶναι εἰς αὐτὸ ἀσυνεχεῖς. Παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ συνάρτησις: $f(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ μὲ $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) = t^3 \sin t^{-1}$, $t \neq 0$.

§4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἐστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x, y)$, ἥτις ἐπιδέχεται εἰς τὸ σημεῖον $(\xi, \eta) \in \mathbb{C}R^2$ μεριῶς παραγώγους συνεχεῖς, δηλ. εἶναι διαφορίσιμος ἐν αὐτοῦ τοῦ σημείου. Τότε,

συμφώνως προς τον τύπον (2) της §2 θα έχουμε :

$f(x,y) - f(\xi,\eta) = h \cdot f'_x(\xi,\eta) + k \cdot f'_y(\xi,\eta) + h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2$, όπου $h = x - \xi$, $k = y - \eta$, και του $(x,y) \rightarrow (\xi,\eta)$ τότε $(h,k) \rightarrow (0,0)$ και συνεπώς το $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow (0,0)$.

Όρισμός III- 4-1. Η παράσταση $h \cdot f'_x(\xi,\eta) + k \cdot f'_y(\xi,\eta)$, ήτις εξαρτάται γραμμικώς ευθύων h και k καλείται **ολιγόν διαφοριούν της $f(x,y)$ εις τό σημείον (ξ,η) και συμβολίζεται ούτω.**

$$df(\xi,\eta) = f'_x(\xi,\eta) \cdot h + f'_y(\xi,\eta) \cdot k \quad (1)$$

Τα $h = x - \xi$, $k = y - \eta$ είναι αντίστοιχως τά διαφοριά των συναρτήσεων $\varphi(x,x) = x$, $\psi(y,y) = y$ ωρισμένων επί του \mathbb{R}^1 .

Πράγματι, $\varphi'_x(x,x) = 1$, $\varphi'_y(x,x) = 0$, $\psi'_x(y,y) = 0$, $\psi'_y(y,y) = 1$. και $d\varphi(x,x) = dx = 1 \cdot h + 0 \cdot k = h$, $d\psi(y,y) = dy = 0 \cdot h + 1 \cdot k = k$.

Όθεν η σχέση (1) γράφεται :

$$df(\xi,\eta) = f'_x(\xi,\eta) dx + f'_y(\xi,\eta) dy \quad (2)$$

Εις την τυχούσαν θέσιν (x,y) τό διαφοριούν της $f(x,y)$ γράφεται :

$$df(x,y) = f'_x(x,y) dx + f'_y(x,y) dy \quad (3)$$

Ευ του τύπου (3) προκύπτει ότι, τό διαφοριούν της $f(x,y)$ εις την γενικήν θέσιν (x,y) εἶναι συνάρτησις των x,y, dx, dy . Συνήθως όμως τὰς αὐτήσεις dx, dy τὰς θεωροῦμεν σταθεράς, ὅτε τό διαφοριούν εἶναι συνάρτησις των x,y .

Αἱ παραστάσεις $f'_x(\xi,\eta) dx$, $f'_y(\xi,\eta) dy$ καλοῦνται **μερικά διαφοριά** ὡς πρὸς x,y (ἀντιοίχως) εἰς τό σημείον (ξ,η) .

Γενικῶς διὰ τὴν διαφορίσιμον συνάρτησιν $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ τό διαφοριούν αὐτῆς εἰς τό σημείον (x_1, x_2, \dots, x_q) ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως :

$$df(x_1, x_2, \dots, x_q) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q \quad (4)$$

Ἡ παράστασις $d(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_q} dx_q$ καλεῖται **διαφοριός τελεστής** **1ης τάξεως** ἐφαρμοσόμενος ἐπὶ τῆς διαφορίσιμου συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ εἰς τό σημείον (x_1, x_2, \dots, x_q) .

Παράδειγμα 1^ο Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q) = \log(1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_q^2)$ ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ \mathbb{R}^q . Αὕτη ἔχει μερικὰς παραγώγους ἐπὶ τοῦ \mathbb{R}^q καὶ εἶναι : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_q^2}$, $i = 1, 2, \dots, q$.

Όθεν,

$$df = \sum_{i=1}^q \frac{2x_i dx_i}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_q^2}$$

25/. Διὰ τὸν μετασχηματισμόν: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ἀπὸ ὁρθογωνί-
σους εἰς πολίως συντεταγμένας εὐνόλως διαπιστοῦται ὅτι δά ἔχωμεν:

$$i) \quad dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta \quad ii) \quad dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

Ἐπειδὴ δέ δά εἶναι τότε: $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$ δά ἔχωμεν:

$$iii) \quad d\rho = \sin \theta dx + \cos \theta dy \quad iv) \quad d\theta = -\frac{\sin \theta}{\rho} dx + \frac{\cos \theta}{\rho} dy.$$

Θά εἶναι δέ καί:

$$v) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)_\theta = \cos \theta, \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_\rho = -\sin \theta, \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)_\theta = \sin \theta, \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)_\rho = \cos \theta$$

§5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

I. Περίπτωσης μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Πρόταση III-5-1. Ἐστώσαν αἱ συναρτήσεις $u(t)$, $v(t)$ ὁρισμέναι ἐπὶ τοῦ $I \subset \mathbb{R}$, ἔχου-
σαι παραγώγους συνεχεῖς ἐν αὐτοῦ καὶ ἡ συνάρτησις $f(u, v)$ ὁρισμένη ἐπὶ τοῦ $E \subset \mathbb{R}^2$ ἔ-
χουσα μεριμὰς παραγώγους συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ E . Τότε ἡ σύνθετος συνάρτησις:
 $F(t) = f(u(t), v(t))$ ἔχει παράγωγον συνεχῆ ἐπὶ τοῦ I δίδομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F'(t) = f'_u(u, v) u'(t) + f'_v(u, v) v'(t) \quad (1)$$

Γενικώς: Ἐάν $F(t) = f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_q(t))$, ὅπου ἡ f καὶ u_1, u_2, \dots, u_q πληροῦν τὰς ἀνω-
τέρω συνθήκας, τότε $F'(t) = f'_{u_1}(M) \cdot u'_1(t) + f'_{u_2}(M) \cdot u'_2(t) + \dots + f'_{u_q}(M) \cdot u'_q(t)$, ὅπου
 $M = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_q(t))$.

Ἀπόδειξις: Ἐστω διὰ $t = t_0$ εἶναι $u(t_0) = a$ καὶ $v(t_0) = b$.

Θεωροῦμεν τὴν τιμὴν $t = t_0 + \Delta t$ καὶ λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν $u(t)$, $v(t)$ δά ἔχωμεν:

$$u(t_0 + \Delta t) = u(t_0) + h = a + h$$

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + k = b + k$$

ὅπου τὰ $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ τοῦ $\Delta t \rightarrow 0$.

Εἶναι δέ,

$$F(t_0 + \Delta t) - F(t_0) = f(a + h, b + k) - f(a, b) = h \cdot f'_u(a, b) + k \cdot f'_v(a, b) + h \cdot \varepsilon_1 + k \cdot \varepsilon_2 \quad (1)$$

1) Οἱ ὑπὸ δέξιναι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σημαίνουν ὅτι, ἀδεται αἱ μεταβληταὶ κατὰ τὴν παραγωγίαν
παρμένονιν σταθεραί.

$$\text{υαί } \frac{F(t_0+\Delta t)-F(t_0)}{\Delta t} = \frac{h}{\Delta t} \cdot f'_u(a,b) + \frac{k}{\Delta t} \cdot f'_v(a,b) + \frac{h}{\Delta t} \cdot \varepsilon_1 + \frac{k}{\Delta t} \cdot \varepsilon_2 \quad (2)$$

όπου τὰ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \longrightarrow (0,0)$ του $\Delta t \longrightarrow 0$.

Θά ἔχωμεν ἐπὶ πλέον:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t_0+\Delta t)-u(t_0)}{\Delta t} = u'_+(t_0).$$

$$\text{υαί } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{k}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t} = v'_+(t_0)$$

Ὅθεν του $t \rightarrow t_0$ τὸ ὅριον του δεξιού μέλους τῆς (2) ὑπάρχει υαί εἶναι ἴσον πρὸς $f'_u(A) \cdot u'(t_0) + f'_v(A) \cdot v'(t_0)$, όπου $A = (a,b)$.

Συνεπῶς θά ὑπάρχη υαί τὸ ὅριον του πρώτου μέλους τῆς (2) υαί θά ἰσχύη διὰ υάθε $t \in I$:

$$F'(t) = f'_u(M) \cdot u'(t) + f'_v(M) \cdot v'(t), \text{ όπου } M = (u(t), v(t)).$$

$$\text{ἢ } F'(t) = f'_u(u,v) \cdot u'(t) + f'_v(u,v) \cdot v'(t).$$

Παρατήρησις: Ὁ ἀνωτέρω υανών παραγωγιῶς μιᾶς συνθέτου συναρτήσεως περιέχει ὡς μερϊαὺς περιπτώσεις τούς υανόνας παραγωγιῶς, οἵτινες δίδουν τὴν παράγωγον ἑνός ἀδροίσματος, γινομένου ἢ πηλίμου συναρτήσεως.

π.χ. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(u,v,w) = u \cdot v \cdot w$, όπου αἱ u, v, w εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς t . Εἶναι $f'_u = v \cdot w$, $f'_v = u \cdot w$, $f'_w = u \cdot v$.

Ὅθεν βάσει του ἀνωτέρω τύπου ἔχομεν:

$$(u \cdot v \cdot w)'_t = v \cdot w \cdot u'_t + u \cdot w \cdot v'_t + u \cdot v \cdot w'_t.$$

Ἐφαρμογαί: 1^η) Ἐστω $f(u,v) = u^v$, όπου αἱ u, v εἶναι συναρτήσεις του t υαί $u(t) > 0$.

$$\text{Εἶναι } f'_u = v \cdot u^{v-1}, \quad f'_v = u^v \cdot \log u.$$

Ὅθεν, βάσει του ἀνωτέρω τύπου, ἔχομεν: $(u^v)'_t = u'_t \cdot v \cdot u^{v-1} + u'_t \cdot u^v \cdot \log u$.

2^η) Μία συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ υαλεῖται ὁμογενῆς K -τάξεως, ἐάν ἰσχύη ἡ σχέσηις:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_q) = t^K f(x_1, x_2, \dots, x_q) \text{ διὰ } t \in \mathbb{R}: \text{ παραγωγιῶντες ὡς}$$

πρὸς t τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν υαί θέτοντες $t=1$ λαμβάνομεν τὴν σχέσηιν:

$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots + x_q f'_{x_q} = K \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_q)$, ἥτις υαλεῖται σχέσις του Euler χαρακτηρίζουσα τὰς ὁμογενεῖς συναρτήσεις τάξεως K .

II. Περίπτωσης περισσότερων ανεξαρτήτων μεταβλητών:

Έστω η συνάρτησις $f(u, v, w)$, όπου τά u, v, w είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών x και y , ήτοι: $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, $w = \sigma(x, y)$.

Ούτω επιτυγχάνεται μια σύνθετος συνάρτησις των μεταβλητών x, y ήτοι:

$$F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y), \sigma(x, y)).$$

Άρκει νά φαντασθώμεν διαδοχικῶς ὅτι τό y καί ἔπειτα τό x ἔχουν σταθεράς τιμῆς διὰ νά ἐπιτύχωμεν: $F'_x(x, y) = f'_u(u, v, w) \cdot \varphi'_x(x, y) + f'_v(u, v, w) \cdot \psi'_x(x, y) + f'_w(u, v, w) \cdot \sigma'_x(x, y)$ (2)

Ὀμοίως: $F'_y(x, y) = f'_u(u, v, w) \cdot \varphi'_y(x, y) + f'_v(u, v, w) \cdot \psi'_y(x, y) + f'_w(u, v, w) \cdot \sigma'_y(x, y)$ (2')

Διαφορίων τῆς συνθέτου συναρτήσεως:

I. Διὰ τὴν περίπτωσιν μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἔχομεν βάσει τοῦ τύπου (1)

$$df(u(t), v(t)) = dF(t) = F'(t)dt = \{f'_u(u, v) u'(t) + f'_v(u, v) v'(t)\} dt = f'_u(u, v) \cdot u'(t) dt + f'_v(u, v) v'(t) dt$$
$$\text{ἢ } df(u(t), v(t)) = f'_u(u, v) \cdot du + f'_v(u, v) dv \quad (3)$$

II. Διὰ τὴν περίπτωσιν περισσότερων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν π.χ. ὡς διὰ τὴν συνάρτησιν $f(u, v, w)$, ὅπου $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, $w = \sigma(x, y)$, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (2) καί (2') ἔχομεν:

$$\begin{aligned} df(u, v, w) &= df(\varphi(x, y), \psi(x, y), \sigma(x, y)) = dF(x, y) = F'_x(x, y) dx + F'_y(x, y) dy \\ &= \{f'_u(u, v, w) \cdot \varphi'_x(x, y) + f'_v(u, v, w) \cdot \psi'_x(x, y) + f'_w(u, v, w) \cdot \sigma'_x(x, y)\} dx \\ &\quad + \{f'_u(u, v, w) \cdot \varphi'_y(x, y) + f'_v(u, v, w) \cdot \psi'_y(x, y) + f'_w(u, v, w) \cdot \sigma'_y(x, y)\} dy \\ &= f'_u(u, v, w) (\varphi'_x dx + \varphi'_y dy) + f'_v(u, v, w) (\psi'_x dx + \psi'_y dy) + f'_w(u, v, w) (\sigma'_x dx + \sigma'_y dy) \\ &= f'_u(u, v, w) du + f'_v(u, v, w) dv + f'_w(u, v, w) dw. \end{aligned}$$

Ὅθεν:

$$df(u, v, w) = f'_u(u, v, w) du + f'_v(u, v, w) dv + f'_w(u, v, w) dw \quad (4)$$

• Ἀναλλοίωτον τοῦ ὁλίου Διαφορίου

Ἦχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν ὁρισμὸν ὁλίου διαφορίου συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν βλ. § 4 τύπους (3) καί (4) καί τοὺς τύπους (3) καί (4) τῆς παρούσης παραγράφου παρατηροῦμεν ὅτι: Τὸ ὅλιον διαφορίων (συντόμως: τὸ πρῶτον διαφορίων) ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν μορφήν, εἴτε αἱ μεταβληταὶ εἶναι ἀνεξάρτητοι εἴτε συναρτήσεις ἄλλων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Ἐφαρμογαὶ τῶν τύπων (3) ἢ (4)

Ἦστωσαν u καί v δύο συναρτήσεις μὴς ἢ περισσότερων μεταβλητῶν, ἔχουσα μερι-

υάς παραγώγους 1^{ης} τάξεως συνεχείς. Δι' εφαρμογής του τύπου (3) ή (4) εύκολως διαπιστούμεν ότι:

$$1^{\circ}) \quad d(u \cdot v) = u dv + v du$$

$$2^{\circ}) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, \text{ με } v \neq 0$$

$$3^{\circ}) \quad \begin{cases} d(u+v) = du + dv \\ d(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot du, \lambda \text{ σταθερά} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

- 1^η) Έν τῶν ἀνωτέρω τύπων διαπιστοῦμεν ὅτι, σὺνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τό διαφοριόν μιᾶς συναρτήσεως κατὰ ἓναν ἀνάλογον τρόπον, ὅπως καί τὰς παραγώγους αὐτῶν.
- 2^η) Παρατηροῦμεν ἐξ ἄλλου ἐν τῶν ἀνωτέρω τύπων ὅτι, ἐάν τὰ u καί v εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μόνον μεταβλητῆς x , οἱ ἀνωτέρω τύποι μᾶς δίδουν πάλιν, ἐάν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ dx , τοὺς κλασσιμῶς τύπους ὑπολογισμοῦ τῶν παραγώγων.
- 3^η) Οἱ τύποι (3) ἢ (4) μᾶς ἐπιτρέπουν νά γράψωμεν πολλοὺς ἄλλους τύπους δίδοντες τὰ διαφορικά διαφορῶν συναρτήσεων. Π.χ. Ἐστω u μία συνάρτησις μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν, ὑποθέτοντες ὅτι αὕτη ἔχει μεριᾶς παραγώγους συνεχείς.

Τότε:

$$d(u^a) = a \cdot u^{a-1} \cdot du, \quad d(e^u) = e^u \cdot du$$

$$d(\sin u) = \cos u \cdot du, \quad d(\eta \mu u) = \eta \cos u \cdot du \quad \text{u. t. l.}$$

§ 6. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ἐστω $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$ μία πραγματικὴ συνάρτησις ὠρισμένη εἰς ἓν ἀνοιγτὸν σύνολον U τοῦ \mathbb{R}^3 :

ὑποθέτομεν ὅτι αἱ f'_x, f'_y, f'_z εἶναι ὠρισμέναι ἐντὸς τοῦ U . Ἐάν ἡ συνάρτησις $f'_x(x, y, z)$ ἐπιδέχεται μεριᾶς παραγώγους $(f'_x)_x, (f'_x)_y, (f'_x)_z$, αὗται καλοῦνται **μεριμαί παράγωγοι δευτέρας τάξεως** καὶ συμβολίζονται οὕτω: $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{xz}$.

(τὰ σύμβολα x^2, xy, xz δὲν παριστοῦν οὐδόπως γινόμενα).

ὁμοίως αἱ μεριμαί παράγωγοι τῶν f'_y, f'_z , ἐάν ὑπάρχουν, συμβολίζονται οὕτω:

$$f''_{yx}, f''_{yy}, f''_{yz}, f''_{zx}, f''_{zy}, f''_{zz}$$

συνήθως χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸν συμβολισμόν:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτησις $f(x,y) = x^y$ ($x > 0$)

Είναι $f'_x = y \cdot x^{y-1}$, $f'_y = x^y \cdot \log x$ και

$$f''_{xx} = y(y-1) \cdot x^{y-2}$$

$$f''_{yx} = yx^{y-1} \log x + x^{y-1} \frac{1}{x}$$

$$f''_{xy} = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \log x$$

$$f''_{yy} = x^y (\log x)^2$$

Παρατηρούμεν ότι $f''_{xy} = f''_{yx}$. Έξ αὐτοῦ δὲ ἴδωμεν ὅτι προέκυψε περί μιᾶς γενικῆς ιδιότητος τῶν μερικῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων.

Πρότασις III-6-1. Έστω $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ μία συνάρτησις ὠρισμένη εἰς ἓνα ἄνωγτό σύνολον A τοῦ \mathbb{R}^2 καὶ ἔστω ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ μὲ f''_{xy}, f''_{yx} συνεχεῖς εἰς τὸ A . Τότε ἰσχύει $f''_{xy} = f''_{yx}$ (Θεώρημα τοῦ Schwartz).

Ἀπόδειξις: Έστω $(x_0, y_0) \in A$. Θεωροῦμεν τοιαύτας τιμὰς τῶν x, y ἀρκετὰ πλησίον τῶν x_0, y_0 ὥστε τὸ δεῦρος $(x, y) \in A$.

Θέτομεν:

$$u = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0) \quad (1)$$

$$F(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \quad (2)$$

$$G(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \quad (3)$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$u = F(x_0 + h) - F(x_0) \quad (4)$$

καὶ ἐπίσης:

$$u = G(y_0 + k) - G(y_0). \quad (5)$$

Ἡ συνάρτησις $F(x)$ εἶναι παραγωρίσιμος εἰς τὸ διάστημα $[x_0, x_0 + h]$, ἑπομένως δὲ ἔχωμεν:

$$F'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0) \quad (6)$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς εἰς τὴν συνάρτησιν $u = F(x_0 + h) - F(x_0)$ λαμβάνομεν:

$$u = h \cdot F'(\alpha_0 + \theta \cdot h), \text{ ὅπου } 0 < \theta < 1 \quad (7)$$

Ἡ (7), ὁρῶν τῆς (6), γίνεταί:

$$u = h \cdot [f'_x(\alpha_0 + \theta \cdot h, y_0 + k) - f'_x(\alpha_0 + \theta \cdot h, y_0)] \quad (8)$$

Ἡ συνάρτησις $y \rightarrow f'_x(\alpha_0 + \theta \cdot h, y)$ εἶναι παραγωρίσιμος καὶ τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος,

ὡς πρὸς y , εἶναι $f''_{xy}(x_0 + \theta h, y)$. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν:

$$f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0) = k \cdot f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) \quad \text{ὅπου } 0 < \theta_1 < 1.$$

Ἡ σχέσηις λοιπὸν (8) γράφεται:

$$u = h \cdot k \cdot f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) \quad (9)$$

Δι' ἀναλόγου συλλογισμοῦ μεταξύ τῶν (3) καὶ (5) λαμβάνομεν:

$$u = k \cdot G'(y_0 + \theta_2 k) = k [f'_y(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 k)] = k \cdot h \cdot f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_2 k) \quad (10)$$

ὅπου $0 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta_3 < 1$.

Ἐάν $h \neq 0$ καὶ $k \neq 0$ ἐκ τῶν (9) καὶ (10) λαμβάνομεν:

$$f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_2 k) \quad (11)$$

Ὅταν τὰ $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, καὶ ἡ ὑπόθεσις ὅτι αἱ f''_{xy} , f''_{yx} εἶναι συνεχεῖς συνεπάγεται ὅτι τὰ δύο μέλη τῆς (11) τείνουν ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $f''_{xy}(x_0, y_0)$ καὶ $f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Συνεπῶς $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Γενίμευσις: Ἐστω $(x_1, x_2, \dots, x_p) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ μία συνάρτησις ὠρισμένη καὶ ἐπιδεχομένη μεριμὰς παραγώρους πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως συνεχεῖς εἰς ἓνα ἀνοιχτὸν ὑπερδιάστημα τοῦ \mathbb{R}^p , τότε:

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}$$

Πράγματι, ἐάν π.χ. $i=1$ καὶ $j=2$, αὐταὶ αἱ παραγώγοι ἐπιτυγχάνονται παραγρηγνίζοντες τὴν συνάρτησιν $(x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2, x_3^*, x_4^*, \dots, x_p^*)$.

Οὕτω ἀνέχθημεν εἰς τὴν περίπτωσιν συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν.

ὁρισμός III-6-1. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ $I \subset \mathbb{R}^2$ ἔχουσα μεριμὰς παραγώρους, μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχεῖς. Καλοῦμεν διαφορικὸν δευτέρας τάξεως τῆς $f(x, y)$ καὶ τὸ συμβολίζομεν οὕτω $d^2 f(x, y)$, τὸ διαφορικὸν τῆς $df(x, y)$.

Εἶναι, $d^2 f(x, y) = d(df(x, y))$

$$= d(f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy)$$

$$= (d f'_x(x, y)) dx + (d f'_y(x, y)) dy$$

$$= (f''_{xx}(x, y) dx + f''_{xy}(x, y) dy) dx + (f''_{yx}(x, y) dx + f''_{yy}(x, y) dy) dy$$

(ἐπεὶδὴ $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$). Ὅθεν:

$$d^2 f(x, y) = f''_{xx}(x, y) dx^2 + 2 f''_{xy}(x, y) dx dy + f''_{yy}(x, y) dy^2$$

Ἡ τελευταία ἔκφρασις γράφεται συντόμως καὶ οὕτω:

$$(f_x dx + f_y dy)^{(2)} \text{ ἢ } \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(2)}$$

Παράδειγμα: Νὰ εὕρεθῇ τὸ $d^2 f(x, y)$, ἔνθα $f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + a^2 y^2)$.

Λύσις: Εἶναι: $f_x = \frac{x}{x^2 + a^2 y^2}$, $f_y = \frac{a^2 y}{x^2 + a^2 y^2}$

$$f_{xx}'' = \frac{a^2 y^2 - x^2}{(x^2 + a^2 y^2)^2}, \quad f_{xy}'' = \frac{-2a^2 xy}{(x^2 + a^2 y^2)^2}$$

$$f_{yx}'' = \frac{-2a^2 xy}{(x^2 + a^2 y^2)^2}, \quad f_{yy}'' = \frac{a^2(x^2 - a^2 y^2)}{(x^2 + a^2 y^2)^2}.$$

$$\text{Ὅθεν, } d^2 f(x, y) = \frac{a^2 y^2 - x^2}{(x^2 + a^2 y^2)^2} dx^2 + \frac{-4a^2 xy}{(x^2 + a^2 y^2)^2} dx dy + \frac{a^2(x^2 - a^2 y^2)}{(x^2 + a^2 y^2)^2} dy^2$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, $f_{xy}''(x, y) = f_{yx}''(x, y)$.

§ 7. ΜΕΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ἐπαγωγικῶς δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὰς μεριὰς παραγώγους 3^{ης}, 4^{ης}, π^{ης} τάξεως π.χ. Ἐστω ἡ συνάρτησις $(x, y) \longrightarrow f(x, y)$ ὡρισμένη εἰς ἓν ἀνοιχτὸν ὑποσύνολον τοῦ \mathbb{R}^2 .

ὑποθέτομεν ὅτι ἡ f ἐπιδέχεται μεριὰς παραγώγους συνεχεῖς μέχρι 3^{ης} τάξεως.

Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀποτελέσματα τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν:

$$f_{x^2 y}''' = (f_x')_{xy}'' = (f_x')_{yx}'' = f_{xyx}''' = (f_{xy}')_x' = (f_{yx}')_x' = f_{yxx}''' = f_{yxx}'''.$$

$$\text{Ὡστε, } f_{x^2 y}''' = f_{xyx}''' = f_{yxx}'''.$$

$$\text{Ὁμοίως, } f_{xy^2}''' = f_{yx^2}''' = f_{y^2 x}'''.$$

Ἐάν λοιπὸν ἔχωμεν μεριὰς παραγώγους μέχρι 3^{ης} τάξεως τῆς συναρτήσεως $f(x, y)$, δὲν ἔχομεν παρά νὰ θεωρήσωμεν τὰς κατωθι:

$$f_{x^3}''', f_{x^2 y}''', f_{xy^2}''', f_{y^3}'''$$

Αἱ ἀνωτέρω μεριῖαι παράγωγοι συμβολίζονται καὶ οὕτω:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Αἱ μεριῖαι παράγωγοι π^{της} τάξεως τῆς συναρτήσεως $f(x, y)$ θὰ εἶναι, ἐὰν αὗται εἶναι συνεχεῖς, αἱ κατωθι:

$$f_{x^n}^{(n)}, f_{x^{n-1}y}^{(n)}, f_{x^{n-2}y^2}^{(n)}, \dots, f_{y^n}^{(n)}$$

Ο αντίστοιχος συμβολισμός αυτών θα είναι ο κάτωθι :

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}, \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν τῆς συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ἡ μερικὴ παράγωγος ἡ πλέον γενικὴ δὲ εἶναι :

$$f_{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \dots \partial x_p^{n_p}} \quad \text{ὅπου } n = (n_1 + n_2 + \dots + n_p)$$

ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ μερικαὶ παράγωγοι μέχρι τῆς τάξεως $n_1 + n_2 + \dots + n_p$ εἶναι συνεχεῖς.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ ἔχῃ μερικὰς παραγώγους μέχρι k -τάξεως συνεχεῖς, τότε τὸ διαφορικὸν k -τάξεως τῆς $f(x, y)$ συμβολίζομεν οὕτω $d^k f(x, y)$ ὁρίζεται δὲ τῇ βοήθεια τοῦ ἀναδρομικοῦ τύπου :

$$d^k f(x, y) = d(d^{k-1} f(x, y)), \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Ἐπαγωγικῶς λοιπὸν εὐρίσκομεν :

$$d^k f = f_{xx} dx^k + k f_{xy} dx^{k-1} dy + \frac{k(k-1)}{2!} f_{xy^2} dx^{k-2} dy^2 + \dots + k f_{yx^{k-1}} dx dy^{k-1} + f_{yy^k} dy^k.$$

$$(\text{ἢ συμβολικῶς}) = (f_x dx + f_y dy)^{(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(k)}.$$

Ἡ παράστασις $\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(k)}$ $k = 1, 2, 3, \dots$, καλεῖται διαφορικὸς τελεστής k -τάξεως ἐφαρμοζόμενος ἐπὶ τῆς μέχρι k -τάξεως διαφορισίμου συναρτήσεως $f(x, y)$.

§8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

I. Ἐστω ἡ συνάρτησις $f(x, y)$, ἥτις ἐπιδέχεται μερικὰς παραγώγους συνεχεῖς μέχρι p -τάξεως ἐντὸς ἐνὸς ανοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ \mathbb{R}^2 . Ἐστώσαν ἐπὶ πλέον αἱ συναρτήσεις: $x = u(t)$, $y = v(t)$ ἐπιδεχόμεναι συνεχεῖς παραγώγους μέχρι p -τάξεως εἰς ἓνα διάστημα τῆς \mathbb{R} . Τότε ἡ συνάρτησις $F(t) = f(u(t), v(t))$ ἐπιδέχεται εἰς αὐτὸ τὸ διάστημα παραγώγους μέχρι p -τάξεως, αὗτινες ὑπολογίζονται δι' ἐφαρμογῆς τῆς προτάσεως III-5-1. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν :

$$F'(t) = f'_u(u(t), v(t)) \cdot u'(t) + f'_v(u(t), v(t)) \cdot v'(t)$$

$$F''(t) = f''_{uu}(u(t), v(t)) \cdot u'^2(t) + 2 f''_{uv}(u(t), v(t)) \cdot u'(t) \cdot v'(t) +$$

$$+ f''_{vv}(u(t), v(t)) \cdot v'^2(t) + f'_u(u(t), v(t)) u''(t) + f'_v(u(t), v(t)) v''(t)$$

Τό διαφοριμόν δευτέρας τάξεως τῆς $F(t)$ υπολογίζεται ὡς ἀπολοιδώσις :

$$\begin{aligned} d^2 F(t) &= F''(t) dt^2 = f''_{uu}(u(t), v(t)) (u'(t) dt)^2 + \\ &+ 2 f''_{uv}(u(t), v(t)) (u'(t) dt) \cdot (v'(t) dt) + f''_{vv}(u(t), v(t)) (v'(t) dt)^2 + \\ &+ f'_{ux}(u(t), v(t)) (u''(t) dt^2) + f'_{vx}(u(t), v(t)) (v''(t) dt^2) \\ &= f''_{uu}(u(t), v(t)) du^2(t) + 2 f''_{uv}(u(t), v(t)) du(t) \cdot dv(t) + \\ &+ f''_{vv}(u(t), v(t)) dv^2(t) + f'_{ux}(u(t), v(t)) d^2 u(t) + f'_{vx}(u(t), v(t)) d^2 v(t). \end{aligned}$$

Διατυπούμεν καί ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν βασικήν πρότασιν.

Πρότασις III - 8-1. (Θεώρημα Μέσης Τιμῆς διὰ συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν). Ἐάν $f(x, y)$ εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις δύο μεταβλητῶν εἰς μίαν ὁλίστην περιοχὴν καί ἔάν αἱ πρώται μεριμαὶ παράγωγοι ὑπάρχουν εἰς τὴν ὁλίστην περιοχὴν, τότε ἰσχύει ὁ τύπος :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \cdot f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k \cdot f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad \text{ὅπου } 0 < \theta < 1.$$

Ἀπόδειξις: Θετομεν $F(t) = f(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k)$, ὅπου $0 \leq t \leq 1$.

Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα Μέσης τιμῆς διὰ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς ἔχομεν :

$$F(1) - F(0) = F'(\theta), \quad \text{ὅπου } 0 < \theta < 1 \quad (1)$$

Ἐάν θέσωμεν $x = x_0 + t \cdot h$, $y = y_0 + t \cdot k$, τότε $F(t) = f(x, y)$ ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$F'(t) = f_x \cdot \frac{dx}{dt} + f_y \cdot \frac{dy}{dt} = h \cdot f_x + k \cdot f_y$$

καί $F'(\theta) = h \cdot f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k \cdot f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ ὅπου $0 < \theta < 1$.

Τότε ἡ (1) γράφεται :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \cdot f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k \cdot f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad \text{ὅπου } 0 < \theta < 1.$$

II. Ἐστω ὅτι αἱ συναρτήσεις $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ἔχουν μεριμαὶ παραγώγους συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ ὁλίστου ὑποσυνόλου $W \subset \mathbb{R}^2$ μέχρι δευτέρας τάξεως. Ἐστω ἐπὶ πλεόν ἡ συνάρτησις $f(u, v)$, ἥτις ἔχει μεριμαὶ παραγώγους συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ $0 \subset \mathbb{R}^2$ μέχρι δευτέρας τάξεως.

Τότε διὰ τὴν συνάρτησιν $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ ἔχομεν :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Αναλόγως εϋρίσκουμεν:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

και

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Διά τὰ διαφοριυά πρώτης και δευτέρας τάξεως ἔχομεν ἀντιστοιχως:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

Ὄποτε:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (1)$$

Διά δέ τὸ διαφοριυόν δευτέρας τάξεως ἔχομεν:

$$d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \quad (2)$$

Ἀντιαδιστώντες εἰς τὴν (2) τὰς $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ διά τῶν ἴσων των και ἔχοντες ὑπὸ φην ὅτι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du, \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = dv,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 = d^2 u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy^2 = d^2 v.$$

εϋρίσκουμεν:

$$d^2 F = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} d^2 v \quad (3)$$

Ἐφαρμογή. Ἐστω ἡ συνάρτησις $z = f(x,y)$ διά τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μεριυαὶ παράγωγοι μέχρι δευτέρας τάξεως εἶναι δέ και συνεχεῖς. Ἐυτε λου-
μεν ἀλλοαγὴν τῶν μεταβλητῶν εἰσάγοντες πολυιδάς συντεταγμένους ἥτοι:

$$x = \rho \sigmaυν\theta, \quad y = \rho \eta\mu\theta, \quad \rho > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \text{ὅτε δά εἶναι}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{τοξ}\sigmaυν \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \text{τοξ}\eta\mu \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ἡ δέ συνάρτησις γράφεται:

$$z = f(x,y) = f(\rho \sigmaυν\theta, \rho \eta\mu\theta) = F(\rho, \theta).$$

Ζητοῦμεν νά υπολογίσωμεν τὰς μεριυαὶς παραγῶγους $z_x, z_y, z_{x^2}, z_{x^3}, z_{y^2}$ συν-
αρτήσει τῶν ρ και θ .

Λύσις: Δι' εφαρμογής του κανών παραγωγίσεως συνθέτων συναρτήσεων ἔχομεν:

$$z_x = z_p \cdot p_x + z_\theta \cdot \theta_x = z_p \cdot \frac{x}{p} - z_\theta \cdot \frac{y}{p^2} = z_p \sin \theta - z_\theta \cdot \frac{\eta \mu \theta}{p} \quad (1)$$

$$z_y = z_p \cdot p_y + z_\theta \cdot \theta_y = z_p \cdot \frac{y}{p} + z_\theta \cdot \frac{x}{p^2} = z_p \eta \mu \theta + z_\theta \cdot \frac{\sigma \nu \theta}{p} \quad (2)$$

Παρατηρούμεν ὅτι: $z_x^2 + z_y^2 = z_p^2 + \frac{1}{p^2} \cdot z_\theta^2 \quad (3)$

Ἡ σχέση (3) χρησιμοποιεῖται συχνά. Διὰ τὰς παραγωγὰς β' τάξεως ἔχομεν:

$$\begin{aligned} z_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (z_x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(z_p \sin \theta - z_\theta \frac{\eta \mu \theta}{p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(z_p \sin \theta - z_\theta \frac{\eta \mu \theta}{p} \right) \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(z_p \sin \theta - z_\theta \frac{\eta \mu \theta}{p} \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \left(z_{p^2} \sin \theta - z_{\theta p} \cdot \frac{\eta \mu \theta}{p} + z_\theta \frac{\eta \mu \theta}{p^2} \right) \sin \theta + \\ &+ \left(z_{p\theta} \sin \theta - z_p \eta \mu \theta - z_{\theta^2} \cdot \frac{\eta \mu \theta}{p} - z_\theta \frac{\sigma \nu \theta}{p} \right) \left(-\frac{\eta \mu \theta}{p} \right) \end{aligned}$$

Ἐπετελοῦντες τὰς πράξεις εὐρίσκουμεν:

$$z_{x^2} = z_{p^2} \sin^2 \theta + z_{\theta^2} \frac{\eta \mu^2 \theta}{p^2} - 2 z_{p\theta} \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{p} + z_p \frac{\eta \mu^2 \theta}{p} + 2 z_\theta \cdot \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{p^2} \quad (4)$$

Ὀμοίως: $z_{xy} = z_{p^2} \sigma \nu \theta \eta \mu \theta - z_{\theta^2} \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{p^2} + z_{p\theta} \frac{\sigma \nu^2 \theta - \eta \mu^2 \theta}{p} + z_\theta \frac{\eta \mu^2 \theta - \sigma \nu^2 \theta}{p^2} - z_p \frac{\eta \mu \theta \sigma \nu \theta}{p} \quad (5)$

Ὀμοίως: $z_{y^2} = z_{p^2} \eta \mu^2 \theta + z_{\theta^2} \frac{\sigma \nu^2 \theta}{p^2} + 2 z_{p\theta} \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{p} + z_p \frac{\sigma \nu^2 \theta}{p} - 2 z_\theta \frac{\sigma \nu \theta \eta \mu \theta}{p^2} \quad (6)$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) ἔχομεν: $\Delta Z = z_{x^2} + z_{y^2} = z_{p^2} + z_{\theta^2} \cdot \frac{1}{p^2} + z_p \cdot \frac{1}{p} \quad (7)$

Ἡ συνάρτησις Z πού πληροῖ τὴν διαφ. ἑξίσωσιν $z_{x^2} + z_{y^2} = 0 \quad (7)$ λέγεται ἁρμονικὴ συνάρτησις. Συνήθως ἡ (7) γράφεται εἰς πολὺν συντεταγμέναν ὑπὸ τὴν κατωθι εὐχρηστον μορφήν:

$$\Delta Z = z_{x^2} + z_{y^2} = z_{p^2} + z_{\theta^2} \cdot \frac{1}{p^2} + z_p \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} \left\{ p \frac{\partial}{\partial p} \left(p \frac{\partial Z}{\partial p} \right) + \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} \right\} \quad (8)$$

§9. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR ΔΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἐστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x, y)$ ὁρισμένη ἐπὶ μιᾷ κλειστῆς περιοχῆς U τοῦ \mathbb{R}^2

καὶ ἐπιδεχομένη μερικῶς παραγώγους συνεχεῖς μέχρι τῆς τάξεως $p+1$.

Ἐστω ὅτι τὸ σημεῖον $(x_0, y_0) \in U$. Ἐστώσαν αἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ h, k τοιοῦτοι, ὥστε τὸ τμήμα μὲ ἄκρα τὰ σημεία (x_0, y_0) καὶ $(x_0 + h, y_0 + k)$, δηλ. τὸ σύνολον τῶν σημείων $(x_0 + t \cdot h, y_0 + t \cdot k)$, ὅπου $0 \leq t \leq 1$, νὰ εἴται ἐντὸς τοῦ U . Τότε δὲ ἔχομεν:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + h \cdot f_x(x_0, y_0) + k \cdot f_y(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{h^2}{2!} f_{xx}(x_0, y_0) + \frac{h}{1!} \cdot \frac{k}{1!} f_{xy}(x_0, y_0) + \frac{k^2}{2!} f_{yy}(x_0, y_0) \\ &+ \frac{h^3}{3!} f_{xxx}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{k}{1!} f_{x^2y}(x_0, y_0) + \frac{h}{1!} \cdot \frac{k^2}{2!} f_{xy^2}(x_0, y_0) + \frac{k^3}{3!} f_{yyy}(x_0, y_0) \\ &+ \dots \\ &+ \sum_{m+n=p} \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{k^n}{n!} f_{x^m y^n}^{(p)}(x_0, y_0) \\ &+ \sum_{m+n=p+1} \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{k^n}{n!} f_{x^m y^n}^{(p+1)}(x_0 + \theta \cdot h, y_0 + \theta \cdot k), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ὅπου $0 < \theta < 1$.

Ἀπόδειξις: θέτομεν $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$, διὰ $0 \leq t \leq 1$.

Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ Taylor διὰ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς ἔχομεν:

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{F''(0) \cdot t^2}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0) \cdot t^n}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta) \cdot t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1, \text{ καὶ ἂν } t=1,$$

ἔχομεν:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Ἀλλὰ (βλ. ἀπόδειξιν προτάσεως III - 8-1):

$$F'(0) = h \cdot f_x(x_0, y_0) + k \cdot f_y(x_0, y_0)$$

καὶ
$$F''(t) = \frac{d}{dt} F'(t) = \frac{d}{dt} (h \cdot f_x + k \cdot f_y) = h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}$$

καὶ ἑπομένως, λόγῳ τῆς συνεχείας τῶν μερικῶν παραγώγων, ἔχομεν:

$$F''(0) = h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0).$$

Ἐπρασόμενοι καὶ ὅμοιον τρόπον ἑπαγωγικῶς εὐρίσκουμεν ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος:

$$F^{(q)}(0) = \sum_{m+n=q} q! \cdot \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{k^n}{n!} \cdot f_{x^m y^n}^{(q)}(x_0, y_0), \text{ ὅπου } 1 \leq q \leq p \text{ καὶ}$$

$$F^{(n+1)}(\theta) = \sum_{m+n=n+1} (n+1)! \cdot \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{k^n}{n!} \cdot f_{x^m y^n}^{(n+1)}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \text{ ὅπου } 0 < \theta < 1.$$

- Ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) θέσωμεν ἀντὶ $x_0 + h$ τὸ x καὶ ἀντὶ τοῦ $y_0 + k$ τὸ y , ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + (x-x_0) f_x(x_0, y_0) + (y-y_0) f_y(x_0, y_0) + \\ & + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f_{xx}(x_0, y_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \cdot \frac{(y-y_0)}{1!} f_{xy}(x_0, y_0) + \frac{(y-y_0)^2}{2!} f_{yy}(x_0, y_0) \\ & + \dots \\ & + \sum_{m+n=p+1} \frac{(x-x_0)^m}{m!} \cdot \frac{(y-y_0)^n}{n!} f_{x^m y^n}^{(p+1)}(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0)), \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

κατὰ ἓνα ἀνάλογο τρόπον ἀποδεικνύομεν τὸν τύπον τοῦ Taylor διὰ συναρτήσεις τριῶν, τεσσάρων κ.τ.λ. μεταβλητῶν.

- Ὁ τύπος (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\left. \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = & f(x_0, y_0) + \{h \cdot f_x(x_0, y_0) + k \cdot f_y(x_0, y_0)\} + \\ & + \frac{1}{2!} \{h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)\} + \\ & + \dots \\ & + \frac{1}{n!} \{h^n f_{x^n}(x_0, y_0) + \binom{n}{1} h^{n-1} k f_{x^{n-1}y}(x_0, y_0) + \dots + k^n f_{y^n}(x_0, y_0)\} + R_n \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

ὅπου R_n συμβολίζει τὸν ὑπόλοιπο. ὅρο:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \{ h \cdot f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k \cdot f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \}^{(n+1)} \text{ με } 0 < \theta < 1.$$

Έχοντας τώρα υπό όπιν τους όρισμούς III-4-1, III-6-1 και τους συμβολισμούς της §7 του παρόντος μεθαλαίου διαπιστοῦμεν ὅτι τὰ ὁμογενῆ πολυώνυμα με βάθ-
μόν 1, 2, 3, ..., n, n+1 ἀντιστάχως, τὸ ὁποῖα περιυλίζουν με ἔνωτιυάς γραμμὰς
(ἄγγιστρα) εἰς τὸ ἀνωτέρω ἀνάπτυγμα εἶναι ἀντιστοίχως τὸ πρῶτο, δεῦτερο, ... n-τά-
ξεως διαφοριού:

$$\left. \begin{aligned} df &= h f_x + k f_y \\ d^2 f &= (h f_x + k f_y)^{(2)} = h^2 f_{xx} + 2 h k f_{xy} + k^2 f_{yy} \\ &\dots\dots\dots \\ d^n f &= (h f_x + k f_y)^{(n)} = h^n f_{x^n} + \binom{n}{1} h^{n-1} k f_{x^{n-1}y} + \dots + k^n f_{y^n} \end{aligned} \right\} (2')$$

τῆς $f(x, y)$ εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) καὶ τὸ $(n+1)$ -τάξεως διαφοριού $d^{n+1}f$ εἰς ἕνα ἔν-
διάμεσον σημεῖον τῆς εὐθείας πού ἑνώνει τὰ σημεῖα (x_0, y_0) καὶ $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Ὅθεν ὁ τύπος (1') τοῦ Ταυθελον μπορεῖ νά γραφῇ πιό συνοπτιυά ὡς ἑξῆς:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + R_n \quad (3)$$

ὅπου:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \text{ με } 0 < \theta < 1$$

Παρατήρησις: Ἀπὸ τὸν τύπο (1') διὰ $n=1$ λαμβάνομεν τὸ θεώρημα III-8-1 μέσης τι-
μῆς διὰ συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν.

§10. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΝ

Ἐάν ἡ $f(x, t)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῶν x καὶ t εἰς τὸ ὀρθογώνιον χωρίον
 $a \leq x \leq \beta$, $\gamma \leq t \leq \delta$, δυνάμεθα κατ' ἀρχάς, νά λάβωμεν τὴν μεταβλητὴν x ὡς στα-
θεράν καὶ νά ὀλοκληρώσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(x, t)$ με μεταβλητὴν τὴν t καὶ οὖ-
τω καταλήγομεν εἰς τὴν ἑξέφρασιν: $F(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x, t) dt \quad (1)$

Θεώρημα III-10-1. Ἐάν ἡ $f(x, t)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ χωρίον $a \leq x \leq \beta$, $\gamma \leq t \leq \delta$ τὸ

ὀλοκληρώμα (1) δηλ. ἡ $F(x)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς παραμέτρου x .

Ἀπόδ: Εἶναι: $|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_{\gamma}^{\delta} (f(x+h, t) - f(x, t)) dt \right| \leq \int_{\gamma}^{\delta} |f(x+h, t) - f(x, t)| dt \rightarrow 0 \text{ ὡς } h \rightarrow 0.$

Θεώρημα III-10-2. Με τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος καὶ ἐάν ἐπὶ πλε-
ον ἡ $f(x, t)$ ἔχει συνεχεῖς μεριυάς παραγώγους ὡς πρὸς x καὶ t τότε δά ἰσχύει:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x,t) dt \right) = \int_a^b f'_x(x,t) dt$$

Άπόδο: Έχομεν $F(x+h) - F(x) = \int_a^b \{ f(x+h,t) - f(x,t) \} dt$ (1)

Επειδή η $f(x,t)$ υπετέθη διαφορίσιμος εντός του ανωτέρω ορθογωνίου κατά το θεώρημα της Μέσης τιμής θα έχουμε: $f(x+h,t) - f(x,t) = h \cdot f_x(x+\theta h,t)$, (2) διά $0 < \theta < 1$.

Ο (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b f_x(x+\theta h,t) dt \quad (3).$$

Επειδή η f_x υπετέθη συνεχής εις το υλειστόν χωρίον έπεται διά υάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$ τοιούτον, ώστε $|f_x(x+\theta h,t) - f_x(x,t)| < \epsilon$ (4) διά $|h| < \delta(\epsilon)$.

Οθεν, $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b f_x(x,t) dt \right| \leq \int_a^b |f_x(x+\theta h,t) - f_x(x,t)| dt < \int_a^b \epsilon \cdot dt = \epsilon(b-a)$, διά $|h| < \delta(\epsilon)$.

Κατά τον όρισμόν του όριου έχομεν:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \equiv F'(x) = \int_a^b f_x(x,t) dt.$$

§ 11. ΙΔΙΟΤΗΤΕΙ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Πρότασις III-11-1. Η έυαιή και άναρμια συνθήκη να το διαφοριμόν της συναρτήσεως $f(x_1, \dots, x_p)$, ώρισμένης επί του άνοιχτού ύποσυνόλου U του \mathbb{R}^p , είναι ίσον πρός μηδέν είναι ή $f(x_1, \dots, x_p)$ να είναι σταθερά επί του U .

Άπόδειξις: Έστω ή $f(x_1, \dots, x_p) = c$ διά υάθε $(x_1, \dots, x_p) \in U \subset \mathbb{R}^p$.

Επειδή $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ διά $i=1, \dots, p$ θα είναι και $df = 0$ διά υάθε $(x_1, \dots, x_p) \in U$.

Άντιστρόφως: Έστω $df = 0$ διά υάθε $(x_1, \dots, x_p) \in U$ ή $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p = 0$ διά υάθε $(x_1, \dots, x_p) \in U$.

Υποθέτοντες τά x_2, \dots, x_p σταθερά και τό x_1 μεταβλητόν, ήτοι $dx_2 = \dots = dx_p = 0$ και $dx_1 \neq 0$ έυ της άνωτέρω σχέσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 = 0 \text{ ή } \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \text{ ήτοι ή συνάρτησις } f \text{ είναι ανεξάρτητος της μεταβλητής } x_1, \text{ δηλ.}$$

δέν περιέχει την μεταβλητήν x_1 . Όμοίως αποδεικνύεται ότι ή άνωτέρω συνάρτησις δέν περιέχει τάς μεταβλητάς x_2, \dots, x_p . Οθεν ή f είναι σταθερά συνάρτησις επί του U .

Πρότασις III-11-2. Έστω ή διαφοριμή έυφρασις $\phi_1 dx_1 + \dots + \phi_p dx_p$, όπου αι συναρτήσεσις $\phi_i(x_1, \dots, x_p)$ $i=1, \dots, p$ είναι συνεχείς επί του $U \subset \mathbb{R}^p$, είναι τό διαφοριμόν μιās συναρ-

ήσεως $f(x_1, \dots, x_p)$ διά πάν $(x_1, \dots, x_p) \in U \subset \mathbb{R}^p$. Τότε διά πάν $(x_1, \dots, x_p) \in U$ ισχύει:

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_p) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_p)}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, p.$$

Απόδειξις: Διά $(x_1, \dots, x_p) \in U$ έχουμε:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} dx_p, \quad (1)$$

$$\text{και } df = \varphi_1 dx_1 + \dots + \varphi_p dx_p. \quad (2)$$

Έυ των (1) και (2) λαμβάνομεν:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \varphi_1\right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_p} - \varphi_p\right) dx_p = 0 \quad (3)$$

διά πάν $(x_1, \dots, x_p) \in U$.

Θέτοντες $dx_1 = \dots = dx_p = 0$ και $dx_i \neq 0$, ήτοι x_1, \dots, x_p σταθερά και x_i μεταβλητόν ή (3) δίδει:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \varphi_i\right) dx_i = 0 \Rightarrow \varphi_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Αναλόγως εύρισκομεν: $\varphi_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \varphi_p = \frac{\partial f}{\partial x_p}$.

Όρισμός III-11-1. Πληρουμένων των υποθέσεων της ανωτέρω προτάσεως διά τας συναρτήσεις $\varphi_i, i=1, \dots, p$, ή έκφρασις $\varphi_1 dx_1 + \dots + \varphi_p dx_p$ θα καληται τέλειον διαφοριόν.

Ήδη δά εξετάσωμεν τό θέμα του τέλειου διαφοριου ειδικώς διά συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Πρότασις III-11-3. Εάν υπάρχουν αι μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial P}{\partial y}$ και $\frac{\partial Q}{\partial x}$, είναι συνεχείς και ή διαφοριή έκφρασις $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ είναι τέλειον διαφοριόν διά $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, τότε δά ισχύη: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Απόδειξις: Έγ' όσον ή δοθεϊσα διαφοριή έκφρασις είναι τέλειον διαφοριόν, υπάρχει συνάρτησις $f(x,y), (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ τοιαύτη, ώστε να έχωμεν:

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{και} \quad Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (x,y) \in U$$

Έυ των ανωτέρω σχέσεων λαμβάνομεν: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Λόγω όμως της συνεχείας των παραγώγων $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ έπεται ότι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Έυ των ανωτέρω σχέσεων λαμβάνομεν: $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, (x,y) \in U$

Πρόταση III - 11-4. (Αντίστροφος) Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $P(x,y), Q(x,y)$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ των ανεξαρτήτων μεταβλητών x, y είναι συνεχείς δια u αδε $(x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ και επί πλέον πληρούν την σχέση $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $F(x,y)$ έχουσai ως διαφοριούν δια u αδε $(x,y) \in U$ την έκφραση $Pdx + Qdy$ (τέλειον διαφοριούν), δηλ. υπάρχουν συναρτήσεις $F(x,y)$ πληρουσαι τας δύο συνθήκας $\frac{\partial F}{\partial x} = P, \frac{\partial F}{\partial y} = Q$.

Απόδειξις: Δια y σταθερόν προσδιορίσωμεν μίαν συνάρτησιν $F(x,y)$ δεδομένην υπό του όλουληρώματος:

$$\xrightarrow{*} F(x,y) = \int_{x_0}^x P(t,y) dt + f(y) \quad \xleftarrow{*} \quad (1),$$

όπου $f(y)$ είναι μία πραγματική συνάρτησις της μεταβλητής y .

*Εστω
$$A = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(t,y) dt \right). \quad (2)$$

Παρατηρούμεν ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\int_{x_0}^x P(t,y) dt \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\int_{x_0}^x P(t,y) dt \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x P(t,y) dt \right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

*Ητοι η συνάρτησις A είναι ανεξάρτητος της μεταβλητής x .

*Οδη προσδιορίσωμεν την συνάρτησιν $f(y)$ εις τρόπον ώστε:

$$f'(y) = A = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(t,y) dt \right) \quad (3) \quad \text{ή} \quad Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(t,y) dt \right) + f'(y) \quad (3')$$

λόγω της (1) έχομεν:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad (4)$$

Και λόγω της (3') έχομεν:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(t,y) dt \right) + f'(y) = Q(x,y)$$

Οθεν, $P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy = dF(x,y)$.

*Ητοι η διαφοριή έκφρασις $Pdx + Qdy$ είναι τέλειον διαφοριούν.

Απομένει εις τον τύπον (1) τον δίδοντα την $F(x,y)$ να προσδιορίσωμεν την συνάρτησιν $f(y)$. Ο προσδιορισμός αυτής γίνεται δι' όλουληρώσεως της σχέσεως (3), ήτοι:

$$\xrightarrow{*} f(y) = \int \left[Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x P(t,y) dt \right) \right] dy \quad \xleftarrow{*} \quad (5)$$

Εφαρμογή: Δείξτε ότι η παράσταση

$$(e^x \sin y - e^y \sin x) dx + (e^y \sin x - e^x \sin y) dy$$

είναι τέλει διαφοριόν και να εύρεθῇ ἡ συνάρτησις $F(x,y)$ τῆς ὁποίας εἶναι διαφοριόν

Λύσις: θέτομεν $P = e^x \sin y - e^y \sin x$, $Q = e^y \sin x - e^x \sin y$, ὅτε ἔχομεν:

$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y - e^y \sin x = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Ἐπομένως ἡ ἀνωτέρω διαφορικὴ ἔκφρασις εἶναι τέλει διαφοριόν. Ἐστω $F(x,y)$ ἡ συνάρτησις τῆς ὁποίας εἶναι τὸ διαφοριόν. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν: $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ ἢ $\frac{\partial F}{\partial x} = e^x \sin y - e^y \sin x$ (1). Ὁλοκληροῦντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x λαμβάνομεν:

$$F(x,y) = e^x \sin y + e^y \sin x + C(y) \quad (2).$$

Διαφορίζοντες τὴν (2) ὡς πρὸς y , εὐρίσκομεν:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^x \sin y + e^y \sin x + C'(y) = Q = e^y \sin x - e^x \sin y \quad (3)$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $C'(y) = 0$ ἥτοι $C(y) = C$ δηλ. σταθερά. Ὄθεν, ἡ ζητούμενη συνάρτησις εἶναι $F(x,y) = e^x \sin y + e^y \sin x + C$.

Συμπληρώματα καὶ Ἀσκήσεις.

I. Μερικαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως.

1. Δείξτε ὅτι ἡ συνάρτησις μέτῳ

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ἂν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{» } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εἶναι παντοῦ συνεχὴς καὶ ὅτι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Ἐξετάσατε τὴν συνέχεια τῆς $f_x(0,y)$ εἰς τὸ $y=0$ καὶ τῆς $f_y(x,0)$ εἰς τὸ $x=0$.

2.

Ἐστω $f(x,y) = \begin{cases} xy/x^2+y^2, & \text{ἂν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ἂν τὸ } (x,y) \text{ δὲν πληροῖ τὴν ἀνωτέρω σχέσηιν.} \end{cases}$

Δείξατε ὅτι α) $f_x(0,0)$ καὶ $f_y(0,0)$ ἀμφοτέραι ὑπάρχουν. β) Ἡ $f(x,y)$ εἶναι ἀσυνεχὴς εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$.

Λύσις: τῆς β). Ἐστω $x \rightarrow 0$ καὶ $y \rightarrow 0$ ἀπολοιδυντα τὴν γραμμὴν $y = \lambda x$ τοῦ ἐπιπέδου xy . Τότε θὰ ἔχωμεν: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x^2}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$. Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι, τὸ ὄριον τῆς $f(x,y)$ ἐφαρτᾶται ἐκ τοῦ συντελεστοῦ κλίσεως τῆς ἐυθερείας εὐθείας $y = \lambda \cdot x$ κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας κινούνται τὰ x, y . Ἄρα ἡ $f(x,y)$ δὲν εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ $(0,0)$.

3. Νά εύρεθοῦν αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι τῶν κατωτέρω συναρτήσεων :

α) $f(x, y) = x^2 \eta \mu y$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ β) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \lambda x z^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

γ) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ κ.τ.λ. δ) $f(x, y, z) = \tau \omega \xi \epsilon \phi \frac{y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

ε) $f(x, y, z) = \tau \omega \xi \epsilon \phi \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ στ) $f(x, y) = x^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

39. Νά εξετασθῇ ἐὰν ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\frac{\partial f(0,1)}{\partial x}, \frac{\partial f(0,1)}{\partial y}$ τῆς συναρτήσεως :

$$f(x, y) = \begin{cases} y \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

II. Μερικαὶ παράγωγοι δευτέρας καὶ ἀνωτέρας τάξεως:

4. Ἐστω $f(x, y) = x^3 y + e^{xy^2}$. Νά εύρεθοῦν α) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, β) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, γ) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, δ) $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$.

5. Δείξατε ὅτι τῇ συνάρτησις $U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ἱκανοποιεῖ τὴν Εἰσώσιν :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{Διαφορικὴ Εἰσώσις τοῦ Laplace})$$

6. Ἐστω $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

7. Δείξατε ὅτι : ἐὰν $z = \phi(y + \alpha x) + f(y - \alpha x)$, τότε $\alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, ὅπου αἱ ϕ, f συναρτήσεις παραγωγίσιμοι μέχρι δευτέρας τάξεως.

8. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι n -τάξεως τῶν κατωτέρω συναρτήσεων :

α) $f(x, y) = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$, β) $f(x, y, z) = \eta \mu x \cdot \eta \mu y \cdot \eta \mu z$.

9. Ὑπολογίσατε τὰς $f''_{xy}(0, 0)$ καὶ $f''_{yx}(0, 0)$ διὰ τὴν συνάρτησιν $f(x, y)$ ὀρισμένην ὡς ἀκολούθως :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \eta \mu \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{x+y}, & \text{ἐὰν } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{ἐὰν } x+y = 0. \end{cases}$$

III. Ὀλικὰ διαφορικά.

10. Νά ὑπολογισθοῦν τὰ ὀλικὰ διαφορικά αἰ' καὶ β' τάξεως τῶν κατωτέρω συναρτήσεων :

α) $f(x, y) = x^2 + x y^2 + \eta \mu y$, β) $f(x, y) = \log(x \cdot y)$, γ) $f(x, y, z) = \epsilon \phi(3x - y) + e^{y+z}$,

δ) Νά ὑπολογισθῇ τὸ $df(x, y)$ διὰ $x=1, y=0, dx=\frac{1}{2}, dy=\frac{1}{4}$, ἐὰν $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

11. α) Έστω $U(x,y) = x^2 \cdot e^{xy}$. Νά εύρεθῇ τὸ dU .

β) Δείξατε ὅτι τὸ $(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy$ δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἐν τέλειον διαφο-
ριῶν μιᾶς συναρτήσεως $f(x,y)$ καὶ νὰ εύρεθῇ αὐτὴ ἡ συνάρτησις.

IV. Μερικαὶ παραγωγοὶ καὶ διαφορικὰ συνδέτων συναρτήσεων.

12. Ἐάν $z = e^{xy^2}$ καὶ $x = t \sin t$, $y = t \eta \mu t$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\frac{dz}{dt}$ διὰ $t = \frac{\pi}{2}$.

13. Ἐάν $z = 4x^2 - 9y^2$, ὅπου $x = \frac{t}{s}$ καὶ $y = s^2 + t^2$ νὰ εύρεθῶν $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$.

14. Ἐάν $z = \log \sqrt{x^2 + y^2}$, ὅπου $x = s \cdot e^t$ καὶ $y = s \cdot e^{-t}$ νὰ εύρεθῶν $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$.

15. Ἐάν $u = z \eta \mu \frac{y}{x}$, ὅπου $x = 3z^2 + 2s$, $y = 4z - 2s^3$, $z = 2z^2 - 3s^2$. Νά εύρεθῶν :

$$\alpha) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \beta) \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \gamma) du$$

16. Ἐάν $z = e^x \eta \mu y$, ὅπου $x = t^2$, $y = 3t$. Νά ὑπολογισθῇ $\frac{d^2z}{dt^2}$.

17. Ἐάν $z = f(x,y)$ καὶ $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \eta \mu \theta$ δείξατε ὅτι :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\eta \mu \theta}{\rho} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \eta \mu \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\rho} \end{aligned} \right\}$$

18. Ἐάν $x = \rho \sin \phi$, $y = \rho \eta \mu \phi$, τότε δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $V(x,y)$ πληροῖ τὴν σχέσιν :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2$$

ὑπόδο. Εἶναι $V_\rho = V_x \cdot x_\rho + V_y \cdot y_\rho = V_x \cdot \sin \phi + V_y \cdot \eta \mu \phi$

$V_\phi = V_x \cdot x_\phi + V_y \cdot y_\phi = V_x (-\rho \eta \mu \phi) + V_y (\rho \sin \phi)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ὑπολογί-

σατε τὸ $V_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} V_\phi^2$.

19. Δείξατε ὅτι $z = f(x^2y)$, ὅπου ἡ f εἶναι παραγωγίσιμος, ὑκανοποιεῖ τὴν σχέσιν :

$$x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2y \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

20. Ἐάν διὰ τῆς ἀθε πραγματικῆς τιμῆς τοῦ παραμέτρου λ καὶ διὰ τῆς ἀθε σταθερᾶς ρ ἰσχύη :

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x,y)$, ὅπου ἡ F ὑπετέθη παραγωγίσιμος, τότε δείξατε ὅτι :

$$x \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = p \cdot F.$$

21. Έστω $F = F(x, y, z)$. Δείξτε ότι: $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = z \frac{\partial F}{\partial z}$.

22. Δείξτε ότι η αντιστοιχία: $x = e^s, y = e^t$ μετασχηματίζει την εξίσωση:

$$x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \text{ εἰς τὴν ἐξίσωση: } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

23. Δείξτε ότι η αντιστοιχία $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ μετασχηματίζει την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ εἰς τὴν: } \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

24. Εάν $x = 2\tau - s$ και $y = \tau + 2s$ και η συνάρτηση $U(x, y)$ έχει μεριμὰς παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχείς, τότε δείξτε ότι:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{1}{25} \left(2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + 3 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial s} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \right).$$

25. Δείξτε ότι διά ολίσθησης συναρτήσεων f, g μιὰς μεταβλητῆς ή συνάρτησις:

$$z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + y \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$$

ἐπαληθεύει τὴν κατωθι, με μεριμὰς παραγώγους, εξίσωση:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

26. Εάν η συνάρτηση $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι συνεχής και ἔχη μεριμὰς παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχείς, δείξτε ότι:

i) $\frac{1}{a_1} \frac{\partial}{\partial x_1} F(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) = \dots = \frac{1}{a_n} \frac{\partial}{\partial x_n} F(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$

ii) $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1, \dots, x_n) = \dots = x_n \frac{\partial}{\partial x_n} F(x_1, \dots, x_n)$

iii) $\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \dots = \frac{1}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} F(x_1^2 + \dots + x_n^2).$

26a. Αν $z = f(\tau), \tau = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ δείξτε ότι:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = \frac{d^2 f}{d\tau^2} + \frac{n-1}{\tau} \cdot \frac{df}{d\tau}$$

27. Δείξτε ότι διά τὴν συνάρτησιν $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = F\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4}, \frac{x_2 - x_3}{x_3 - x_4}\right)$

ισχύουν:

i) $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = 0$, ii) $x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \dots + x_4 \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = 0$, iii) $x_1^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \dots + x_4^2 \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = 0.$

27a. Έστω $z = xy \cdot f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$, όπου f διαφορίσιμος.

Νά δειχθῇ ὅτι: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x-y)z$

28. Δείξτε ότι διά την συνάρτησιν $\Phi(x, y, z)$, ήτις ταυτίσεται μέ μιάν τών :

i) $F\left(\frac{1}{\beta y} - \frac{1}{\alpha x}, \frac{1}{\gamma z} - \frac{1}{\beta y}\right)$

ii) $F(x^2 + y^2 + z^2, xy + yz + zx)$

iii) $F(\alpha x^m + \beta y^m + \gamma z^m, xyz)$

ισχύει ή αντίστοιχος σχέσεις :

i) $\alpha x^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta y^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$

ii) $(y-z) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (z-x) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (x-y) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$

iii) $x(\beta x^m - \gamma z^m) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y(\gamma z^m - \alpha x^m) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z(\alpha x^m - \beta y^m) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$

Υ. Επί του τύπου του Taylor:

29. Δί' εφαρμογής του τύπου (2) του Taylor ή παρίστασις $f(x, y) = x^2y + 3y - 2$ να γραφή ως άθροισμα δυνάμεων των $x-1$ και $y+2$.

Υπόδ. Διά $x_0 = 1$ και $y_0 = -2$ ο τύπος (5) γράφεται :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, -2) + (x-1) \cdot f_x(1, -2) + (y+2) \cdot f_y(1, -2) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ (x-1)^2 f_{xx}(1, -2) + 2 \cdot (x-1)(y+2) f_{xy}(1, -2) + (y+2)^2 f_{yy}(1, -2) \right\} \\ &+ \frac{1}{3!} \left\{ (x-1)^3 f_{xxx}(1, -2) + 3(x-1)^2(y+2) f_{xxy}(1, -2) + 3(x-1)(y+2)^2 f_{xyy}(1, -2) + (y+2)^3 f_{yyy}(1, -2) \right\} + R_3. \end{aligned}$$

όπου το $R_3 = 0$, καθότι πᾶσαι αἱ παράγωγοι τάξεως ἀνωτέρας τῆς 3^{ης} τῆς $f(x, y)$ εἶναι μηδέν κ.τ.λ.

30. Νά ἀναπτυχθῇ κατὰ Taylor ή συνάρτησις $f(x, y) = e^{\eta\mu x + \eta\mu y}$ εἰς τό σημεῖον $(0, 0)$ περιοριζόμενοι εἰς τόν ἀριθμόν τῶν ὅρων μέχρι $\eta = 3$.

31. Ὁμοίως ή συνάρτησις $f(x, y) = \eta\mu xy$ εἰς δυνάμεις τοῦ $x-1$ καί $y-\frac{\pi}{2}$.

VI. Επί τῶν τελείων διαφοριῶν:

32. Δείξτε ότι ἑκάστη τῶν κατωθι διαφοριῶν ἑκφράσεων εἶναι τέλειον διαφοριόν καί ἀπολύτως ὑπολογίσατε τήν συνάρτησιν $F(x, y)$ τῆς ὁποίας εἶναι διαφοριόν.

i) $(y + \frac{1}{x}) dx + x dy$ ii) $(1 - \frac{y}{x^2} + \log x) dx + \frac{1}{x} dy$ iii) $\sin y dx + (2y - x \eta\mu y) dy$ iv) $\frac{xy - y dx}{x^2 + y^2}, x > 0$

v) $(2y - \frac{1}{x}) dx + (2x + \frac{1}{y}) dy$ vi) $(1 + e^{\eta y}) dx + e^{\eta y} (1 - \frac{x}{y}) dy$

vii) $(e^x \eta\mu y \sin z) dx + (e^x \sin y \sin z) dy - (e^x \eta\mu y \eta\mu z) dz$

33. Δείξτε ότι η διαφοριμή έκφρασις: $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$,

ή συντόμως $Pdx + Qdy + Rdz$ είναι τέλειον διαφοριμόν μιᾶς συναρτήσεως $F(x,y,z)$ εάν, και μόνον εάν, πληροῦνται αἱ συνθήκαι:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

VII. Ἐπὶ τῶν αὐξήσεων και διαφοριμῶν συναρτήσεως (Συμπλήρωμα)

34. Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x,y) = x^2y - 3y$.

Εὑρετε: α) τὴν διαφορὰν $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$. β) Τὸ διαφοριμὸν df γ) Προσδιορίσατε τὸ Δf και df εάν $x=4$, $y=3$ και $\Delta x=-0,01$ και $\Delta y=0,02$.

Λύσις: α) Εἶναι $\Delta f = (x+\Delta x)^2(y+\Delta y) - 3(y+\Delta y) - (x^2y - 3y) = \underbrace{2xy \cdot \Delta x + (x^2-3) \Delta y}_{A} + \underbrace{(\Delta x)^2 y + 2x \Delta x \cdot \Delta y + (\Delta x)^2 \Delta y}_{B}$

Τὸ ἄθροισμα A καλεῖται κύριον μέρος τῆς διαφορᾶς Δf .

β). Τὸ $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 2xydx + (x^2-3)dy$.

γ). Διὰ $x=4$, $y=3$ και $\Delta x=-0,01$ και $\Delta y=0,02$ ἔχομεν:

$$\Delta f = f(4-0,01, 3+0,02) - f(4,3) = \{(3,99)^2(3,02) - 3(3,02)\} - \{4^2 \cdot 3 - 3\} = 0,018702.$$

$$\text{και } df = 2xydx + (x^2-3)dy = 2 \cdot 4 \cdot 3(-0,01) + (4^2-3) \cdot 0,02 = 0,02.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, $df - \Delta f = 0,001298$, ἥτοι τὰ df και Δf εἶναι προσεγγιστικῶς ἴσα. Τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός ὅτι αἱ αὐξήσεις $\Delta x=dx$ και $\Delta y=dy$ εἶναι πολὺ μικραὶ.

35. Τὸ αὐτὸ ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀσκήσιν διὰ τὴν συνάρτησιν $f(x,y) = e^{xy}$ τοῦ ϵ_0 νηκ διὰ $x=0$, $y=1$, $\Delta x=0,02$, $\Delta y=0,01$.

VIII. Ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τῆς Μέσης τιμῆς ἢ τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων.

36. Δείξτε ὅτι:

$$\log \frac{x+y}{2} = \frac{x+y-2}{x+y-\theta(x+y-2)}, \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{διὰ } x > 0, y > 0.$$

37. Ἀποδείξτε τὸ θεώρημα μέσης τιμῆς (βλ. πρότασιν III-8-1) διὰ συναρτήσεις τριῶν μεταβλητῶν.

IX. Συμπληρωματικές ασκήσεις του κεφαλαίου.

38. Νά εὑρεθοῦν αἱ k -τάξεις ὁμογενεῖς διαφορίσιμοι συναρτήσεις $f(x, y)$ αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὴν σχέσιν $y \cdot f_x = x \cdot f_y$. (1).

Λύσις: Αἱ $f(x, y)$ θὰ πληροῦν καὶ τὴν σχέσιν τοῦ Euler ἥτοι: $x \cdot f_x + y \cdot f_y = k \cdot f$ (2).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν: $\frac{f_x}{x} = \frac{f_y}{y} = \frac{x \cdot f_x + y \cdot f_y}{x^2 + y^2} = \frac{k \cdot f(x, y)}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{f_x}{f} = \frac{k \cdot x}{x^2 + y^2}$ (3)

Δι' ολοκλήρωσιν τῆς (3) λαμβάνομεν: $f(x, y) = C(y) \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}$ (4)

Λόγω τῆς (4) ἡ $\frac{f_y}{y} = \frac{k \cdot f(x, y)}{x^2 + y^2}$ γίνεταί:

$$\frac{C'(y) \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}} + \frac{k}{2} C(y) \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2} - 1} \cdot 2y}{y} = \frac{k \cdot C(y) \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}}{x^2 + y^2}$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν: $C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = \text{σταθερά}$

Ὅθεν, $f(x, y) = C \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}$

39. Νά εὑρεθοῦν αἱ διαφορίσιμοι συναρτήσεις $f(x, y)$ ποὺ πληροῦν τὰς συνθήκας:

$$f(x, y) = \varphi(x) + \sigma(y) \text{ καὶ } y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = xy(x^2 - y^2).$$

Λύσις: Ἡ δευτέρα τῶν σχέσεων γίνεται λόγω τῆς πρώτης $y(\varphi'(x) - x^3) = x(\sigma'(y) - y^3)$.

Διὰ $x, y \neq 0$ $\frac{\varphi'(x) - x^3}{x} = \frac{\sigma'(y) - y^3}{y} = C$. Ἐπειδὴ τὰ x, y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ οἱ ἀνωτέρω ἴσοι λόγοι θὰ πρέπει προφανῶς νὰ ἔχουν κοινὴν τιμὴν ἔστω C ἀνεξάρτητον τῶν x καὶ y . Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\varphi'(x) = x^3 + Cx \Rightarrow \varphi = \frac{x^4}{4} + \frac{Cx^2}{2} + C_1 \text{ καὶ } \sigma'(y) = y^3 + Cy \Rightarrow \sigma(y) = \frac{y^4}{4} + \frac{Cy^2}{2} + C_2.$$

40. Δίδεται ἡ συνάρτησις $z = f(x, y)$. Ἐυτελοῦμεν τὴν ἀντιδιατάστασιν $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \eta \mu \theta$, $\rho > 0$ $0 \leq \theta < 2\pi$ (πολιμαὶ συντεταγμέναι) ὅτε αὕτη γίνεταί:

$z = f(\rho \sin \theta, \rho \eta \mu \theta) = F(\rho, \theta)$. Ὑπολογίσατε τὰς μεριμὰς παραγώγους

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta}.$$

41. Ἐστω ἡ $f(x, y)$ εἶναι δις κατὰ συνέχειαν διαφορίσιμος καὶ ἔστω ἡ $u(x, y, z)$ ὀρίσεται ὡς ἀπολούθως:

$$u(x, y, z) = \int_0^{2\pi} f(x + z \sin \varphi, y + z \eta \mu \varphi) d\varphi$$

Δείξατε ὅτι: $z(u_x^2 + u_y^2 - u_z^2) - u_z = 0$. (βλ. § 10).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§1. ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΥΠΟ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ : $f(x, y) = y$

Ἐστω ἡ ἀντιστοιχία $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καὶ ἓνα σημεῖον $y_0 \in \mathbb{R}$. Ἀναζητοῦμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων $x \in \mathbb{R}$ τοιούτων, ὥστε $f(x) = y_0$, δηλ. τὸ ἐν λόγῳ σύνολον εἶναι ἡ ἀντιστροφὸς εἰκῶν $f^{-1}(\{y_0\})$. Αὐτὸ τὸ σύνολον μαθεῖται λύσις τῆς ἐξίσωσews $f(x) = y_0$.

Ἐστω ἡδὴ ἡ ἀντιστοιχία $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καὶ τὸ σημεῖον $y \in \mathbb{R}$. θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν: $f(x, y) = y$. εἶναι δυνατόν (οὐκὶ πάντοτε) νὰ συμβῇ, ὅταν τὸ x εἶναι δοθέν, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ὡς πρὸς y νὰ ἐπιδέχεται μίαν μόναδιὴν λύσιν διὰ καθε x (δοθέν) $\in \mathbb{R}$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις ὁρίζει τὸ y ὡς μίαν συνάρτησιν $\varphi(x)$, ἥτοι: $y = \varphi(x)$ (ἐπιλύουσα συν- ὁρτήσις). Ἡ συνάρτησις αὕτη μαθεῖται πεπληρωμένη συνάρτησις ὁρισμένη ὑπὸ τῆς ἐξίσωσews $f(x, y) = y$.

Αὕτη δὲ χαρακτηρίζεται ὑπὸ τῆς ιδιότητος: $f(x, \varphi(x)) = y$ διὰ καθε $x \in \mathbb{R}$. Δυνάμεθα προσέτι νὰ εἰπῶμεν εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὅτι, διὰ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ἡ σχέσις $f(x, y) = y$ εἶναι ταυτοσημὸς μὲ τὴν $y = \varphi(x)$.

Ἄς δώσωμεν ἥδη τὰ ἀιόλουδα ἀπλᾶ παραδείγματα πεπληρωμένων συναρτήσεων:

Παράδειγμα 1^ο. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις: $x^2 + 3xy - 2x + 5y = 7$.

Αὕτη λύεται μονοσημάντως ὡς πρὸς y διὰ καθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{5}{3}\}$ καὶ δίδει:

$$y = \frac{-x^2 + 2x + 7}{3x + 5} = \varphi(x).$$

2^ο. Ἡ ἐξίσωσις: $y^5 - 4y^4 + 4xy^3 - x^2 = 0$, ὁρίζει μίαν πεπληρωμένην συνάρτησιν $y = \varphi(x)$. Πράγματι διὰ καθε $x \in \mathbb{R}$ ἔχομεν μίαν ἐξίσωσιν περιττοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς y , ἥτις ἐπιδέχεται τοὐλάχιστον μίαν πραγματικὴν ρίζαν. Εἰς τὴν περίπτωσιν πλείονων ριζῶν λαμβάνομεν τὴν ρίζαν τῆς μερίσσης τετμημένης καὶ οὕτω ἔχομεν διὰ καθε $x \in \mathbb{R}$ ἓν μόνον $y \in \mathbb{R}$. Δὲν δυνάμεθα ὁμῶς νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὴν τὴν συνάρτησιν ὡς μίαν ρητὴν συνάρτησιν τοῦ x μὲ τὴν βοήθειαν στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Ἐδῶ ἀπλῶς γνωρίζομεν θεωρητικῶς τὴν ὑπαρξιν τῆς $y = \varphi(x)$.

Είναι ξεάλλου φυσικόν, νά μήν συμβαίνουν αἱ προαναφερθεῖσαι περιπτώσεις καί οὕτω ἡ ἐξίσωσις $f(x,y)=\gamma$ νά μήν ὀρίσῃ μίαν πεπληρωμένην συνάρτησιν $y=q(x)$. Οὕτω δὲ ὠρισμένης ἡ καί δὲ ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x εἶναι δυνατόν νά μήν ὑπάρχῃ λύσις, ὡς πρὸς y , τῆς $f(x,y)=\gamma$. Π.χ ἡ ἐξίσωσις $x^2+y^2=1$ διὰ $|x|>1$ δέν ἔχει λύσιν ὡς πρὸς y . Ἐνῶν ἡ $x^2+2y^2=-9$ δέν ἐπιδέχεται λύσιν ὡς πρὸς y δι' οὐδεμίαν τιμήν τοῦ x .

Ὁμοίως εἶναι δυνατόν ἡ $f(x,y)=\gamma$ νά ἐπιδέχεται πλείονας τῆς μιᾶς ἢ καί ἀπείρους λύσεις ὡς πρὸς y διὰ δεδομένον x . Π.χ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ λυομένη ὡς πρὸς y δίδει:

$$y = \pm \frac{3}{2} \sqrt{4-x^2}, \quad |x| \leq 2, \quad \text{ἥτοι ἔχομεν διὰ καάθε } |x| \leq 2 \text{ δύο ἐπιλυούσας συναρτήσεις τας:}$$

$$y = +\frac{3}{2} \sqrt{4-x^2}, \quad y = -\frac{3}{2} \sqrt{4-x^2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις $εφ x - εφ y = 0$ δίδει διὰ καάθε $x \in \mathbb{R}$ τὰς λύσεις $y = x + k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ὁμοίως εἶναι δυνατόν ἡ $f(x,y)=\gamma$ νά ἐπαληθεύεται ὑπὸ ἑνὸς μόνον σημείου. π.χ ἡ ἐξίσωσις $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$ ἐπαληθεύεται μόνον ἀπὸ τοῦ σημείου $(x=-1, y=2)$.

Ἡσθῆ αὖς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν μίαν εἰδιυτὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $f(x,y)=\gamma$, τὴν $x=x_0$, $y=y_0$. Προτιθέμεθα νά πνωρίσωμεν ἐάν διὰ τὰ x τὰ εὐρισκόμενα ἀρμούντως πλησίον τοῦ x_0 ἡ ἐξίσωσις θά εἶχεν μίαν μοναδιυτὴν λύσιν ὡς πρὸς y . Πρὸς τοῦτοις ἀρυεῖ νά περιορίσωμεν - ὅπως θά ἴδωμεν καί ἀπὸ σχετιυόν θεωρήματα κατωτέρω - αὐτὴν τὴν λύσιν y εἰς μίαν κατὰ ληθῆδον περιοχὴν τοῦ y_0 . Ὅταν συμβαῖν αὐτό θά ἔχωμεν οὕτως ὀρίσει μίαν πεπληρωμένην συνάρτησιν $y=q(x)$ ἐκ τῆς $f(x,y)=\gamma$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0) .

Ἡ γεωμετριυτὴ ἐρμηνεία τοῦ ἀνωτέρω εἶναι ἀπλῆ:

Ἡ ἐξίσωσις $f(x,y)=\gamma$ ὀρίσει εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy μίαν καμπύλην καί προτιθέμεθα νά ἐμφράσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτῆς τῆς καμπύλης ὑπὸ τὴν λελυμένην συνῆθη μορφὴν, ὑποδορίζοντες τὸ y συναρτήσῃ τοῦ x εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ (x_0, y_0) . Ἐνίστε μία καμπύλη, ἐξισώσεως $f(x,y)=\gamma$, δέν δύναται γενιυῶς νά ἐυφρασθῇ ὑπὸ τὴν προηρουμένην μορφὴν $y=q(x)$. (βλ. Παράδ. 2^α).

Κατωτέρω παραθέτομεν ἕνα βασιυόν θεωρήματα τῶν πεπληρωμένων συναρτήσεων.

Χάριν ἀπλοποιήσεως καί χωρὶς βλάβην τῆς γενιυότητος εἰς τὸ ξεῖς θά θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $f(x,y)=0$.

Προτάσσομεν τοῦ θεωρήματος τὴν κατωθὶ βοηθητιυτὴν πρότασιν:

Πρότασις IV-1-1. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ εἶναι σὺνεχῆς εἰς τὸ

σημείον $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ και επί πλέον $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0$. Τότε υπάρχει θετικός αριθμός h τοιούτος, ώστε η $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ νά είναι θετική δι' όλη τα (x_1, x_2, \dots, x_n) τά εύρισόμενα εντός της περιοχής:

$$|x_1 - \xi_1| < h, |x_2 - \xi_2| < h, \dots, |x_n - \xi_n| < h.$$

Απόδειξις: πρὸς τούτοις δά εφαρμόσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς συνεχείας διὰ τὴν $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ εἰς τὸ σημείον $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Διὰ τὰδε $\varepsilon > 0$, ἐπομένως καὶ διὰ $\varepsilon = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ὑπάρχει ἓν $\delta = h > 0$ τοιούτον, ὥστε νά ἔχωμεν:

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| < \varepsilon \quad (1)$$

δι' όλη τα (x_1, x_2, \dots, x_n) τὰ πληροῦντα τὰς σχέσεις:

$$|x_1 - \xi_1| < h, |x_2 - \xi_2| < h, \dots, |x_n - \xi_n| < h.$$

Ἡ σχέση (1) γράφεται καὶ οὕτω:

$$0 = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - \varepsilon < f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + \varepsilon$$

ἥτοι: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, δι' όλη τα (x_1, x_2, \dots, x_n) τὰ πληροῦντα τὰς σχέσεις:

$$|x_1 - \xi_1| < h, |x_2 - \xi_2| < h, \dots, |x_n - \xi_n| < h.$$

Θεώρημα IV-1-1. Θεωροῦμεν μίαν πραγματικὴν συνάρτησιν $f(x, y)$ καὶ τὴν εἰσῶσιν $f(x, y) = 0$ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς αὐτήν. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ καὶ αἱ μεριμαὶ παράγωγοι f_x, f_y αὐτῆς εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0) καὶ ὅτι:

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0) \neq 0.$$

Τότε:

α) Ὑπάρχουν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ h καὶ k , οἵτινες ὀρίσουν ἓνα ὀρθογώνιον T περὶ τοῦ σημείου (x_0, y_0) , ἥτοι: $T = \{(x, y): |x - x_0| < h \text{ καὶ } |y - y_0| < k\}$, τοιούτον, ὥστε διὰ τὰδε x μὲ $|x - x_0| < h$ ὑπάρχει εἰς καὶ μόνον εἰς ἀριθμὸς y μὲ $|y - y_0| < k$, ὅστις πληροῖ τὴν εἰσῶσιν $f(x, y) = 0$. Διὰ τῆς τοιαύτης μονοσημάντου ἀντιστοιχίας ὀρίσεται ἀμυβῶς μία συνάρτησις $y = q(x)$.

Τὸ πεδίον ὀρισμοῦ τῆς q περιέχει τὸ $[x_0 - h, x_0 + h]$ καὶ τὸ πεδίον τιμῶν εὗρίσκεται ἐντός τοῦ $[y_0 - k, y_0 + k]$.

β) Ἡ συνάρτησις $q(x)$, προσῳρισθεμένη ὡς ἀνωτέρω, εἶναι συνεχὴς καὶ ἔχει παράγωγον

$\varphi'(x)$ συνεχής διά $|x-x_0| < h$.

Ἐπὶ πλέον δέ ἰσχύει:

$$f'_y(x, \varphi(x)) \neq 0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))} \quad \text{διά} \quad |x-x_0| < h.$$

Ἀπόδειξις: Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $f'_y(x_0, y_0) > 0$. Διὰ τὴν περίπτωσιν $f'_y(x_0, y_0) < 0$ ἀρμεῖ νὰ ἀντιματαστήσωμεν τὴν f ὑπὸ τῆς $-f$ καὶ οὕτω ἀναγόμεθα εἰς τὴν ὑπὸ ἐξέτασιν πρώτην περίπτωσιν.

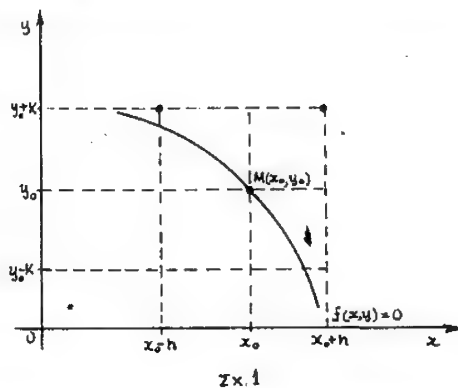
Ἐπειδὴ ἡ f'_y εἶναι συνεχὴς ὑπάρχει ἀριθμὸς $k > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἡ $f'_y(x, y) > 0$ διὰ πάντα τὰ (x, y) τοῦ χωρίου $S = \{(x, y) : |x-x_0| \leq k, |y-y_0| \leq k\}$ (βλ. πρότ. 1-1).

Ἐὰν ἥδη θεωρήσωμεν μίαν σταθεράν τιμὴν τοῦ x ἐντὸς τοῦ $|x-x_0| < k$, τότε ἡ $f(x, y)$ θεωρουμένη ὡς συνάρτησις τοῦ y καὶ ἔχουσα θετικὴν παράγωγον θὰ εἶναι αὐξουσα συνάρτησις (τοῦ y) ἐντὸς τοῦ χωρίου S . Εἰδιωκῶς ἡ $f(x_0, y)$ εἶναι αὐξουσα συνάρτησις τοῦ y . Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $f(x_0, y_0) = 0$, ἔπεται ὅτι: $f(x_0, y_0+k) > 0$ καὶ $f(x_0, y_0-k) < 0$.

Ἐφαρμόζοντες τὴν προηγουμένην Πρότασιν IV-1-1 εἰς ἐκαστὴν τῶν ἀνωτέρω συνεχῶν συναρτήσεων συμπεραίνομεν ἐνυπόληψι, ὅτι ὑπάρχει ἐν ἀνοιχτὸν διάστημα (x_0-h, x_0+h) (τὸ h ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ k) ἐντὸς τοῦ ὁποίου νὰ ἔχωμεν συγχρόνως:

$$f(x, y_0+k) > 0 \quad \text{καὶ} \quad f(x, y_0-k) < 0.$$

ὑποθέτομεν ὅτι τὸ x εἶναι σταθερὸν ἐντὸς τοῦ ἀνοιχτοῦ διαστήματος (x_0-h, x_0+h) . Ἐπειδὴ ἡ $f(x, y)$, θεωρουμένη ὡς συνεχὴς συνάρτησις τοῦ y , εἶναι ἀρνητικὴ διὰ $y = y_0 - k$ καὶ θετικὴ διὰ $y = y_0 + k$, δηλ. εἰς τὰ ἄκρα τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $[y_0-k, y_0+k]$ λαμβάνει τιμὰς ἑτεροσήμους, ἔπεται, συμφώνως πρὸς τὴν Πρότασιν IX-5-1, Τόμος Πρῶτος σελ. 327, ὅτι ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ y ἐντὸς τοῦ $[y_0-k, y_0+k]$ τοιαύτη, ὥστε $f(x, y) = 0$, (βλ. Σχ. 1). Ἐπὶ πλέον ἐπειδὴ $f'_y(x, y) > 0$ ἔπεται, ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις λαμβάνει τὴν τιμὴν μηδέν μὴν μόνον φορὰν. Ἦτοι διὰ καθὲ $x \in (x_0-h, x_0+h)$ ὑπάρχει ἐν μόνον y ἐντὸς τοῦ $[y_0-k, y_0+k]$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $f(x, y) = 0$. Τοιοῦτοτρόπως



δημιουργεῖται ὑπ' αὐτῆς τῆς ἀντιστοιχίας μία συνάρτησις, ἔστω ἡ $y = \varphi(x)$, ὠρισμένη ἐπὶ

τοῦ $|x-x_0| < h$ καὶ μέ τιμὰς ἐντὸς τοῦ $[y_0-k, y_0+k]$. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς δι' αὐτὴν $f(x, \varphi(x))=0$, διὰ τὰς $|x-x_0| < h$. Ἡ $y=\varphi(x)$ εἶναι ἡ μοναδική λύσις (ἐπιλύουσα συνάρτησις) τῆς $f(x, y)=0$ διὰ τὰ $|x-x_0| < h$.

Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν $y_0 = \varphi(x_0)$, καὶ ὁσον ὑπετέθη $f(x_0, y_0) = 0$.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν συνέχειαν τῆς $y = \varphi(x)$ ἔρραδόμεθα ὡς ἀπολοῦθαίς: Συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω λεχθέντα διὰ τὰς $k > 0$ ὑπάρχει ἓν $h > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ $|x-x_0| < h \implies y_0 - k < \varphi(x) < y_0 + k$ ἢ $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < k$.

Ἀντικαθιστώντες τῶρα ἀντὶ τοῦ k ἓν $0 < \varepsilon < k$ καὶ ἀντὶ τοῦ h τὸ $\delta(\varepsilon)$ ἡ ἀνωτέρω συνεπαγωγή γράφεται:

$$|x-x_0| < \delta(\varepsilon) \implies |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Τὸ τελευταῖον συμπέρασμα ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς $y = \varphi(x)$ εἰς τὴν θέσιν $x=x_0$.

Ἐστω ἥδη ἓν σημεῖον $x_1 \in \{|x-x_0| < h\}$ καὶ ἔστω $y_1 = \varphi(x_1)$. Θεωροῦμεν τὴν τετραγωνικὴν περιοχὴν:

$$S' = \{(x, y) : |x-x_1| \leq k', |y-y_1| \leq k'\},$$

κέντρου (x_1, y_1) , ἐπιλέγοντες καταλλήλως τὸ k' ὥστε νὰ ἔχωμεν: $S' \subseteq S$. Ἀπολοῦθαίς: τὴν αὐτὴν, ὡς ἀνωτέρω, διαδιουσίαν ἀποδεικνύομεν τὴν συνέχειαν τῆς $y = \varphi(x)$ εἰς τὸ τυχόν σημεῖον τοῦ (x_0-h, x_0+h) .

Τέλος θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ $y = \varphi(x)$ εἶναι παραγωγίσιμος διὰ τὰς $x \in (x_0-h, x_0+h)$.

Θέτομεν $\Delta\varphi = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$. Ἐπειδὴ $f(x, \varphi(x)) = 0$ διὰ τὰς $x \in (x_0-h, x_0+h)$ θὰ ἔχωμεν καί:

$$f(x+\Delta x, \varphi(x+\Delta x)) - f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (1)$$

Ἡ $f(x, y)$ ἔχει ἐξ ὑποθέσεως μερικὰς παραγώγους συνεχεῖς εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0) , συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ διαφορίσιμος εἰς αὐτὴν τὴν περιοχὴν. Συμφώνως πρὸς τὴν Πρότασιν III-3-2 (βλ. καὶ ἀπόδειξιν αὐτῆς) ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$0 = f'_x [x, \varphi(x)] \cdot \Delta x + f'_y [x, \varphi(x)] \cdot \Delta\varphi + \varepsilon_1 (\Delta x, \Delta\varphi) \cdot \Delta x + \varepsilon_2 (\Delta x, \Delta\varphi) \cdot \Delta\varphi \quad (2)$$

ὅπου τὰ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ τοῦ $\Delta x \rightarrow 0$.

Ἡ (2) γράφεται καὶ οὕτω:

$$f'_x \Delta x + f'_y \Delta\varphi = -\varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta\varphi \quad \text{ἢ καὶ} \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = -\frac{f'_x + \varepsilon_1}{f'_y + \varepsilon_2} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ φ εἶναι συνεχὴς, τὸ $\Delta\varphi \rightarrow 0$ ὡς $\Delta x \rightarrow 0$.

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων των μετῶν τῆς (3) διὰ $\Delta x \rightarrow 0$ καὶ ἐπειδὴ $f'_y \neq 0$

υαί $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, θα έχουμε:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad (4)$$

Ήτοι υπάρχει το $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ υαί το όποιον είναι, συμφώνως πρὸς τὸν ὀρίσμὸν τῆς παραγώγου, ἢ $\varphi'(x)$.

Ἄρα ἡ $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμος διὰ υάθε $x \in (x_0-h, x_0+h)$ υαί ἐπὶ πλέον ισχύει:

$$\varphi'(x) = \frac{-f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))} \text{ διὰ } x \in (x_0-h, x_0+h).$$

Ἐν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως συνάγεται ἀμέσως ἡ συνέχεια τῆς $\varphi(x)$.

Παράδειγμα 18) Ἐστω ἡ ἐξίσωσις: $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 + y^3 - 1 = 0$.

Κά εὑρεθῇ ἐάν αὕτη ὀρίση μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν $y = \varphi(x)$ υαί ἐν συνεχείᾳ νά εὑρεθῇ ἡ $\frac{dy}{dx}$.

Λύσις: Ἐχομεν $f'_y = 6xy + 3y^2$. Είναι δέ $f(0, +1) = 0$ υαί $f'_y(0, +1) = 3 \neq 0$. Ὅθεν εἰς μίαν υατάληθον περιοχὴν τοῦ σημείου $(0, +1)$ ὀρίσεται μονοσημάντως ἡ συνάρτησις $y = \varphi(x)$ ταυῦτη, ὥστε: $x^2 + 3x \cdot \varphi^2(x) + \varphi^3(x) - 1 = 0$ διὰ υάθε x τοιοῦτον, ὥστε $|x| < h$, ἐνθα h υατάληθος θετικὸς ἀριθμὸς.

$$\text{Εἶναι δέ, } \varphi'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x+3y^2}{6xy+3y^2} \text{ διὰ υάθε } |x| < h.$$

29) Ἐφαρμόσατε τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἰς τὴν ἐξίσωσιν $f(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^4}{4} - 1 = 0$ υαί εὑρατε τὴν συνάρτησιν $y = \varphi(x)$ τοῦ θεωρήματος, εἰς ἅς περιπτώσεις βῆναι δυνατόν.

Λύσις: Ὡς πρῶτον ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις

παριστὰ ἐλλειψιν (βλ. Σχ. 1). Ἐάν P εἶναι

ένα σημεῖον ἀνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x , τότε

$f'_y = \frac{1}{2} y > 0$. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὁθεν ἐφαρμόζεται υαί δίδει τὸ y ὡς μίαν συνάρτησιν τοῦ x , ἥτοι $y = +\frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}$. Ἐάν τὸ Q

εὑρίσμεται υάτωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x , τότε

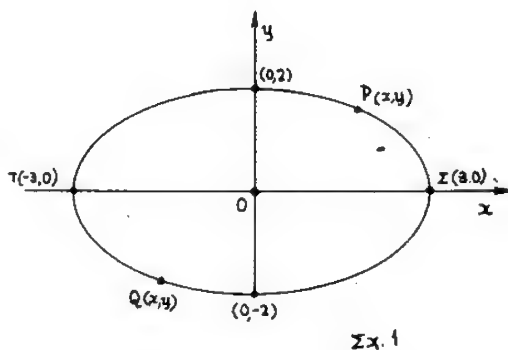
$f'_y = \frac{1}{2} y < 0$. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα πάλιν

ἐφαρμόζεται υαί δίδει: $y = -\frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}$. Τέλος

ἄς ἐξετάσωμεν τί συμβαίνει διὰ τὰ σημεῖα $\Sigma(3,0)$ υαί $T(-3,0)$ τοῦ ἄξονος τῶν x . Παρα-

τηροῦμεν ὅτι δι' αὐτὰ τὰ σημεῖα, π.χ. διὰ τὸ $(3,0)$ εἶναι $f'_y(3,0) = 0$ υαί τὸ θεώρημα δέν

ἐφαρμόζεται.



ἄς ἐξετάσωμεν τί συμβαίνει διὰ τὰ σημεῖα $\Sigma(3,0)$ υαί $T(-3,0)$ τοῦ ἄξονος τῶν x . Παρατηροῦμεν ὅτι δι' αὐτὰ τὰ σημεῖα, π.χ. διὰ τὸ $(3,0)$ εἶναι $f'_y(3,0) = 0$ υαί τὸ θεώρημα δέν ἐφαρμόζεται.

Έξ άλλου παρατηρούμεν ότι: $f'_x = \frac{2}{9} x > 0$ εἰς τὸ $\Sigma(3,0)$ καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $x = \sigma(y)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ Σ . (βλ. κατωτέρω παρατήρησιν 1^η).

Εἶναι δὲ $x = \sigma(y) = \frac{3}{2} \sqrt{4-y^2}$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ Σ . Ἀναλόγως $x = -\frac{3}{2} \sqrt{4-y^2}$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ $\Gamma(-3,0)$.

3^η/ Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις: $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - x^3 + 2x + 3y = 0$

ὁρίζει μίαν πεπλεγμένην συνάρτησιν $y = \varphi(x)$ διὰ τὰς πρᾶγματικὰς τιμὰς τοῦ x . Εὗρατε τὴν $\varphi'(x)$.

Λύσις: ἔχομεν $f'_y = 3y^2 + 3x^2 + 3 > 0$ διὰ τὰς (x,y) . Ὅθεν διὰ τὰς x ἡ $f(x,y)$ εἶναι μία αὐξουσα συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς y .

1^η/ Ἐπὶ πλεόν $f(x,y) \rightarrow -\infty$ τοῦ $y \rightarrow -\infty$ καὶ $f(x,y) \rightarrow +\infty$ τοῦ $y \rightarrow +\infty$ διὰ τὰς σταθερὰς x . Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ὑπάρχει μία μόνον τιμὴ τοῦ y , ἔστω ἡ y_0 αὕτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $f(x,y_0) = 0$. Πληρουμένων λοιπὸν τῶν ὑποθέσεων τοῦ θεωρήματος ὑπάρχει μία μόνον συνάρτησις $y = \varphi(x)$ ὁρισθεὶς ὑπὸ τῆς $f(x,y) = 0$, συνεπὴς καὶ παραγωγίσιμος διὰ τὰς x .

Εἶναι δὲ $\varphi'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{6xy - 3x^2 + 2}{3y^2 + 3x^2 + 3}$ διὰ τὰς πρᾶγματικὰς τιμὰς τοῦ x .

Παρατηρήσεις: 1^η/ Ἡ ἐξίσωσις $f(x,y) = 0$ εἶναι δυνατόν νὰ ὁρίσῃ τὸ x ὡς πεπλεγμένην συνάρτησιν τοῦ y , ἥτοι $x = \sigma(y)$. Ἐὰν διὰ τὸ σημεῖον (x_0, y_0) ἔχωμεν $f(x_0, y_0) = 0$ καὶ ἐπὶ πλεόν $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, τότε θὰ ἔχωμεν κατ' ἀναλογίαν:

$$\sigma'(y) = \frac{dx}{dy} = -\frac{f'_y}{f'_x}$$

2^η/ Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐπιλυούσης συχνὰ δὲν ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις αὐτῆς, ἀλλὰ ἡ θεωρητικὴ ὑπαρξίς της, ὁπότε, συμφάνως πρὸς τὸν γνωστὸν τύπον, εὐρίσκουμεν τὴν παράγωγον ταύτης.

3^η/ Ἡ ἐκ τοῦ θεωρήματος προκύπτουσα σχέσις $y' = \varphi'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y}$ μὲ $f'_y \neq 0$ γράφεται καὶ οὕτω:

$$f'_x + y' f'_y = 0 \quad (1)$$

ὑποθέτοντες ὅτι ἡ $f(x,y)$ ἔχει μερικὰς παραγώγους δευτέρας τάξεως συνεχεῖς

καί παραγινώσκοντες την (1) ως προς x λαμβάνομεν:

$$f_{xx}'' + y' f_{xy}'' + y'' f_y' + y' (f_{yx}'' + y' f_{yy}'') = 0 \quad (2)$$

Θέτοντες δε, $y' = \frac{f_x'}{f_y'}$ εις την (2) καί επιλύοντες ως προς y'' λαμβάνομεν τελικώς:

$$y'' = -\frac{f_y' f_{xx}'' - 2 f_x' f_{xy}'' + f_x'^2 f_{yy}''}{f_y'^2} \quad (3)$$

Εν τῇ σχέσει (3) προκύπτει καί ἡ συνέχεια τῆς y'' .

4%. Ἐάν $f_y'(x_0, y_0) = 0$, τότε ἐξετάσομεν, ὅπως ἐλέχθη καί εἰς τὴν πρώτην παρατήρησιν, τὴν $f_x'(x_0, y_0)$ καί ἐάν εἶναι αὕτη $\neq 0$, τότε ὁρίζεται ἡ πεπλεγμένη συνάρτησις $x = \sigma(y)$. Τό ἐρώτημα εἶναι ἥδη τί συμβαίνει ἐάν $f_x'(x_0, y_0) = f_y'(x_0, y_0) = 0$.

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν πιθανόν νά μὴν ὑπάρχῃ μονοσήμαντος ἐπίλυσις τῆς $f(x, y) = 0$ ὡς πρὸς y ἢ ὡς πρὸς x ἢ πιθανόν νά ὑπάρχουν πλείονες τῆς μιάς ἐπὶ λύσεις ὡς πρὸς y ἢ x .

Παράδειγμα 4%. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις: $f(x, y) \equiv y^2 - x^2 = 0$. Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ, ἐάν ὑπάρχῃ, ἡ ὑπ' αὐτῆς ὁρισθεμένη πεπλεγμένη συνάρτησις.

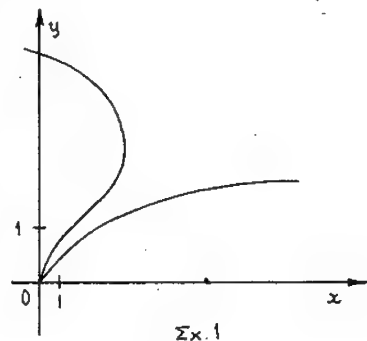
Λύσις: Ἐχομεν $f_x' = -2x, f_y' = 2y$ καί $f_x'(0, 0) = f_y'(0, 0) = 0$. Ὅθεν, τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὸ σημεῖον $(0, 0)$. Ἐν τούτοις ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις θεωρούμενη ὡς πρὸς y δίδει τὰς λύσεις $y = \pm x$ (εὐθεῖαι καὶ ἀθετοὶ διερχόμενα διὰ τῆς ἀρχῆς).

5%. Ἐστω ἡ ἐξίσωσις: $f(x, y) \equiv y^5 - 4y^4 + 4xy^3 - x^2 = 0$.

Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ ἡ ὑπ' αὐτῆς ὁρισθεμένη πεπλεγμένη συνάρτησις.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι $f(0, 0) = 0$ καί $f_x'(0, 0) = f_y'(0, 0) = 0$. Ἐπομένως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $(0, 0)$ δὲν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα. Ἐν τούτοις δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τὸ x συναρτήσει τοῦ y , ἥτοι:

$x = 2y^2 \pm \sqrt{4y^4 + y^5 - 4y^4} = 2y^2 \pm y^{5/2}$. Εὐκόλως δυνάμεθα νά σχεδιάσωμεν τὴν αμψύλην τὴν παρισταμένην ὑπὸ τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως (βλ. Σχ.1), ὅπου ἐλήφθησαν διαφορετικαὶ μονάδες ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox, Oy .



6^ο. Δίδεται η εξίσωση: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$ (φύλλον του Descartes).

Νά εύρεθούν τα σημεία διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δὲν ἐφαρμόζεται.

Λύσις: ἔχουμεν $f'_x = 3x^2 - 6y$, $f'_y = 3y^2 - 6x$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ ἔχομεν

$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. Ἐπομένως δὲν δυνάμεθα νὰ ἐμφράσω-

μεν τὸ y ὡς συνάρτησιν τοῦ x . Ἐπίσης δὲν δυνάμεθα

νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα διὰ τὰ σημεία

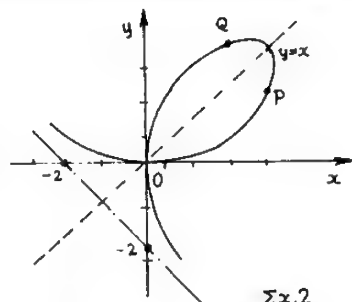
ὅπου $3y^2 - 6x = 0$, δηλ. διὰ τὰ σημεία μὲ τετμημένην $x = \frac{1}{2}y^2$.

Ἀντικαθιστώντες $x = \frac{1}{2}y^2$ εἰς τὴν εξίσωσιν τῆς καμπύ-

λης εὐρίσκουμεν $x = 2\sqrt[3]{4}$, $y = 2\sqrt[3]{2}$ ἔστω δὲ $P(2\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2})$

αὐτὸ τὸ σημεῖον. Ἀναλόγως θέτοντες $f'_x = 0$ καὶ λύν-

τες τὸ σύστημα $f=0$, $f'_x=0$ εὐρίσκουμεν τὸ σημεῖον $Q(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$, ὅπου δὲν δυνάμεθα νὰ ἐμφράσωμεν τὸ x ὡς συνάρτησιν τοῦ y εἰς μίαν περιοχὴν αὐτοῦ. Τὸ θεώρημα ἐφαρμό-
ζεται εἰς ὅλα τὰ ἄλλα σημεία τῆς καμπύλης.



Γεωμετρικαὶ ἐφαρμοχαί.

I. Ἐστω ἡ εξίσωσις $f(x,y)=0$, ἥτις πληροῖ τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0) αὐτῆς. Αὕτη ὁρίζει μίαν καμπύλην (γ) ἔχουσα εἰς καθε-
στὸν σημεῖον αὐτῆς μίαν ἐφαπτομένην. Ἐστω (x,y) ἓν τυχόν σημεῖον ἑνὸς τόξου τῆς ἐν λόγῳ
καμπύλης εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0) . Ἡ εξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης, ὡς γνωστὸν,
εἶναι:

$$Y - y = y' \cdot (X - x) \quad (1)$$

Εἶναι δέ, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \quad (2)$$

Ὅθεν ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), γράφεται: $Y - y = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} \cdot (X - x)$ ἢ

$$(X - x) \cdot f'_x(x,y) + (Y - y) \cdot f'_y(x,y) = 0 \quad (3)$$

Ἡ (3) εἶναι ἡ εξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον (x,y) .

Ἡ εξίσωσις τῆς καθέτου εἰς τὸ σημεῖον (x,y) τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης θὰ εἶναι:

$$Y - y = \frac{f'_y(x,y)}{f'_x(x,y)} \cdot (X - x) \quad \text{ἢ} \quad (X - x) \cdot f'_y(x,y) - (Y - y) \cdot f'_x(x,y) = 0.$$

Εφαρμογή: Έστω η αμπτυλή με εξίσωσιν $f(x, y) = 0$. Ζητούμεν νά εὑρωμεν τήν αμπτυλότητα αὐτῆς, ὑποθέτοντες διὰ τήν $f(x, y)$ ὅτι πληροῦνται πάσαι αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Λύσις: Ὡς γνωστόν ἡ αμπτυλότης παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$k = \frac{|y''|}{\sqrt{1+y'^2}} \quad (1)$$

Διὰ τήν εὑρεσιν τῆς y'' ἐφαρμόσομεν τόν τύπον (3) τῆς σελ. 82 ὅτε ὁ (1) δά γίνῃ:

$$k = \frac{|f_{xx}'' \cdot f_y'^2 - 2 \cdot f_{xy}'' \cdot f_x' \cdot f_y' + f_{yy}'' \cdot f_x'^2|}{(f_x'^2 + f_y'^2)^{3/2}} \quad (2)$$

§ 2. ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΥΠΟ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y) = 0$

Έστω ἡ ἐξίσωσις $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y) = 0$. Ἐάν διὰ καθε σημείου $(x_1, x_2, \dots, x_q) \in I^q \subseteq \mathbb{R}^q$ ἡ ἐξίσωσις, ὡς πρὸς y , $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y) = 0$ ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν, τότε καὶ αὐτόν τόν τρόπον ὀρίζεται τό y ὡς συνάρτησις τῶν (x_1, x_2, \dots, x_q) , ἥτοι: $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)$ (ἐπιλύουσα συνάρτησις), ἥτις καλεῖται πεπλεγμένη συνάρτησις ὀρισμένη ὑπό τῆς ἐξίσωσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y) = 0$. Προφανῶς διὰ καθε $(x_1, x_2, \dots, x_q) \in I^q \subseteq \mathbb{R}^q$ ἔχομεν:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_q, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)) = 0.$$

Ἐάν λοιπόν συμβαίνουν τ' ἀνωτέρω δυνάμεθα νά εἰπωμεν ὅτι, ἡ ἐξίσωσις $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y) = 0$ εἶναι ταυτόσημος πρὸς τήν $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)$.

Τό θεώρημα IV - 1-1 ἐπευτείνεται καὶ εἰς τὰς ἀνωτέρω ὀριθεύσας πεπλεγμένας συναρτήσεις. Παραδέτομεν τοῦτο ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα IV - 2-1a. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y)$ καὶ $f_y'(x_1, x_2, \dots, x_q, y)$ εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $(E_1, E_2, \dots, E_q, y_0)$. Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι διὰ καθε $i = 1, 2, \dots, q$ ἡ ἀίστη τῶν f_{x_i}' εἶναι συνεχὴς εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $(E_1, E_2, \dots, E_q, y_0)$. Ἐστω δὲ, $f(E_1, E_2, \dots, E_q, y_0) = 0$ καὶ $f_y'(E_1, E_2, \dots, E_q, y_0) \neq 0$. Τότε ὑπάρχουν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ h καὶ k (τό h ἐφαρτᾶται ἐν τοῦ k). Τοιοῦτοι, ὥστε:

α) Διὰ καθε (x_1, x_2, \dots, x_q) μέ $|x_i - E_i| < h, i = 1, 2, \dots, q$ ὑπάρχει εἰς μόνον ἀριθμὸς y μέ $|y - y_0| < k$ ἱκανοποιῶν τὴν ἐξίσωσιν $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y) = 0$.

β) Ἐάν $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)$ εἶναι ἡ ὑπό τῆς ἐξίσωσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_q, y) = 0$ ὀρισμένη πεπλεγ-

μένη συνάρτησις, τότε η φ και πάσαι αι πρώται παράγωγοι φ'_{x_i} , $i=1,2,\dots,q$ είναι συνε-
χείς διά υάθε $|x_i - \xi_i| < h$ και επί πλέον ἔχομεν:

$$f'_y [x_1, x_2, \dots, x_q, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)] \neq 0 \quad \text{και}$$

$$\varphi'_{x_i} = - \frac{f'_{x_i} [x_1, x_2, \dots, x_q, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)]}{f'_y [x_1, x_2, \dots, x_q, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_q)]}, \quad i=1,2,\dots,q$$

ἐάν $|x - x_i| < h$, $i=1,2,\dots,q$.

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει, και κυρίως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν, ἡ περίπτωση τῆς ἐξισώσεως $f(x, y, z) = 0$.

Κρίνομεν σύοπιμον νά ἐπαναλάβωμεν τὴν διατύπωσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἰς τὴν εἰδιωτὴν ταύτην περίπτωσιν:

Θεώρημα IV -2-1β. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x, y, z)$ καθὼς και αἱ πρώται πα-
ράγωγοι αὐτῆς f'_x, f'_y, f'_z εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0) . Ἐστω
δὲ ἐπὶ πλέον $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ και $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Τότε ὑπάρχουν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ h και k τοιοῦτοι, ὥστε:

α) Διὰ υάθε (x, y) μὲ $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < h$ ὑπάρχει εἰς και μόνον εἰς ἀριθμὸς z μὲ
 $|z - z_0| < k$ ἱκανοποιῶν τὴν ἐξίσωσιν: $f(x, y, z) = 0$.

β) Ἐστω $z = \varphi(x, y)$ ἡ ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ὀρισμένη πεπλημένη συνάρτησις,
τότε ἡ φ καθὼς και αἱ πρώται παράγωγοι φ'_x, φ'_y αὐτῆς εἶναι συνεχεῖς διὰ υάθε $|x - x_0| < h$,
 $|y - y_0| < h$ και ἐπὶ πλέον ἰσχύει:

$$f'_z [x, y, \varphi(x, y)] \neq 0 \quad \text{και} \quad z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{f'_x}{f'_z}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{f'_y}{f'_z}$$

διὰ υάθε $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < h$.

Παρατήρησις. Ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι πληροῦνται αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος IV-2-1β,
τότε ἔχομεν:

$$f'_x + f'_z \cdot z'_x = 0 \quad \text{και} \quad f'_y + f'_z \cdot z'_y = 0$$

Ἄν τῶρα ὑποτεθῇ ὅτι ὑπάρχουν και ὅλαι αἱ μερικαὶ παράγωγοι δευτέρας τάξεως
τῆς $f(x, y, z)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0) και εἶναι συνεχεῖς, τότε πα-
ραγωγίζοντες τὴν πρώτην μὲν ὡς πρὸς x, y και τὴν δευτέραν ὡς πρὸς y , συμφῶ-

ως προς τον κανόνα παραγωγίσεως συνδέτου συναρτήσεως, λαμβάνομεν τὰς σχέσεις:

$$f''_{xx} + 2f''_{xz} \cdot Z'_x + f''_{zz} \cdot Z'^2_x + f'_z \cdot Z''_{xx} = 0$$

$$f''_{xy} + f''_{xz} \cdot Z'_y + f''_{yz} \cdot Z'_x + f''_{zz} \cdot Z'_x Z'_y + f'_z \cdot Z''_{xy} = 0$$

$$f''_{yy} + 2f''_{yz} \cdot Z'_y + f''_{zz} \cdot Z'^2_y + f'_z \cdot Z''_{yy} = 0$$

Ἐξ αὐτῶν προσδιορίζομεν τὰς: $Z''_{xz}, Z''_{xy}, Z''_{yy}$

Ἀναλόγως υπολογίζομεν, μετὰ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὑπάρχουν ὅλαι αἱ μεριμαί παραγώγοι τρίτης τάξεως τῆς $f(x, y, z)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0) καὶ εἶναι συνεχεῖς, τὰς παραγώγους τρίτης τάξεως τῆς $z = \varphi(x, y)$.

Παράδειγμα: Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $f(x, y, z) \equiv 4x^5 + 3y^3 z^2 + yz^4 - z^3 = 0$.

Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ, ἐὰν ὑπάρχη, ἡ ὑπ' αὐτῆς πεπληρωμένη συνάρτησις: $z = \varphi(x, y)$ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Λύσις: Ἐὰν θέσωμεν $y = z = 1$ εὐρίσκομεν $x = -\sqrt[5]{3/4}$. Ὅθεν: $f(-\sqrt[5]{3/4}, 1, 1) = 0$. Ἐπὶ πλέον

$$f'_z = 6y^3 z + 4yz^3 - 3z^2 \text{ καὶ } f'_z(-\sqrt[5]{3/4}, 1, 1) \neq 0.$$

Ἐπομένως ἐφαρμόζεται τὸ προηγουμένον θεώρημα, ἥτοι: Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ὀρίζει μίαν πεπληρωμένην συνάρτησιν, τὴν $z = \varphi(x, y)$, ὠρισμένην εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $(-\sqrt[5]{3/4}, 1)$, δηλ. ὑπάρχουν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ h καὶ k τοιοῦτοι, ὥστε διὰ καθε

$$|x - (-\sqrt[5]{3/4})| = |x + \sqrt[5]{3/4}| < h \text{ καὶ } |y - 1| < h \text{ νὰ ἔχωμεν: } |\varphi(x, y) - 1| < k.$$

Γενιωτέρον: ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ὀρίζει μίαν πεπληρωμένην συνάρτησιν καὶ διὰ καθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Πράγματι: ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις $f(x, y, z) = 0$, θεωρουμένη ὡς πρὸς z , εἶναι μίᾳ ἐξίσωσις περιττοῦ βαθμοῦ, συνεπῶς αὕτη ἐπιδέχεται μίαν τουλάχιστον πραγματικὴν ρίζαν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν πλείονων τῆς μιᾶς πραγματικῶν ριζῶν λαμβάνομεν τὴν ρίζαν τῆς μερίστης τετμημένης. Οὕτω διὰ καθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ἔχομεν ἓν μόνον $z \in \mathbb{R}$, ἥτοι ἡ ἐν λόγῳ ἀντιστοιχία δημιουργεῖ τὴν συνάρτησιν $z = \varphi(x, y)$ διὰ καθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Δὲν δυνάμεθα ὅμως, ὅπως εἶδομεν καὶ εἰς προγενέστερον παράδειγμα νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὴν τὴν συνάρτησιν μετὰ τὴν βοήθειαν στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Ἐδῶ ἀπλῶς γνωρίζομεν τὴν ὑπαρεῖν τῆς. Ἐπὶ πλέον δὲ δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν τὰς $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Εἶναι δὲ αὗται:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{20x^4}{6y^3 z + 4yz^3 - 3z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z} = -\frac{9y^2 z + z^3}{6y^3 + 4yz^3 - 3z^2}.$$

Γεωμετρικαί εφαρμογαί:

*Εστω ἡ εἰσώσις $f(x, y, z) = 0$. Πληρουμένων τῶν ὑποθέσεων τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος αὕτη ἐπιλύεται μονοσημάντως ὡς πρὸς z , ἥτοι: $z = \varphi(x, y)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0) , ὅπου $f(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Ἡ εἰσώσις $z = \varphi(x, y)$ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων σχηματίζει μίαν ἐπιφάνειαν (Σ) , ἥτις εἰς τὸ σημεῖον $(x_0, y_0, z_0 = \varphi(x_0, y_0))$ αὐτῆς ἔχει ἓν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον, τοῦ ὁποῖου ἡ εἰσώσις εἶναι:

$$z - z_0 = -\frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)} (x - x_0) - \frac{f'_y(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)} (y - y_0)$$

ἢ

$$(x - x_0) f'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Ἐφαρμογή: *Εστω ἡ εἰσώσις τῆς ἐπιφανείας:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \quad (\text{Μονόχωνον ὑπερβολοειδές})$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ εἰσώσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0, z_0) αὐτοῦ.

Λύσις: *Ἐχομεν: $f'_x(x_0, y_0, z_0) = \frac{2x_0}{a^2}$, $f'_y(x_0, y_0, z_0) = \frac{2y_0}{b^2}$ καὶ $f'_z(x_0, y_0, z_0) = -\frac{2z_0}{\gamma^2}$. Ἡ δὲ εἰσώσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου θὰ εἶναι:

$$(x - x_0) \frac{2x_0}{a^2} + (y - y_0) \frac{2y_0}{b^2} - (z - z_0) \frac{2z_0}{\gamma^2} = 0 \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} - \frac{z \cdot z_0}{\gamma^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{\gamma^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} - \frac{z \cdot z_0}{\gamma^2} = 1$$

† Παρατήρησις:

→ *Ἐὰν $f'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) = f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, τότε ἡ ἐπιφάνεια δὲν ἔχει ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0, z_0) καὶ καλεῖται κωνικὸν σημεῖον. Π.χ. ἡ κορυφὴ κωνικῆς ἐπιφανείας εἶναι κωνικὸν σημεῖον.

§ 3. ΙΑΚΟΒΙΑΝΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ - ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α'. Ἰακωβιαναί ὀρίζουσαι:

*Εστώσαν αἱ πραγματικαὶ συναρτήσεις $f_i(x, x_1, \dots, x_n)$ $i=1, 2, \dots, q$ ὁριζόμεναι εἰς ἓν ἀνοικτὸν ὑπο-

σύνολον U του \mathbb{R}^q ναί ἔχουσαι μεριυάς παραγώρους πρώτης τάξεως συνεχεῖς εἰς τὸ ἐν λόγω σύνολον. Τὴν κατωθι σχηματισομένην ὀρίσουσαν:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \frac{\partial f_q}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_q} \end{vmatrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} f'_{1x_1} & f'_{1x_2} & \dots & f'_{1x_q} \\ f'_{2x_1} & f'_{2x_2} & \dots & f'_{2x_q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{qx_1} & f'_{qx_2} & \dots & f'_{qx_q} \end{vmatrix}$$

καλοῦμεν Ἰακωβιανήν (Jacobian)* τῶν συναρτήσεων f_1, f_2, \dots, f_q ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς x_1, x_2, \dots, x_q καὶ τὴν συμβολίζομεν συντόμως δι' ἑνὸς τῶν συμβόλων:

$$J(x_1, x_2, \dots, x_q) \text{ ἢ } \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_q)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_q)}.$$

Αἱ Ἰακωβιαναὶ ὀρίσουσαι ἔχουν μεριυάς ιδιότητες αἵτινες ὁμοιάζουν μετὰ τὰς ιδιότητες τῆς παραγώρου.

Παραθέτομεν μίαν τοιαύτην χαρακτηριστικὴν ιδιότητα:

Ἰδιότης IV - 3-1. Ἐστωσαν αἱ συναρτήσεις $f_i(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ὠρισμέναι ἐπὶ ἑνὸς ἀνοιτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ \mathbb{R}^q καὶ ἔχουσαι ἐπ' αὐτοῦ μεριυάς παραγώρους α' τάξεως συνεχεῖς. Ἐστωσαν ἐπὶ πλεόν αἱ συναρτήσεις $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_q)$, $i=1, 2, \dots, q$ ὠρισμέναι ἐπὶ τοῦ ἀνοιτοῦ ὑποσυνόλου V τοῦ \mathbb{R}^q καὶ τοιαῦται, ὥστε διὰ καθε $(t_1, t_2, \dots, t_q) \in V$ τὸ σημεῖον $(x_1, x_2, \dots, x_q) \in U$. Ἐπὶ πλεόν ὑποθέτομεν ὅτι αἱ $x_i(t_1, t_2, \dots, t_q)$ ἔχουν ἐπὶ τοῦ V μεριυάς παραγώρους α' τάξεως συνεχεῖς. Τότε διὰ τὰς συνθετοὺς συναρτήσεις:

$$f_i(x_1(t_1, t_2, \dots, t_q), \dots, x_q(t_1, t_2, \dots, t_q)), \quad i=1, 2, \dots, q \quad \text{ισχύει:}$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_q)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_q)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_q)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_q)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_q)} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις: θεωροῦμεν τὸ στοιχεῖον τῆς ὀρίσουσης τοῦ πρώτου μέλους τὸ κατέχον τὴν i -γραμμὴν καὶ j -στήλην, τοῦτο εἶναι τὸ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Τὸ δεῦτερον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος εἶναι ὁμοίως μία ὀρίσουσα q -ῆς -τάξεως, ὡς γινόμενον ὀρίσουσῶν q -ῆς -τάξεως. Ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς θεωρίας τῶν ὀρίσουσῶν τὸ στοιχεῖον τὸ κατέχον τὴν i -γραμμὴν

* Ἐκ τοῦ ὀνόματος τοῦ Γάλλου Μαθηματικοῦ Carl Jacobi (1804-1851).

και j-στήλην εύρισκεται εάν πολλαπλασιάσωμεν αντίστοιχως τα στοιχεία της i-γραμμής της πρώτης όρισούσης επί τα στοιχεία της j-στήλης της δευτέρας όρισούσης και προσθέσωμεν τα εξαγόμενα, ήτοι έχομεν:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_q} \frac{\partial x_q}{\partial t_j}$$

Τό τελευταίον άθροισμα ισούται πρός $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}$, έξ ου τό ύποδείκνυτον.

Β' Σύστημα πεπληρμένων συναρτήσεων: Έστω τό σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, u, v) &= 0 \\ g(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

των δύο εξισώσεων μέ τέσσαρας άγνώστους τους x, y, u, v ώρισμένον εις έν άνοιχτόν ύποσύνολον U του χώρου $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.

Τό σύστημα των δύο πραγματιυών συναρτήσεων:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y) \\ v &= f_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ώρισμένον εις έν άνοιχτόν ύποσύνολον \mathcal{T} του \mathbb{R}^2 δά υαλήται *ρήσις* του συστήματος (1), ως πρός τās μεταβλητάς u, v, εάν διά καθε (x, y) $\in \mathcal{T}$ ισχύη:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) &= 0 \\ g(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Άς ύποθέσωμεν ήδη ότι πληρούνται αι προϋποθέσεις αύται υπό τās όποιās ή $f=0$ δύναται νά ήηδῆ μονοσημάντως ως πρός u, συναρτήσῃ των x, y, v και δά γράφωμεν τότε: $u = \varphi(x, y, v)$ (4).

Άπολούθως άντιυαδιστώντες αύτήν τήν τιμήν του u εις τήν εξίσωσιν $g=0$ επιτυχάνομεν μίαν εξίσωσιν περιέχουσαν ως άγνώστους τους x, y, v, ήτοι:

$$g(x, y, \varphi(x, y, v), v) = 0.$$

Συμφώνως πρός τό θεωρήμα των πεπληρμένων συναρτήσεων, τό όποιον ύποθέταμεν ότι δύναμεθα νά τό εφαρμόσωμεν, εξαγομεν, έυ της τελευταίας σχέσεως, τήν πεπληρμένην συνάρτησιν:

$$v = f_2(x, y) \quad (5)$$

Άντιυαδιστώντες τό v έυ της (5) εις τήν (4) λαμβάνομεν:

$$u = \varphi(x, y, f_2(x, y))$$

και τήν όποιαν γράφομεν ούτω: $u = f_1(x, y)$ (6)

Εν τῶν (5) καὶ (6) παρατηροῦμεν ὅτι, ἔχομεν ἐκφράσεις αὐτῶν συναρτήσεων τῶν x καὶ y .

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) γράφεται, λόγω τῶν (5) καὶ (6), οὕτως:

$$f(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0$$

$$g(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0.$$

Υποθέτοντες ὅτι αἱ f, g ἔχουν μεριμνὰς παραγώγους ὡς πρὸς x, y, u, v συνεχεῖς, ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα παραγωγίσεως συνθέτου συναρτήσεως, λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} f'_x + f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x &= 0 \\ g'_x + g'_u \cdot u'_x + g'_v \cdot v'_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Λύνοντες τὸ γραμμικὸν σύστημα (7) μετὰ ἀνγνώστους τοὺς u'_x, v'_x μετὰ τὴν μέθοδον τοῦ Cramer λαμβάνομεν:

$$u'_x = - \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_v \\ g'_x & g'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}} = - \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, u)} : \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}, \quad v'_x = - \frac{\begin{vmatrix} f'_x & f'_u \\ g'_x & g'_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}} = - \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, x)} : \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)}$$

Ἀναλόγως υπολοισόμεν τὰς μεριμνὰς παραγώγους u'_y, v'_y

Τὸ ἐπόμενον θεώρημα μᾶς δεικνύει ὑπὸ ποίας συνθήκας τὰ ἀνωτέρω βήματα ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος εἶναι, τουλάχιστον θεωρητικῶς, δυνατόν.

Θεώρημα IV-3-1. Υποθέτομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(x, y, u, v)$ καὶ $g(x, y, u, v)$ εἶναι συνεχεῖς καὶ ἔχουν συνεχεῖς αἰ-τάξεως μεριμνὰς παραγώγους εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, u_0, v_0) . Ἐπίσης υποθέτομεν ὅτι $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$

$$\text{καὶ } D_0 = \begin{vmatrix} f'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) & f'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \\ g'_u(x_0, y_0, u_0, v_0) & g'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Τότε ὑπάρχουν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ h, k_1 καὶ k_2 τοιοῦτοι, ὥστε:

α) Διὰ πᾶθε (x, y) με $|x - x_0| < h, |y - y_0| < h$, ὑπάρχει μία μονοσήμαντος λύσις ὡς πρὸς (u, v) τῶν ἐξισώσεων:

$$f(x, y, u, v) = 0, g(x, y, u, v) = 0$$

με $|u - u_0| < k_1$ καὶ $|v - v_0| < k_2$.

Παριστῶμεν αὐτὰς τὰς λύσεις ὑπὸ τῶν: $u = f_1(x, y), v = f_2(x, y)$.

β) Αι συναρτήσεις f_1 και f_2 είναι συνεχείς με πρώτους παραγώγους συνεχείς και ισχύουν οι κατωθι τύποι:

$$u'_1 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}, \quad u'_2 = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} f'_x & f'_z \\ g'_x & g'_z \end{vmatrix}$$

όπου, $D = f'_u \cdot g'_v - f'_v \cdot g'_u$

Αναλόγως εύρισκονται αι u'_3, u'_4 . Θεωρήματα αναστροφής συνεπιδέχεται
ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΩΛΕΙΟ.

Απόδειξις: Η απόδειξις του θεωρήματος συνίσταται εις την διαδοχικὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος IV-2-1α τῶν πεπλεγμένων συναρτήσεων. Ἐπειδὴ $D \neq 0$ ἔπεται ὅτι αι g'_u, g'_v δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἀμφότεραι μηδέν εις τὸ σημεῖον (x_0, y_0, u_0, v_0) . ὑποθέτωμεν ὅτι $g'_u \neq 0$ ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος ἐὰν $g'_v \neq 0$. Τότε ἐκ τοῦ θεωρήματος IV-2-1α συμπεραίνομεν ὅτι ὑπάρχουν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ m καὶ τ τοῦτοι, ὥστε διὰ $|x-x_0| < m, |y-y_0| < m, |u-u_0| < m$ καὶ $|v-u_0| < \tau$ ἡ ἔξισωσις $g(x, y, u, v) = 0$ (1) νὰ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$v = \varphi(x, y, u) \quad (2)$$

ὅπου ἡ συνάρτησις φ εἶναι συνεχὴς καὶ μετὰ πρῶτους παραγώγους συνεχείς εις τὴν ἐν λόγῳ περιοχὴν. Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν:

$$\varphi'_u(x, y, u) = -\frac{g'_u[x, y, \varphi(x, y, u)]}{g'_v[x, y, \varphi(x, y, u)]} \quad (3)$$

(Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ θεωρήματος IV-2-1α ἀντικαταστήσαμεν τὸ v ὑπὸ τοῦ m , τὸ k ὑπὸ τοῦ τ , τὸ (x_1, x_2, x_3) ὑπὸ τοῦ (x, y, u) καὶ τὴν μεταβλητὴν y ὑπὸ τῆς u).

Ἡστὶ ἄς ὀρίσωμεν: $\sigma(x, y, u) = f(x, y, u, \varphi(x, y, u)) \quad (4)$

Ἡ συνάρτησις σ ἔχει ὀρισθῇ διὰ:

$$|x-x_0| < m, |y-y_0| < m \text{ καὶ } |u-u_0| < m$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς διαφορίσεως εις τὴν συνάρτησιν σ , δεδομένης ὑπὸ τῆς (4), λαμβάνομεν $\sigma'_u = f'_u + f'_v \cdot \varphi'_u$ ἡ δὲ δὴ τῆς (3), ἔχομεν:

$$\sigma'_u = f'_u + f'_v \left(-\frac{g'_u}{g'_v} \right) \quad (5)$$

Εἶναι δέ:

$$\sigma'_u(x_0, y_0, u_0) = \frac{f'_u g'_v - f'_v g'_u}{g'_v(x_0, y_0, u_0, v_0)} = \frac{D_0}{g'_v(x_0, y_0, u_0, v_0)} \neq 0. \quad (6)$$

Ἐνεκα τῆς (6) δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα τῶν πεπλεγμένων συν-

αρθήσεων εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\sigma(x, y, u) = 0$$

Ὅθεν ὑπάρχουν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ m' καὶ τ' μὲ $m' \leq m$, $\tau' \leq \tau$ τοιοῦτοι, ὥστε διὰ:

$$|x - x_0| < m', \quad |y - y_0| < m' \quad \text{καὶ} \quad |u - u_0| < \tau'$$

ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις νὰ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$u = f_1(x, y) \quad \text{μὲ} \quad |x - x_0| < m', \quad |y - y_0| < m'.$$

Ἐπὶ πλέον ἡ f_1 καθὼς καὶ αἱ πρῶται μεριμαὶ παράγωγοι αὐτῆς ὡς πρὸς x, y εἶναι συνεχεῖς. Λαβόντες ὑπ' ὄψιν τὴν (2) καὶ ἐὰν θεώσωμεν:

$$v = \varphi(x, y, f_1(x, y)) \equiv f_2(x, y) \quad \text{διὰ} \quad |x - x_0| < m', \quad |y - y_0| < m'.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ f_2 καθὼς καὶ αἱ πρῶται μεριμαὶ παράγωγοι αὐτῆς ὡς πρὸς x, y εἶναι συνεχεῖς.

Παράδειγμα: Δίδεται τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$f(x, y, u, v) \equiv x^2 - y^2 - u^2 + v^2 + 4 = 0$$

$$g(x, y, u, v) \equiv 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^2 + 8 = 0$$

Δείξατε ὅτι εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου: $P_0: \{x=2, y=-1, u=2, v=1\}$

δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $u = f_1(x, y), v = f_2(x, y)$.

Εὗρετε ἐν συνεχείᾳ τὰς μεριμαὶ παραγώγους u'_x, u'_y, v'_x, v'_y εἰς τὸ σημεῖον P_0 .

Λύσις: Ἔχομεν:

$$f'_u = -2u, \quad f'_v = 2v, \quad g'_u = -4u, \quad g'_v = 6v$$

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = -2y, \quad g'_x = 2y, \quad g'_y = 2x + 2y$$

Εἰς τὸ σημεῖον P_0 ἔχομεν:

$$D_0 = f'_u g'_v - f'_v g'_u \big|_{P_0} = -128$$

Ἐπειδὴ αἱ f καὶ g εἶναι πολυωνυμικοὶ ἐκφράσεις καὶ ἐπειδὴ $D_0 \neq 0$ πᾶσαι αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος IV-3-1 πληροῦνται. Συνεπῶς τὰ u καὶ v δύναται νὰ ἐκφρασθῶν ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$u = f_1(x, y) \quad \text{καὶ} \quad v = f_2(x, y).$$

Εἶναι δέ:

$$u'_x = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} f'_x & f'_v \\ g'_x & g'_v \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} 2x & 2v \\ 2y & 6v \end{vmatrix} = -\frac{4}{D} \begin{vmatrix} x & v \\ y & 3v \end{vmatrix}$$

καὶ εἰς τὸ σημεῖον P_0 θὰ ἔχωμεν:

$$u'_x \big|_{P_0} = -\frac{4}{D_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-4 \cdot 13}{-128} = \frac{13}{32}.$$

Ἀναλόγως εὐρίσκουμεν :

$$u'_x|_{p_*} = \frac{7}{16}, \quad u'_y|_{p_*} = \frac{5}{32}, \quad u'_z|_{p_*} = -\frac{1}{16}$$

Ἡ ἔντεθείσα θεωρία τῶν πεπιλεγμένων συναρτήσεων δύναται νὰ ἐπενταθῇ εὐνόως καὶ εἰς ἓνα σύστημα k ἐξισώσεων τῶν $q + k$ μεταβλητῶν, ἥτοι εἰς ἓν σύστημα τῆς μορφῆς :

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_q, u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_q, u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_q, u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ἦσθι δὲ ἐξετάσωμεν ὑπὸ ποίας προϋποθέσεις το ἀνωτέρω σύστημα ἐπιδέχεται λύσιν
ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς u_1, u_2, \dots, u_k .

Σχετιωώς ισχύει τό υάτωδι θεώρημα ύπάρξεως πεπλεγμένων συναρτήσεων, τό οποίον παραδέτομεν άνευ άποδείξεως :

Θεώρημα IV - 3-2. Υποθέτομεν ότι αι f_1, f_2, \dots, f_k είναι συναρτήσεις των $q+k$ μεταβλη-
τών $x_1, x_2, \dots, x_q, u_1, u_2, \dots, u_k$ και επί πλέον ότι ένασση των f_i υαδώς και αι πρώται παρά-
γωγοι αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχὴν ἑνός σημείου $P_0 (E_1, E_2, \dots, E_q, n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Υποθέτομεν ἐπὶ πλέον ὅτι τὸ σημεῖον P_0 ἐπαληθεύει τὰς k ἐξισώσεις ἑτοι:

Действительные переменные $f_i(E_1, E_2, \dots, E_q, n_1, n_2, \dots, n_k) = 0, i = 1, 2, \dots, k$

και ότι η λαμβανή $D = \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)}$ είναι διάφορος του μηδενός εις το σημειον P_0 .

Τότε υπάρχουν οι δετιμοί αριθμοί η και τ τοιοῦτοι, ὥστε:

α) Διά ιαδθε (x_1, x_2, \dots, x_q) με $|x_i - \varepsilon_i| < h$ δια $i = 1, 2, \dots, q$, υπάρχει μια μοναδική λύσις (u_1, u_2, \dots, u_n) των εξισώσεων:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_q, u_1, u_2, \dots, u_k) = 0, i = 1, 2, \dots, k$$

Διὰ ταύτην $|u_j - n_j| < \tau, j = 1, 2, \dots, k$

Η δέ λύσις ορίζεται υπό των συναρτήσεων: $u_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $j = 1, 2, \dots, k$

β) Αι συναρτήσεις φ_j είναι συνεχείς εις την περιοχήν του σημείου P_0 και πληροῦν τὴν συνθήκην $\eta_j = \varphi_j(E_1, E_2, \dots, E_q), j = 1, 2, \dots, k$.

γ) Υπάρχουν αί μεριμαί παράγωγοι: $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_p}$, $p=1,2,\dots, q$ των συναρτήσεων $\Phi_i, i=1,2,\dots, k$ εἰς
τὴν περιοχὴν τοῦ P_0 καὶ προϋπάρχουν ἀν ποιε εἰσαγάγωμεν τὸ σύστημα (1) μεριμῶς

ως προς x_p και το προκύπτον σύστημα, ήται τό :

$$(2) \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_p} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_p} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_p} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_p} + \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \frac{\partial f_k}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_p} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_p} = 0 \end{cases}$$

επιλύσωμεν ως προς τας μεριυάς παραγώγους $\frac{\partial u_1}{\partial x_p}, \frac{\partial u_2}{\partial x_p}, \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x_p}$.

Παράδειγμα : Δίδεται τό σύστημα :

$$f_1 \equiv x_1^2 + 2x_2^2 - 3u_1^2 + 4u_1u_2 - u_2^2 + u_3^2 = 0$$

$$f_2 \equiv x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 + 4u_1^2 - 2u_2^2 + u_3^2 = 0$$

$$f_3 \equiv x_1^3 - x_2^3 + 4u_1^2 + 2u_2 - 3u_3^2 = 0$$

ήά υπολογισθύν αι $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$.

Λύσις : Αί υποθέσεις του ανωτέρω θεωρήματος, ως ευνόηως δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν, πληροῦνται. Δί εφαρμογής λοιπόν του συστήματος (2) του θεωρήματος εις την περίπτωσιν όπου είναι $p=1$ λαμβάνομεν, μετά τας μεριυάς παραγωρίσεις, τό ακόλουθον σύστημα :

$$2x_1 + (-6u_1 + 4u_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (4u_1 - 2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + 2u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$$1 - 4x_2 + 8u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - 4u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

$$3x_1^2 + 8u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - 6u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0$$

Τούτο είναι ένα γραμμικόν σύστημα τριών εξισώσεων μέ τρεις άγνωστους τούς: $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$ τό όποιον επιλύεται ευνόηως διά της μεθόδου του Cramer.

Εφαρμογαι :

Α'. Έστω ή συνάρτησις $z=f_3(u,v)$, ένθα $u=\varphi(x,y)$ και $v=\sigma(x,y)$.

Θεωρούμεν τό σύστημα :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x,y) - u &= 0 \\ \sigma(x,y) - v &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Εάν πληροῦνται αι υποθέσεις του θεωρήματος IV-3-1, τότε τούτο τίθεται υπό την μορφήν :

$$x=f_1(u,v) \quad y=f_2(u,v)$$

Ούτω το άρχειόν σύστημα των έξιωσεων δίδεται υπό την μορφήν:

$$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v), z = f_3(u, v) \quad (3)$$

Αι έξιώσεις (3) είναι ως γνωστόν αι παραμετρικαί έξιώσεις μιᾶς επιφανείας.

Αι μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ εύρισκονται διά παραγωγίσεως τῆς συνθέτου συναρτήσεως $z = f_3(u, v)$.

ἤτοι:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Αι μερικαί παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ και $\frac{\partial v}{\partial y}$ εύρισκονται διά παραγωγίσεως τῶν έξιωσεων: $x = f_1(u, v), y = f_2(u, v)$ ως πρὸς x και y και ἐν συνεχείᾳ ἐπιλύσεως τοῦ προκύπτοντος συστήματος τῶν τεσσάρων έξιωσεων, ἤτοι:

$$1 = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad 0 = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad 1 = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Β' Γεωμετρικαί εφαρμογαί:

$$\begin{aligned} \text{Ἐστω τὸ σύστημα τῶν έξιωσεων: } & \left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} (1) \end{aligned}$$

Ἐστω καὶ ἓνα σημεῖον $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (2)$$

$$\text{ὑποθέτομεν ὅτι: } \begin{vmatrix} f'_y(x_0, y_0, z_0) & f'_z(x_0, y_0, z_0) \\ g'_y(x_0, y_0, z_0) & g'_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

Συμφώνως πρὸς τὰ εὐτεθέντα εἰς τὴν §3 τὸ σύστημα (1) ὀρίσει μονοσημάντως τὰ y καὶ z ὡς συναρτήσεις τοῦ x , αἵτινες ἔχουν πρῶτας παραγώγους συνεχεῖς εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου x_0 .

Συνεπῶς τὸ ἀνωτέρω σύστημα ὀρίσει διὰ (x, y, z) ἀνήκοντα εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0, z_0) μίαν αμψύστην (γ) ἔχουσα μίαν εφαπτομένην εἰς ἕναστον σημεῖον αὐτῆς.

Διά παραγωγίσεως τοῦ συστήματος (1) ὡς πρὸς x λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ἐπειδὴ πητροῦται ἡ σχέση (3) δυνάμεθα νὰ υπολογίσωμεν, ἐκ τοῦ γραμμικοῦ συστήματος (4), τὰς $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, θεωρουμένων ὡς ἀγνώστων κατὰ συνέπειαν δὲ νὰ εὕρωμεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἐν λόγῳ παραγώγων εἰς τὸ σημεῖον $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ἐξ ἄλλου ἡ ἐξίσωσις $f(x, y, z) = 0$ παριστᾷ μία ἐπιφάνειαν (E) διερχομένη διὰ τοῦ σημείου M_0 . Ἡ ἐν λόγῳ ἐπιφάνεια ἔχει εἰς τὸ σημεῖον M_0 ἓν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (P) τοῦ ὁποῖου ἡ ἐξίσωσις εἶναι:

$$(X-x_0) f'_x(x_0, y_0, z_0) + (Y-y_0) f'_y(x_0, y_0, z_0) + (Z-z_0) f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (5)$$

Ὀμοίως ἡ $g(x, y, z) = 0$ παριστᾷ μίαν ἐπιφάνειαν (S) διερχομένη διὰ τοῦ σημείου M_0 καὶ ἥτις ἔχει ἓν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (Π) τοῦ ὁποῖου ἡ ἐξίσωσις εἶναι:

$$(X-x_0) g'_x(x_0, y_0, z_0) + (Y-y_0) g'_y(x_0, y_0, z_0) + (Z-z_0) g'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (6)$$

Ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (P) καὶ (Π) εἶναι μία εὐθεῖα διερχομένη, προφανῶς, διὰ τοῦ σημείου M_0 καὶ ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν ἐπιφανειῶν εἰς τὸ M_0 , συνεπῶς καὶ τῆς τομῆς των, δηλ. τῆς καμπύλης (γ).

Ὅθεν: τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (5) καὶ (6) παριστᾷ τὰς ἐξισώσεις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ M_0 , τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις δίδονται ὑπὸ τοῦ συστήματος (1)

§4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΙΣ *

Ἐστω ἓν πεπερασμένον σύνολον συναρτήσεων $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, ἥτοι ἔστωσαν n τὸ πλῆθος πραγματικαὶ συναρτήσεις:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_q), f_2(x_1, x_2, \dots, x_q), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_q) \quad (1)$$

ὁρισμένοι ἐπὶ τοῦ συνόλου $T \subset \mathbb{R}^q$ καὶ μὲ μεριμνὰς παραγώγους συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ συνόλου T .

Ὁρισμός IV - 4-1. Θὰ λέρωμεν ὅτι τὸ σύνολον S εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρημένον ἐπὶ τοῦ T , εἴτε ἄλλως αἱ συναρτήσεις (1) εἶναι συναρτησιακῶς ἐξηρημέναι,

* Ἡ παρούσα παράγραφος ἀναπτύσσεται ὅταν συντόμως.

συντόμως έξηρητημένα έπί του \mathcal{T} , τότε και μόνον τότε, αν αι συναρτήσεις $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_q)$, $i=1, 2, \dots, n$ εις ένα στον σημειον $(x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^q$ επαληθεύουν μιαν ή περισσότερας σχέσεις της μορφής:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0 \quad (2)$$

αι οποια δέν περιέχουν ιαμίαν από τάς μεταβλητάς x_1, x_2, \dots, x_q .

Ειδιώς αν ή (2) τίθεται υπό την μορφήν:

$$\varphi_j = F_j(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_n) \quad (3)$$

τότε λέγομεν ότι ή συναρτησις φ_j είναι συναρτησιαώς έξηρητημένη, συντόμως έξαρ-
τάται από τάς συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \dots, \varphi_n$.

Παράδειγμα: Αι τρεις συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varphi_2(x, y, z) = x + y + z, \quad \varphi_3(x, y, z) = xy + yz + zx$$

είναι συναρτησιαώς έξηρητημένα έπί του \mathbb{R}^3 ιαδόσον, προφανώς, επαληθεύουν τήν σχέσην:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \equiv \varphi_1^2 - \varphi_2 - 2\varphi_3 = 0.$$

Διατυπούμεν ιατωτέρω, χωρίς απόδειξιν μιαν πρότασιν, ήτις παρέχει μιαν ίαντήν και άναγκαίαν συνθήκην, ίνα η τό πλήθος συναρτήσεων είναι συναρτησιαώς έξηρητη-
μένα.

Πρότασις IX - 4-1. Ίανή και άναγκαία συνθήκη, ίνα η συναρτήσεις η άνεξαρτήτων μεταβλητών:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ώρισμένα έπί ένος συνόλου $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$ μέ μεριμιάς πάραυρους συνεχείς έπί του \mathcal{T} είναι συ-
ναρτησιαώς έξηρητημένα έπί του \mathcal{T} , είναι ή ιαμωθιανή:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0, \text{ δια } \text{ια } \text{α } \text{δε } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n.$$

Παράδειγμα: Αι συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x, y, z) = 2x - y + 3z, \quad \varphi_2(x, y, z) = 6x + 8y - 2z - 1, \quad \varphi_3(x, y, z) = 3x + 4y - z$$

ώρισμένα έπί του \mathbb{R}^3 είναι συναρτησιαώς έξηρητημένα έπί του \mathbb{R}^3 .

Πράγματι:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 6 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ευκόλως διαπιστούμεν ότι: $\varphi_3 = 2\varphi_1 - 1$

Όρισμός IV-4-2. Θα λέγουμε ότι το σύνολο S είναι συναρτησιαώς ανεξάρτη-
τον, αλλιώς αί συναρτήσεις (1) είναι συναρτησιαώς ανεξάρτητα επί του \mathcal{T} , τότε
και μόνον τότε, αν δεν επαληθεύουν ούδεμίαν σχέση της μορφής (2) ή (3) επί του \mathcal{T} .

Σχετιώς ισχύει η υάτωδι:

Πρότασις IV-4-2 Εάν αί συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, ώρισμέναί επί του συνόλου $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$,
έχουν μεριυάς παραγώνους συνεχείς επί του \mathcal{T} , τότε διά νά είναι αὗται συναρτησιακώς
ανεξάρτητα επί του \mathcal{T} πρέπει και άρκει διά υάθε σημείον του \mathcal{T} νά ισχύη η συνθήκη:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$$

Παράδειγμα 1% Αί συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varphi_2(x, y, z) = x y z, \quad \varphi_3(x, y, z) = x + y + z$$

ώρισμέναί επί του \mathbb{R}^3 μέ $x^2 \neq y^2 \neq z^2 \neq 0$ είναι συναρτησιακώς ανεξάρτητα επί του \mathbb{R}^3 .

Πάγματι: $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(x, y, z)} \neq 0$ επί του \mathbb{R}^3 .

Παράδειγμα 2% Αί συναρτήσεις:

$$\varphi_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad \varphi_2(x, y) = 2xy$$

ώρισμέναί επί του \mathbb{R}^2 είναι συναρτησιακώς ανεξάρτηταί επί του $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Πάγματι: $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0$ διά $(x, y) \neq (0, 0)$

§5. ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑΙ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΣΗΜΕΙΟΥ

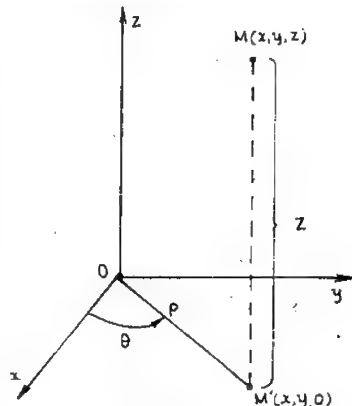
I. Κυλινδρικοί συντεταγμένοι:

*Έστω $ox\eta z$ ένα τρισσορδογώνιον σύστημα
άξόνων του χώρου \mathbb{R}^3 . Έστωσαν τό σημείον
 $M(x, y, z)$ αὐτοῦ μέ $(x, y) \neq (0, 0)$ και $M'(x, y, 0)$
ή προβολή του M επί του επιπέδου oxy (βλ. Σχ. 1).

θεωρούμεν τό σεῦρος (ρ, θ) , όπου $\rho > 0$ και
 $\theta \in [0, 2\pi)$, τών πολυιων συντεταγμένων του M'
ώς πρὸς τό επίπεδον oxy

Η τριάς (ρ, θ, z) καλεῖται σύστημα κυλιν-
δρικών συντεταγμένων του M .

Αὕτη προσδιορίζει πλήρως τήν θέσιν του M , εἰς τόν χώρον \mathbb{R}^3 . Σχ 1



Προφανώς ισχύουν οι υάτωδι τύποι οι συνδέοντες τās κυλινδριάς με τās καρτεσιανάς συντεταγμένες του Μ.

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z.$$

Αντιστρόφως εάν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $x \neq 0$, τότε εύκολως διαπιστώνεται ότι:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{\rho}) & \text{δία } x > 0 \\ \pi - \arccos(\frac{x}{\rho}) & \text{» } x < 0 \end{cases} \quad \text{και } z = z.$$

Διάφοροι ειδικοί περιπτώσεις:

1%/ Η Εξίσωσις $\rho = \rho_0$ ή όπερ ισοδυνάμως τό σύνολον $A = \{(\rho, \theta, z) : \rho = \rho_0\}$, παριστᾷ εἰς τό σύστημα τῶν κυλινδριῶν συντεταγμένων ἕναν ὁρδόν κυλινδρόν.

2%/ Η Εξίσωσις $\theta = \theta_0$ παριστᾷ εἰς τό ἄνωτέρω σύστημα ἑπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ ἄξονος OZ.

3%/ Η Εξίσωσις $z = z_0$ παριστᾷ ἕνα ἑπίπεδον παράλληλον πρὸς τό ἑπίπεδον Oxy.

Παρατηρήσεις 1%/ Τό σημεῖον $(0, 0, z)$ δέν ἔχει κυλινδριάς συντεταγμένες. Ἐπειδή εἶναι $\rho = 0$, δυνάμεθα νά θεώσωμεν ὡς κυλινδριάς συντεταγμένες τοῦ σημείου $(0, 0, z)$ τās $(0, \theta, z)$, ὅπου θ καί z αὐθαίρετα.

2%/ Τοῦ σημείου $(x, 0, 0)$, $x > 0$, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς κυλινδριάς συντεταγμένες τās $(x, 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ καί τέλος τοῦ σημείου $(0, y, 0)$, $y > 0$, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὡς κυλινδριάς συντεταγμένες τās $(y, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

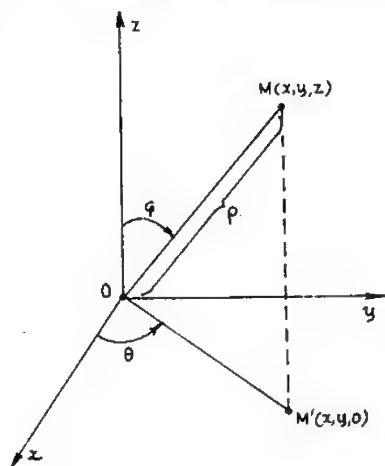
II. Σφαιρικαί συντεταγμένες:

καλοῦμεν σφαιρικὰς συντεταγμένες τοῦ σημείου $M(x, y, z)$ τήν τριάδα (ρ, θ, φ) , ὅπου $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ καί $\varphi \in (0, \pi)$ (βλ. Σχ. 2)

Ἡ τριάς αὕτη προσδιορίζει πλήρως τήν θέσιν τοῦ σημείου Μ εἰς τόν χώρον.

Εὐκόλως διαπιστώνεται ὅτι οἱ τύποι οἱ συνδέοντες τās καρτεσιανὰς με τās σφαιρικὰς συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ εἶναι οἱ υάτωδι:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta$$



Σχ. 2

Αντιστρόφως εάν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $x \neq 0$ εύκολως διαπιστώνεται ότι αί:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \begin{cases} \text{το Εξ Εφ}(\frac{y}{x}) & \text{δία } x > 0 \\ \pi + \text{το Εξ Εφ}(\frac{y}{x}) & \text{» } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{και } \varphi = \text{το Ε συν} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

είναι αί σφαιρικοί συντεταγμένοι του Μ.

Είναι εύκολον να αποδείξωμεν ότι εάν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $(x, y) \neq (0, 0)$ και $x \neq 0$, τότε το σημείον (x, y, z) παρίσταται μονοσημάντως υπό σφαιρικών συντεταγμένων.

Διάφοροι ειδικοί περιπτώσεις:

1%/ 'Η Είσιωσις $\rho = \rho_0$ εις σφαιρικός συντεταγμένους ή όπερ ίσοδυνάμως τό σύνολον:

$A = \{\rho, \theta, \varphi\} : \rho = \rho_0\}$, παριστά μίαν επιφάνειαν σφαίρας.

2%/ 'Η Είσιωσις $\theta = \theta_0$ εις τό ανωτέρω σύστημα συντεταγμένων παριστά επίπεδον διερχόμενον διά του άξονος ΟΖ και τέλος ή Είσιωσις $\varphi = \varphi_0$ παριστά μίαν κυνιτιήν επιφάνειαν κυρτής Ο(0,0,0).

Εφαρμογαι

1%/ Έστωσαν αί συναρτήσεις: $x = \rho \sin \theta, y = \rho \eta \mu \theta, z = z$, ένθα $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ και $z \in \mathbb{R}$.

Ζητείται να υπολογισθῇ ή $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)}$

Λύσις: Είναι:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_z \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_z \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta & -\rho \eta \mu \theta & 0 \\ \eta \mu \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho (\sin^2 \theta + \eta \mu^2 \theta) = \rho$$

2%/ Έστωσαν αί συναρτήσεις: $x = \rho \sin \theta \eta \mu \varphi, y = \rho \eta \mu \theta \eta \mu \varphi, z = \rho \sin \varphi$,

όπου $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ και $\varphi \in (0, \pi)$. Να υπολογισθῇ ή $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}$

Λύσις: Είναι:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \eta \mu \varphi & -\rho \eta \mu \theta \eta \mu \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \eta \mu \theta \eta \mu \varphi & \rho \cos \theta \eta \mu \varphi & \rho \eta \mu \theta \cos \varphi \\ \sin \varphi & 0 & -\rho \eta \mu \varphi \end{vmatrix} = -\rho^2 \eta \mu \varphi.$$

32/ Να εύρεθῇ τὸ διαφοριζόν τόξου καμπύλης εἰς σφαيريὰς συντεταγμένους.

Λύσις: Εἶναι γνωστὸν ὅτι: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

καὶ $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = \rho \cos\theta$.

Εἶναι δὲ:

$$dx = -\rho \sin\theta \sin\varphi d\theta + \rho \sin\theta \cos\varphi d\varphi + \cos\theta \rho d\rho$$

$$dy = \rho \sin\theta \cos\varphi d\theta + \rho \sin\theta \sin\varphi d\varphi + \sin\theta \rho d\rho$$

$$dz = -\rho \cos\theta d\theta + \cos\theta \rho d\rho$$

καὶ $(ds)^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2$.

Συμπληρώματα καὶ Ἀσκήσεις.

1/. Εἰς ἐκάστην τῶν ἀπολούθων ἀσκήσεων χρησιμοποιοῦντες τὸ θεώρημα IV - 1-1 δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $f(x,y) = 0$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν $y = \varphi(x)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ δοθέντος σημείου (x_0, y_0) . Δώσατε μίαν πρόχειρον γραφικὴν παράστασιν καὶ ὑπολογίσατε τὴν $\varphi'(x_0)$ εἰς ἐκάστην τῶν κατωτέρω περιπτώσεων:

α) $f(x,y) = x + y + x^2 y = 0$, $(x_0, y_0) = (0,0)$

β) $f(x,y) = x^2 - 4x^2 y + y^2 - 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (0,1)$

γ) $f(x,y) = xe^y - y + 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (-1,0)$

δ) $f(x,y) = xy + \log(xy) - 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (1,1)$

ε) $f(x,y) = x \sin xy = 0$, $(x_0, y_0) = (1, \frac{\pi}{2})$

στ) $f(x,y) = 1 + xy - \log(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$, $(x_0, y_0) = (1, -\log \sqrt{e-1})$

η) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 4 = 0$, $(x_0, y_0) = (2,-2)$

θ) $f(x,y) = 2xe^y + y + 1 = 0$, $(x_0, y_0) = (0,-1)$.

2/. Υπολογίσατε τὴν $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ τῆς συναρτήσεως $y = \varphi(x)$, ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:

α) $f(x,y) = x^2 + y^2 - e^{xy} = 0$ β) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy = 0$.

3/. Εἰς ἐκάστην τῶν ἀπολούθων ἀσκήσεων εὑρετε τὰς διαφοροῦς πεπληρωμένας συναρτήσεις τὰς ὁριζομένους ὑπὸ τῆς ἀντιστοίχου ἐξισώσεως καὶ εὑρετε τὰ σημεία τῆς γρα-

φιμής παραστάσεως, όπου $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Είς ένασιν τοιούτον σημείον ελέγξατε πότε είναι συγχρόνως $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

α) $f(x, y) \equiv x e^y - 2y + 2 = 0,$

γ) $f(x, y) \equiv x^3 + y^3 = 0.$

β) $f(x, y) \equiv 2x^3 + y^3 - x^2 = 0,$

δ) $f(x, y) \equiv (x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) = 0.$

4/ Εύρετε την εξίσωσιν της εφαπτομένης εις το σημείον (x_0, y_0) τών υωνυμών τομών:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ και } y^2 = 2px.$$

5/ Είς ένασιν τών άμολούδων άσκήσεων χρησιμοποιούντες τό θεώρημα IV-2-1β δείξατε ότι ή εξίσωσις $f(x, y, z) = 0$ δύναται νά παρασταθῇ υπό τήν μορφήν $z = \varphi(x, y)$ εις μίαν περιοχήν του δοθέντος σημείου (x_0, y_0, z_0) . Ηά εύρεθούν αί $\varphi'_x(x_0, y_0)$, $\varphi'_y(x_0, y_0)$.

α) $f(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$

β) $f(x, y, z) \equiv e^x - z^2 - x^2 - y^2 = 0, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$

γ) $f(x, y, z) \equiv x + y + z + \sin xyz = 0, (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -1).$

6/ Ηά εύρεθούν αί παράγωγοι a_1^1 και θ_1^1 τάξεως τής πεπληγμένης συναρτήσεως $z = \varphi(x, y)$, ήτις όρίζεται υπό τών κάτωδι εξισώσεων:

α) $f(x, y, z) \equiv x e^y + e^z - z^2 = 0,$ β) $f(x, y, z) \equiv e^x \eta \mu \chi \eta - e^{\eta \mu} \eta \mu z = 0,$ γ) $f(x, y, z) \equiv z^3 - z - \chi \eta \eta \mu z = 0.$

7/ Είς ένασιν τών άμολούδων άσκήσεων δείξατε ότι $f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$ και εξετάσατε πότε είναι δυνατόν νά ευφράσωμεν τό z ως μίαν συνάρτησιν τών x και y εις μίαν περιοχήν του σημείου (x_0, y_0, z_0) . Εξετάσατε εν συνεχεία εάν είναι δυνατόν νά ευφράσωμεν τό y ως συνάρτησιν τών x και z εις μίαν περιοχήν του σημείου (x_0, y_0, z_0) :

α) $f(x, y, z) \equiv 5x^2 + 3y^3 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - y = 0, (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -4).$

β) $f(x, y, z) \equiv 2x^3 + 3y^4 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz - z = 0, (x_0, y_0, z_0) = (4, -3, 2).$

8/ Εύρετε την εξίσωσιν του εφαπτομένου επιπέδου εις τό σημείον (x_0, y_0, z_0) τών κάτωδι επιφανειών: ($a, b, \gamma > 0$)

α) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$ (Ελλειψοειδές)

β) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = \pm 1$ (Μονόκωνον υπερβολοειδές)
(Δίκωνον ")

$$\gamma) \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p, q > 0 \quad (\text{Ελλειπτικόν παραβολοειδές})$$

$$\delta) \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (\text{Υπερβολικόν παραβολοειδές})$$

(Νά ρίξη μία πρόχειρος σχεδίασις τῶν ἀνωτέρω ἐπιφανειῶν).

9. Ἐάν $u = \frac{x+y}{1-xy}$ καὶ $v = \tan \alpha \cos \phi$ καὶ $w = \tan \beta \sin \phi$, νά υπολογισθῇ ἡ ἰαυωθιανή $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

10. Ὀμοίως, ἐάν $F(u,v) = 3u^2 - uv$ καὶ $G(u,v) = 2uv^2 + v^3$, νά υπολογισθῇ ἡ $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

11. Ἐάν $F(x,y,z) = x + 3y^2 - z^3$, $G(x,y,z) = 2x^2yz$ καὶ $H(x,y,z) = 2z^2 - xy$, νά υπολογισθῇ ἡ $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$.

12. Νά εὕρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καθὼς καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς καθέτου τῆς ἐπιφανείας.

i) $z = \tan \alpha \cos \phi \frac{x+y}{1-xy}$ εἰς τὸ σημεῖον $(0,0,0)$

ii) $x^2 + y^2 - 4z^2 + 3xy - 2yz + x + y + 8 = 0$ εἰς τὸ σημεῖον $(-1,2,1)$

iii) $x = u \sin v$, $y = u \cos v$, $z = 2v$ εἰς τὸ σημεῖον $(u,v) = (2, \frac{\pi}{2})$.

13. Εἰς ἐκάστην τῶν ἀπολούθων ἀσκήσεων ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα IV-3-1 δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία περιοχὴ $T: |x-x_0| < h, |y-y_0| < h, |u-u_0| < k, |v-u_0| < k$ τοιαύτη, ὥστε ὅλα τὰ σημεῖα (x,y,u,v) τὰ ἀνήκοντα εἰς αὐτὴν τὴν περιοχὴν καὶ ἐπαληθεύοντα τὰς ἐξισώσεις $f(x,y,u,v) = 0, g(x,y,u,v) = 0$ εὐρίσκονται ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῶν ἐπαληθευόντων τὰς ἐξισώσεις:

$$u = f_1(x,y), \quad v = f_2(x,y),$$

ὅπου αἱ συναρτήσεις f_1 καὶ f_2 εἶναι συνεχεῖς καὶ παραγωγίσιμοι διὰ $|x-x_0| < h$ καὶ $|y-y_0| < h$.

Νά εὕρεθῶν αἱ τιμαὶ $f'_x, f'_y, f'_z, f'_{xy}$ εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) . Ἐστω δὲ P_0 παριστᾷ τὸ (x_0, y_0, u_0, v_0) .

a) $f = 2x - 3y + u - v = 0, g = x + 2y + u + 2v = 0, P_0 = (0,0,0,0)$.

β) $f = x - 2y + u + v - 8 = 0, g = x^2 - 2y^2 - u^2 + v^2 - 4 = 0, P_0 = (3,-1,2,1)$

γ) $f = x^2 - y^2 + uv - v^2 + 3 = 0, g = x + y^2 + u^2 + uv - 2 = 0, P_0 = (2,1,-1,2)$

14. Νά ἀποδείχθῃ ὅτι τὸ σύστημα: $f(x,y,z) = x + y + z - 6 = 0, g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 20 = 0$

ὀρίζει εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $x_0 = 0$ δύο συναρτήσεις $y = \varphi(x)$ καὶ $z = \sigma(x)$ μέ $\varphi(0) = 4$ καὶ $\sigma(0) = 2$, τῶν ὁποίων ὑπάρχουσι παράγωγοι αἱ ὁποῖαι ζητοῦνται νά υπολογισθοῦν.

15. Δείξτε ότι διά υάθε συνάρτησιν f δύο μεταβλητών x, y ή πεπληρμένη συνάρτησις $z=z(x, y)$ όριζομένη υπό τής έξισώσεως: $f(x^2-y^2, y^2-z^2)=0$ επαληθεύει τήν σχέσιν:

$$y \cdot z \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot z \frac{\partial z}{\partial y} = x y.$$

16. Είς έμάστην τών υάτωδι άσυνήσεων χρησιμοποιούντες τό θεώρημα IV-3-1 υαί διά τό όποϊον νά άποδείξετε ότι πληρούνται αι ύποθέσεις του, δείξατε ότι ύπάρχει μία περιοχή: $|x-x_0| < h, |y-y_0| < k, |z-z_0| < \kappa$ τοιαύτη, ώστε: πάντα τά σημεία (x, y, z) τούτης τά όποια επαληθεύουν τās έξισώσεις:

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

άνήκουν επί του συνόλου τών σημείων που επαληθεύουν τās έξισώσεις $y=f_1(x)$ υαί $z=f_2(x)$, όπου αι f_1, f_2 είναι συνέχεις υαί παραγωγίσιμοι διά $|x-x_0| < h$. Νά εύρεθών έν συνεχεία αι έξισώσεις τής έφαπτομένης τής υαμπύλης τής παριστομένης υπό του συστήματος τών έξισώσεων εις τό σημείον $(x_0, y_0=f_1(x_0), z_0=f_2(x_0))$:

Έστω δέ P_0 παριστά τό σημείον (x_0, y_0, z_0) .

α) $f(x, y, z) \equiv 2x+y-z+2=0, g(x, y, z) \equiv x+2y+z-1=0, P_0(2, -1, 1).$

β) $f(x, y, z) \equiv x^2+2y^2-z^2-2=0, g(x, y, z) \equiv 2x-y+z-1=0, P_0(2, 1, -2).$

γ) $f(x, y, z) \equiv x^3+y^3+z^3-3xyz-14=0, g(x, y, z) \equiv x^2+y^2+z^2-6=0, P_0(2, -1, 1).$

δ) $f(x, y, z) \equiv \eta\mu(x+y)+z-\alpha=0, g(x, y, z) \equiv \eta\mu(x-y)+z-\beta=0.$

17. Εάν ή συνάρτησις $z=z(x, y)$ όρίζεται μέ πεπληρμένη μορφή από τό σύστημα $z=\sigma(x, y), x=\varphi(y, u)$, νά ευφρασθών αι Z'_x, Z'_y μέ τās μεριυάς παρανώτους τών σ, φ .

18. Εάν p_1, p_2, p_3 είναι αι ρίζαι τής ως πρós τ έξισώσεως $\frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} + \frac{z}{\gamma+t} = 1$, νά άποδείξετε ότι:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = - \frac{(p_2-p_3)(p_2-p_1)(p_1-p_3)}{(b-\gamma)(\gamma-a)(a-b)}.$$

Υπόδ: Η δοθεΐσα έξίσωσις είναι τρίτου βαθμού υαί έν τής όποίας, ως γνωστόν, έν έλδη εις τήν υανονιυήν της μορφήν δά έχωμεν: $S_1=p_1+p_2+p_3=-(a+b+\gamma-x-y-z)$

$$S_2=p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1=\alpha b+\beta\gamma+\gamma\alpha-(b+\gamma)x-(\gamma+a)y-(a+b)z$$

$$S_3=p_1p_2p_3=-\alpha\beta\gamma+\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha b z$$

Έν τής σχέσεως:

$$\frac{\partial(S_1, S_2, S_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = \frac{\partial(S_1, S_2, S_3)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} \quad \text{εύνοηα ύπολογίσομεν τήν 'λαυωβιανή}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} \quad \kappa.τ.λ.$$

19. Νά αποδειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,u) = x+y+z+u-2=0 \\ F_2(x,y,z,u) = x^2+y^2+z^2+u^2-6=0 \\ F_3(x,y,z,u) = x^2+y^2+z^2+u^2-8=0. \end{cases}$$

ὀρίσει εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $u_0=2$ τρεῖς συναρτήσεις $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$ με $F_i(x(u), y(u), z(u), u)=0$, $i=1,2,3$ καὶ με $x(2)=1$, $y(2)=-1$, $z(2)=0$, τῶν ὁποίων ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $x'(u)$, $y'(u)$, $z'(u)$ καὶ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν: $x'(2)=-1$, $y'(2)=-\frac{1}{3}$, $z'(2)=1$.

20. Ἄν δύο ἐξισώσεις $2x=v^2-u^2$ καὶ $y=u \cdot v$ ὀρίσουν τὰ u καὶ v ὡς συναρτήσεις τῶν x καὶ y .
Νά εὐρεθοῦν αἱ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Λύσις: Παραγωγίζοντας ὡς πρὸς x τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις λαμβάνομεν:

$2=2v \frac{\partial v}{\partial x} - 2u \frac{\partial u}{\partial x}$, $0=u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}$. Ἀπολύνοντας ἐπιλύοντες τὸ ἀνωτέρω σύστημα ὡς πρὸς $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ εὐρίσκομεν $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{u^2+v^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2}$. Ὀμοίως παραγωγίζομεν τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις ὡς πρὸς y κ.τ.λ.

21. Ἐστω ἡ u ὀρίζεται ὡς συνάρτησις τῶν x καὶ y μέσθω τῆς ἐξισώσεως: $u=F(x+u, y+u)$. Νά εὐρεθοῦν αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$ καὶ $\frac{\partial u}{\partial y}$ συναρτήσεις τῶν μερικῶν παραγώγων τῆς F .

22. Νά αποδειχθῇ ὅτι: ἔάν $F(x,y)$ εἶναι μία θετικῶς ὁμογενὴς συνάρτησις πρώτου βαθμοῦ ὁμομερείας, τότε δά ἰσχύη:

$$x^2 \cdot F''_{xx} + 2xy \cdot F''_{xy} + y^2 \cdot F''_{yy} = 0.$$

23. Ἐάν $x=F(u,v,w)$, $y=G(u,v,w)$ καὶ $u=f(r,s)$, $v=g(r,s)$, $w=h(r,s)$, δείξατε ὅτι:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,w)} \cdot \frac{\partial(u,w)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)} \cdot \frac{\partial(w,u)}{\partial(r,s)}.$$

24. Ἐξετάσατε ποῖα ἐκ τῶν κατωθι συναρτήσεων εἶναι συναρτησιαιῶς ἐξηρητμέναι καὶ ἐν συνεχείᾳ νά εὐρεθῇ ἡ σχέσηις πού τὰς συνδέει:

i) $q_1 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $q_2 = x+y+z$, $q_3 = x^2 + y^2 + z^2$

ii) $q_1 = 3x+2y-z$, $q_2 = x-2y+z$, $q_3 = x^2+2xy-xz$

$$(iii) \quad q_1 \equiv x^2 + y^2 - z, \quad q_2 \equiv x^2 - y^2, \quad q_3 \equiv 4x^2y^2 - 2z(x^2 + y^2) + z^2.$$

$$iv) \quad q_1(x, y) \equiv e^{xy}, \quad q_2(x, y) \equiv \log y \cdot x^{-1} \quad v) \quad q_1(x, y) \equiv x - y, \quad q_2(x, y) \equiv xy, \quad q_3(x, y) \equiv x \cdot e^y.$$

24. Έστω $f(x, y), g(x, y, u)$ είναι τοιαῦτα ὥστε $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0$, ὅπου $u = f(x, y)$. Τότε δείξτε ὅτι αἱ συναρτήσεις $f(x, y)$ καὶ $g(x, y, f(x, y))$ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξαρτημένα.

25. Προσδιορίσατε τὴν παράμετρον λ οὕτως, ὥστε αἱ συναρτήσεις:

$$q_1(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz, \quad q_2(x, y, z) \equiv x + y + z, \quad q_3(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$$

νὰ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξαρτημένα.

26. Νὰ ἀποδείχθῃ ὅτι: ἂν αἱ συναρτήσεις $q(x, y), q(y, z)$ καὶ $q(z, x)$ εἶναι συναρτησιακῶς ἐξαρτημένα, τότε ἡ συνάρτησις $q(x, x)$ εἶναι σταθερά.

Υπόδειξις: Λάβετε ὑπ' ὄψιν τὴν πρότασιν IV - 4-1.

27. Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $F(x+y-z, x^2+y^2)=0$ καὶ ἔστω $z=\varphi(x, y)$ ἡ συνάρτησις ἡ ὁρισμένη ὑπὸ πεπλεγμένην μορφήν ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν. Δείξτε ὅτι, πληρουμένων ὁρισμένων καταλλήλων συνθηκῶν διαφορισιμότητος διὰ τὴν F ἡ συνάρτησις $z=\varphi(x, y)$ πληροῖ τὴν γραμμικὴν διαφ. ἐξίσωσιν $x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = x - y$.

Λύσις: Θέτοντες $u=x+y-z, v=x^2+y^2$ ἡ ἐξίσωσις γράφεται $F(u, v)=0$ (1). Εἶναι δὲ, $du=dx+dy-dz$ καὶ $dv=2xdx+2ydy$ καὶ $dz=z_x dx + z_y dy$. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν: $dF=0$ ἢ $F_u du + F_v dv=0$ (2) ἢ $F_u(dx+dy-dz) + F_v(2xdx+2ydy)=0$ (3) ἢ $F_u(dx+dy-z_x dx - z_y dy) + F_v(2xdx+2ydy)=0$ ἢ

$$(F_u - z_x F_u + 2x F_v) dx + (F_u - z_y F_u + 2y F_v) dy = 0 \quad (4).$$

Ἐπειδὴ τὰ x καὶ y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$F_u - z_x F_u + 2x F_v = 0, \quad F_u - z_y F_u + 2y F_v = 0 \quad (5)$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (5) καὶ ἐφ' ὅσον $F_u \neq 0$ λαμβάνομεν:

$$z_x = \frac{F_u + 2x F_v}{F_u}, \quad z_y = \frac{F_u + 2y F_v}{F_u} \quad (6)$$

$$\text{Ὁθεν,} \quad x \cdot z_y - y \cdot z_x = x \cdot \left(\frac{F_u + 2y F_v}{F_u} \right) - y \cdot \left(\frac{F_u + 2x F_v}{F_u} \right) = x - y.$$

28. Δείξτε ὅτι ἡ λύσις τῆς διαφ. ἐξισώσεως $x \cdot z_x + y \cdot z_y = z$, εἶναι ἡ ὑπὸ πεπλεγμένη μορφή ὁρισμένη συνάρτησις $z=z(x, y)$ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)=0$

Διαφοροί άσκήσεις επί τών κεφαλαίων III και IV

29. Νά εύρεδούν αι ήλώσεις τής διαφ. Εξίσωσσεως τού Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ τής μορφής $u = \sigma(x^2 + y^2 + z^2)$.

Υπόδ: Θέσσετε $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ότε $u = \sigma(\rho)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sigma'(\rho)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\sigma' + 4x^2\sigma''(\rho)$, u τ.λ.

30. Δείξατε ότι ή συνάρτησις $z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-n} \sigma\left(\frac{y}{x}\right)$ ήκανοποιεί, δι' ολίσσδήποτε συν-
αρθήσεις φ και σ τήν Εξίσωσιν:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \eta^2 \cdot z.$$

31. Νά δειχθῇ ότι, ή Εξίσωσις $x^3 y + y^3 x - 1 = 0$ όρίσει διά υάδε $x \neq 0$ μίαν πεπλεγμένην
συνάρτησιν έστω τήν $y = \varphi(x)$ και ή όποία είναι φθίνουσα. Αμολούδως ύπο-
λογίσατε τά $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

32. Δίδεται $V = F(x, y)$, $x = \frac{z}{2}(e^z + e^{-z})$, $y = \frac{z}{2}(e^z - e^{-z})$.

Δείξατε ότι: $V_{x^2} - V_{y^2} = V_z + \frac{1}{z} V_z + \frac{1}{z^2} V_{z^2}$

33. Υποδύτομεν ότι, $u = F(x, y, z)$ και $z = f(x, y)$. Νά εύρεθῇ ό τύπος ό δίδων
τήν $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ από όρους τών παραγώγων τής F (δηλ από τούς F_x, F_y, F_{xz} κ τ.λ.).

(Υπόδ: θα είναι $\frac{\partial u}{\partial x} = F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x}$ κ τ.λ.)

34. Δίδεται ότι, $u = F(x, y)$, $x = e^s \sin t$, $y = e^s \cos t$.

Δείξατε ότι: $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{2s} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$.

35. Θεωρούμεν τήν συνάρτησιν $f(x, y, z)$, διά τήν όποίαν υποδύτομεν ύτι ύπάρχουν
αι μερικά παράγωγοι αίττης ύς προς x, y, z μέχρι δεύτερης τάξεως. Αμολούδως
έπιτελούμεν τόν μετασχηματισμόν ές σφαιρικά συντεταγμένους ήτοι $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$, όπου $\rho > 0$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Νά υπολογισθῇ ή έκφρασις
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ συναρτήσει τών ρ, θ, φ .

36. Έάν θέσωμεν $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$ και αι συναρτήσεις $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ ήκανοποιούν τάς
συνθήκας $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}$. Δείξατε ότι διά έχωμεν έυ ταυτοτύτος.

$$\frac{d^2 V}{du^2} + \frac{d^2 V}{dv^2} = \left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} \right) \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right].$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

§ 1. ΤΟΠΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ: $f(x, y)$

Ἐστω ἡ πραγματιυή συνάρτησις $f(x, y)$ ὠρισμένη εἰς ἓν ἀνοιχτόν ὑποσύνολον $U \subset \mathbb{R}^2$. Θὰ λέγωμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $(x_0, y_0) \in U$ ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει ἓν τοπιὸν μέγιστον (ἀντ. τοπιὸν ἐλάχιστον), ἐάν ὑπάρχῃ μία περιοχὴ V τοῦ σημείου (x_0, y_0) , περιεχομένη ἐν τῷ U , τοιαύτη ὥστε: διὰ πᾶθε $(x, y) \in V - \{(x_0, y_0)\}$ νὰ ἔχωμεν: $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (ἀντ. $f(x, y) > f(x_0, y_0)$).

Ἐνα τοπιὸν μέγιστον ἢ τοπιὸν ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως καλεῖται τοπιὸν ἀμρό-
τατον ἢ καὶ σχετιζὸν ἀμρότατον ταύτης. Ἄν τὸ σύμβολον " $<$ ", ἀντιμετασταθῇ ὑπὸ τοῦ " \leq ", τότε ἔχομεν ἀντιστοίχους ὁρισμούς ὑπὸ τὴν εὐρείαν ἑνωσίαν.

Ἡ μελέτη τῶν τοπιῶν ἀμρότάτων μιᾶς συναρτήσεως δύο, τριῶν ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν στηρίζεται εἰς τὸ ἀμύλουθον θεμελιῶδες θεώρημα, τὸ ὁποῖον διατυπῶνται ἄνευ ἀποδείξεως.

Θεώρημα V-1-1. Ἐστω ἓνα συμπαγὲς σύνολον $E \subset \mathbb{R}^2$ καὶ f μία συνάρτησις ὠρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ E , διάφορος σταθερᾶς, τότε ὑπάρχει ἓν (τουλάχιστον) σημεῖον τοῦ E εἰς τὸ ὁποῖον ἡ f λαμβάνει μεγίστην τιμὴν καὶ ἓν (τουλάχιστον) σημεῖον τοῦ E εἰς τὸ ὁποῖον ἡ f λαμβάνει ἐλάχιστην τιμὴν.

Παρατηρήσεις: α) Τὸ Θεώρημα V-1-1 εἶναι μία γενίκευσις τοῦ θεωρήματος V-5-2 τοῦ A_1 Τόμου.

β) Ἀνάλογα θεωρήματα δύνανται νὰ διατυπωθοῦν καὶ διὰ συναρτήσεις τριῶν, τεσσάρων ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν.

γ) Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον δύναται νὰ παρατηρηθῇ εἰς τὸ σύνορον τοῦ E . Οὕτω, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς, ὅπου τὸ διάστημα πρέπει νὰ εἶναι κλειστόν (βλ. Παρατῆρ. σελ. 236, Τόμος A_1) τὸ σύνολον E πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ σύνορόν του, διὰ νὰ ἰσχύῃ τὸ συμπέρασμα τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

Πρότασις V-1-1. Ἐάν ἡ πραγματιυή συνάρτησις $f(x, y)$, ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοιχτοῦ $U \subset \mathbb{R}^2$, ἔχῃ ἓν τοπιὸν ἀμρότατον εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) καὶ εἰάν αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι

της $f(x,y)$ υπάρχουν εις το σημείον (x_0, y_0) , τότε αι μεριαι παράγωγα μηδενίζονται εις το σημείον τούτο, ήτοι:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Απόδειξις: Επειδή η συνάρτησις $f(x,y)$ έχει εις το σημείον (x_0, y_0) σχετιών άυρότατον, έπεται ότι και η συνάρτησις $\varphi(x) = f(x, y_0)$ θα έχη, προφανώς, εις το σημείον x_0 σχετιών άυρότατον· συνεπώς θα έχωμεν $\varphi'(x_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$. Ομοίως αποδεικνύομεν ότι, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$.

Το σημείον (x_0, y_0) δια το όποιον $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ ή όπερ ισοδυνάμως $df(x_0, y_0) = 0$, καλεϊται στατιυόν σημείον της f .

Παρατηρήσεις: 1% Αι άνωτέρω συνθήκαι είναι αναγκαίαι δέν είναι όμως και ικαναι διά την υπάρειν σχετιυού άυροτάτου. Τούτο φαίνεται από το άυόλουδον παράδειγμα. Έστω η συνάρτησις $f(x,y) = x^2 - y^2$. Είναι δε $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. Έν τούτοις η άνωτέρω συνάρτησις δέν έχει εις το σημείον $(0,0)$ σχετιυόν άυρότατον, όστι η διαφορά $f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2$ εις καθε περιότην της άρχης είναι θετική διά $|x| > |y|$ και άρνητική διά $|x| < |y|$.

2. Έν της άνωτέρω προτάσεως έξάγομεν το συμπέρασμα ότι τα σημεία άυροτάτου μιας συνάρτησεως $f(x,y)$, εάν υπάρχουν, πρέπει να άνασκητηδούν μεταξύ των λύσεων του συστήματος: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ και $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.

Δέν είναι όμως σημεία άυροτάτου της $f(x,y)$ πάσαι αι λύσεις του άνωτέρω συστήματος.

Παράδειγμα: 1% Δίδεται η συνάρτησις: $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x + 2$.

Ζητείται να εύρεδούν αι θέσεις, εάν υπάρχουν, των τοπιυών άυροτάτων της.

Λύσις: Είναι $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Επιλύοντες το σύστημα $8x - 4 = 0$ και $2y = 0$ εύρισκομεν την λύσιν $(x = \frac{1}{2}, y = 0)$. Ήδη έξετάδομεν εάν το σημείον $(\frac{1}{2}, 0)$ είναι θέσις τοπιυού άυροτάτου της συνάρτησεως.

Έχομεν $f(x,y) - f(\frac{1}{2}, 0) = 4x^2 + y^2 - 4x + 2 - 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = (2x-1)^2 + y^2 > 0$.

Άρα εις το σημείον $(\frac{1}{2}, 0)$ η συνάρτησις παρουσιάζει τοπιυόν έλάχιστον.

2% Έστω η συνάρτησις $f(x,y) = xy$ ώρισμένη έφ' όλου ήτου του χώρου \mathbb{R}^2 . Ζητείται να εύρεδούν αι θέσεις των τοπιυών άυροτάτων αυτής.

Λύσις: Τα σημεία εις τα όποια η $f(x,y)$ παρουσιάζει άυρότατα θα άνασκητηδούν μεταξύ

των λύσεων του συστήματος: $\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$.

Όθεν η μοναδική λύσις του συστήματος είναι η $(0,0)$. Εξετάσουμε τη διαφορά: $f(x,y) - f(0,0) = xy$.

Εάν $x > 0, y > 0$ ή $x < 0, y < 0$, τότε $f(x,y) > 0$, ενώ εάν $x > 0, y < 0$ ή $x < 0, y > 0$, τότε $f(x,y) < 0$.

Άρα το σημείο $(0,0)$ δεν είναι θέσις τοπιουσύ άυροτάτου της $f(x,y) = xy$.

- Είς την υατωτέρω πρότασιν διατυπώνται αι συνθήκαι πού πρέπει να πληρούνται, ίνα ένα σημείον είναι τοπιούν άυρότατον.

Πρότασις V - 1-2. Έστω $f(x,y)$ μία πραγματική συνάρτησις ώρισμένη επί του $U \subset \mathbb{R}^2$

και έστω $(x_0, y_0) \in U$. Υποθέτομεν επί πλέον ότι η f έχει μεριυάς παραγώγους χ^α τά-
ξως συνεχείς και ότι: $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 0$.

Έστω
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Τότε:

- Εάν $\Delta > 0$ και $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$, η συνάρτησις f παρουσιάζει εις τό σημείον (x_0, y_0) τοπιούν ελάχιςτον.
- Εάν $\Delta > 0$ και $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$, η συνάρτησις f παρουσιάζει εις τό σημείον (x_0, y_0) τοπιούν μέγιστον.
- Εάν $\Delta < 0$ η συνάρτησις f εις τό σημείον (x_0, y_0) δεν παρουσιάζει τοπιούν άυρό-
 τατον. (σημείον σάρματος, βλ. παρατηρήσεις σελ. 111).
- Εάν $\Delta = 0$, τότε δεν δύναμεθα να άποφανθώμεν αν η f παρουσιάση εις τό
 σημείον (x_0, y_0) τοπιούν άυρότατον.

Απόδειξις: θέτομεν $r = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ και $t = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$. Εφαρμόζοντες τόν τύπον
 του Taylor (σελίδις 63) εις την συνάρτησιν $f(x,y)$ διά $n=2$ και εις τό σημείον (x_0+h, y_0+k) ,
 ύποθέτοντες ότι τό h, k είναι τοιαύτα, ώστε τό $(x_0+h, y_0+k) \in U$ έχομεν:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} (r h^2 + 2 \cdot s \cdot h \cdot k + t k^2) + r(h, k) \quad (1), \quad \text{ένθα}$$

$$r(h, k) = \frac{h^3}{3!} f_{xxx}''''(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{k}{1!} f_{xxy}'''(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \frac{h}{1!} \cdot \frac{k^2}{2!} f_{xyy}'''(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \\ + \frac{k^3}{3!} f_{yyy}'''(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \quad 0 < \theta < 1.$$

Εάν θέσωμεν $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ θα είναι $h, k < \rho$ πάσαι δέ αι μεριυαί παραγώγιοι τρίτης τάξως

φράσσονται υπό ενός αριθμού M , θα έχουμε προφανώς

$$|r(h,k)| < \frac{\rho^3}{3!} \cdot M + \frac{\rho^3}{2} \cdot M + \frac{\rho^3}{2} \cdot M + \frac{\rho^3}{3!} \cdot M = \frac{4\rho^3 M}{3}$$

Συνεπώς, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{r(h,k)}{\rho^2} = 0$, δηλ. το $\frac{r(h,k)}{h^2+k^2} \rightarrow 0$, καθώς το $(h,k) \rightarrow (0,0)$.

Ήδη ως αποδείξαμεν το i):

Είναι $\Delta = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 > 0$ και $r > 0$, συνεπώς η αόριστη τετραγωνική μορφή γράφεται:

$$\frac{1}{2} (rh^2 + 2shk + tk^2) = \frac{k^2}{2} \left[r \left(\frac{h}{k} \right)^2 + 2s \cdot \frac{h}{k} + t \right] > 0 \quad (2) \text{ δι' όλα τα } (h,k) \neq (0,0).$$

Όθεν, αρμεί να δείξουμε ότι εις μίαν περιοχήν της αρχής αυτή η τετραγωνική μορφή είναι μεγαλύτερα του όρου $r(h,k)$. Προς τούτοις παρατηρούμεν ότι υπάρχει θετικός αριθμός μ τοιοῦτος, ὥστε δι' όλα τα $(h,k) \neq (0,0)$ να ἔχουμε:

$$rh^2 + 2shk + tk^2 > \mu (h^2 + k^2) \quad (3)$$

$$\text{ἢ } (r-\mu)h^2 + 2shk + (t-\mu)k^2 > 0 \quad (4), \text{ δι' όλα τα } (h,k) \neq (0,0), \text{ ἢ}$$

$$(r-\mu) \left(\frac{h}{k} \right)^2 + 2s \frac{h}{k} + (t-\mu) > 0 \quad (4').$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης εἶναι μονίμως θετική δι' όλα τὰ μ ἀρυσύντως μικρά, ἐπομένως δὲ πρέπει νὰ εἶναι:

$$\Delta_{\mu} = \varphi(\mu) \equiv s^2 - (r-\mu) \cdot (t-\mu) < 0, \text{ δι' όλα τὰ } \mu \text{ ἀρυσύντως μικρά.}$$

Ἡ συνάρτησις $\varphi(\mu)$ ὡς πολυωνυμική εἶναι συνεχὴς καὶ λαμβάνει τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν $-\Delta < 0$ διὰ $\mu=0$, συνεπὺς καὶ εἰς μίαν περιοχήν τοῦ μ αἱ τιμαὶ τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως δὲ εἶναι ἀρνητικαί.

Ἐστὼ τῶρα τὸ μ εἶναι εἰς θετικὸς ἀριθμὸς διὰ τὸν ὁποῖον ἰσχύει ἡ (3). Τότε ἐπειδὴ $\frac{r(h,k)}{h^2+k^2} \rightarrow 0$, καθώς τὸ $(h,k) \rightarrow (0,0)$, δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν μίαν περιοχήν V τοῦ σημείου $(0,0)$ τοιαύτην, ὥστε:

$$|r(h,k)| < \frac{1}{2} \mu (h^2 + k^2) \quad (5) \text{ δι' όλα τὰ } (h,k) \in V \setminus \{(0,0)\}$$

Εὐ τῶν (1), (3) καὶ (5) ἔχομεν τελευτῶς:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) > \frac{1}{2} \mu (h^2 + k^2) - |r(h,k)| > 0.$$

δι' όλα τὰ $(h,k) \in V \setminus \{(0,0)\}$. Ἄρα ἡ f ἔχει εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) ἓνα τοπικὸν ἐλάχιστον.

Κατ' ἀναφορίαν ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ii) περίπτωσις.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ iii):

Ἐστὼ $\Delta < 0$ καὶ ἔστω $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, $\sin \theta = \frac{h}{\rho}$, $\eta \mu \theta = \frac{k}{\rho}$.

τότε,

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot \rho^2 \cdot [r \sin^2 \theta + 2S \sin \theta \cos \theta + t \cos^2 \theta + \sigma(\rho, \theta)] \quad (6),$$

όπου $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma(\rho, \theta) = 0$, διότι υάρθε σταθερόν θ . Ἐπειδὴ $\Delta = rt - S^2 < 0$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν θ_1, θ_2 τοιαῦτα, ὥστε ἡ παράστασις $\Pi(\theta) \equiv r \sin^2 \theta + 2S \sin \theta \cos \theta + t \cos^2 \theta$ νὰ εἶναι θετικὴ ὅταν $\theta = \theta_1$ καὶ ἀρνητικὴ ὅταν $\theta = \theta_2$.

λόγω τῆς (6) καὶ τοῦ τελευταίου συμπεράσματος ἔπεται ὅτι, διὰ πολὺ μικρὸν θετικὸν ρ ἡ ἔκφρασις $f(x_0 + \rho \sin \theta, y_0 + \rho \cos \theta) - f(x_0, y_0)$ εἶναι θετικὴ ὅταν $\theta = \theta_1$ καὶ ἀρνητικὴ ὅταν $\theta = \theta_2$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ f δὲν ἔχει οὔτε ἓνα τοπικὸν μέγιστον οὔτε ἓνα τοπικὸν εἰλάχιστον.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ iv):

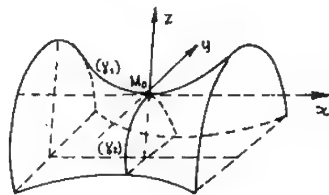
Ἐπειδὴ $rt - S^2 = 0$ ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot r \cdot \left(\frac{h}{k} + \frac{S}{r} \right)^2 + r(h, k) \quad (7)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (7) παρατηροῦμεν τὸ πρόσθετον τῆς διαφορᾶς $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προσήμου τοῦ r καὶ τοῦ $r(h, k)$, ἥτοι ἐκ τοῦ προσήμου τῶν παραγῶντων ἀνωτέρας τάξεως τῆς f .

Παρατηρήσεις: 1^η/ Ἐστω $\Delta = rt - S^2 > 0$, τότε αἱ ποσότητες r καὶ t εἶναι ὁμόσημοι, συνεπῶς ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς συναρτήσεις $f(x, y)$ καὶ $f(x, y)$ αὗται δὲ πρέπει νὰ ἔχουν εἰς τὸ σημεῖον (x_0, y_0) τὸ αὐτὸ εἶδος ἀυτοτάτου, ὁπλ. ἢ ἀμφότεραι νὰ παρουσιάσουν τοπικὸν μέγιστον ἢ τοπικὸν εἰλάχιστον (βλ. τόμος Α', σελίς 421).

Εἰς τὴν περίπτωσιν καὶ ἢν $r < 0$ καὶ $t > 0$, (τότε καὶ $\Delta = rt - S^2 < 0$) ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς συναρτήσεις $f(x, y)$ καὶ $f(x, y)$ ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν στρέφει τὰ κοίλα πρὸς τὰ κάτω, ἐνῶ ἡ δευτέρα στρέφει τὰ κοίλα πρὸς τὰ ἄνω. Ἐὰν ἀναφερθῶμεν εἰς ἓνα τρισσορδαῶνιον σύστημα ἀξόνων $oxyz$ καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἐν τῷ σχή-



Σχ. 1

ματι Γ εἰς ὁμοιομετρήτην ἐπιφάνειαν, αἱ διὰ τοῦ σημείου M_0 διερχομεναι ὑαμπύλαι (γ_1) καὶ (γ_2) , ἡ μὲν μία στρέφει τὰ κοίλα πρὸς τὰ ἄνω, ἡ δὲ ἄλλη πρὸς τὰ κάτω. Τὸ σημεῖον δὲ τοῦτο δὲν εἶναι θέσις τοπιου ἀυτοτάτου, καλεῖται δὲ τοῦτο σημεῖον σάγματος.

2^η/ Ἡ ἀναφερθεῖσα πρότασις ἀφορᾷ τὴν εὕρεσιν ἀυτοτάτων συναρτήσεως, ἥτις ἔχει

μεριώς παραγώγους. Είναι δυνατόν να υπάρχουν τοπικά άυροτάτα μιās συναρτήσεως χωρίς αὐτὴ νὰ ἔχη μεριώς παραγώγους. Ἡ ἀνασήτησις τούτων γίνεται θάσει τοῦ ὁρισμοῦ.

Παραδείγματα: 1^α/ Δίδεται ἡ συνάρτησις: $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Νὰ εὐρεθοῦν αἱ θέσεις τῶν τοπιῶν ἀυροτάτων ταύτης.

Λύσις: Ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι ὠρισμένη καὶ ἔχει μεριώς παραγώγους $\gamma_{\text{π}}^{\text{α}}$ τὰς ἔως ἐφ' ὅλου μὴρου τοῦ χώρου \mathbb{R}^2 .

Τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα ἡ $f(x,y)$ ἔχει τοπικά ἀυροτάτα θὰ ἀνασκηθοῦν μεταξὺ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned} \right\}$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν τὰς λύσεις $(0,0)$ καὶ $(-1,-1)$.

Ἐπὶ πλεόν ἔχομεν: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$

Εἶναι δέ: $r = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0$, $s = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 3$, $t = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0$

Ἐπομένως $\Delta = rt - s^2 = -9 < 0$. Συνεπῶς τὸ σημεῖον $(0,0)$ δὲν εἶναι θέσις τοπιουῦ ἀυροτάτου τῆς $f(x,y)$. Διὰ δὲ τὸ σημεῖον $(-1,-1)$ ἔχομεν:

$$r = \frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x^2} = -6$$
, $s = \frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial x \partial y} = 3$, $t = \frac{\partial^2 f(-1,-1)}{\partial y^2} = -6$

Ἐπομένως $\Delta = rt - s^2 = (-6)(-6) - 3^2 = 27 > 0$.

Ἄρα τὸ $(-1,-1)$ εἶναι θέσις τοπιουῦ ἀυροτάτου τῆς $f(x,y)$ καὶ ἐπειδὴ $r = -6 < 0$ ἔχομεν μέγιστον. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ $f(-1,-1) = +1$.

2^α/ Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x,y) = x^3 + y^3 - (1+x+y)^3$.

Νὰ εὐρεθοῦν αἱ θέσεις τῶν τοπιῶν ἀυροτάτων ταύτης.

Λύσις: Ἡ $f(x,y)$ εἶναι ὠρισμένη καὶ ἔχει μεριώς παραγώγους $\gamma_{\text{π}}^{\text{α}}$ τὰς ἔως ἐφ' ὅλου μὴρου τοῦ χώρου \mathbb{R}^2 . Τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἔχει τοπικά ἀυροτάτα θὰ τὰ ἀνασκηθῶμεν μεταξὺ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3(1+x+y)^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3(1+x+y)^2 = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Εν τῇς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (1) λαμβάνομεν τὰς ὑπὸ ὡς ρίσεις :

$$(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1).$$

Ἐπὶ πλέον δέ ἔχομεν : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6(1+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6(1+x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6(1+x)$

Εἶναι δέ :

$$a) \quad r = \frac{\partial^2 f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}{\partial x^2} = -4, s = \frac{\partial^2 f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}{\partial x \partial y} = -2, t = \frac{\partial^2 f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}{\partial y^2} = -4 < 0.$$

Ἐπομένως $\Delta = rt - s^2 = +12 > 0$. Κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ εἶναι θέσις τοπικοῦ
μερίστου τῆς f , εἶναι δέ τοῦτο ἴσον πρὸς $f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{1}{9}$.

$$b) \quad r = \frac{\partial^2 f(-1, -1)}{\partial x^2} = 0, s = 6, t = 0 \quad \text{καὶ} \quad \Delta = rt - s^2 = -36 < 0.$$

Ἄρα τὸ $(-1, -1)$ δέν εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀμφοτέρου τῆς f .

Ὀμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὰ σημεῖα $(1, -1)$ καὶ $(-1, 1)$ δέν εἶναι θέσεις τοπικῶν ἀμφο-
τέρων τῆς f .

3^α/ Δίδεται ἡ συνάρτησις : $f(x, y) = x^4 + y^4$

Νὰ εὐρεθοῦν αἱ θέσεις τῶν τοπικῶν ἀμφοτέρων ταύτης.

Λύσις : Ἐχομεν $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$. Τὰ σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ ἔχει τοπι-
κὰ ἀμφοτέρωτα δὲ τὰ ἀναζητήσωμεν μεταξὺ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Τοῦτο δέ ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν $x = y = 0$.

$$\text{Εἶναι δέ} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \quad \text{καὶ} \quad r = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 2, s = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0, t = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0.$$

Εἶναι δέ καὶ $\Delta = rt - s^2 = 0$. Πιθανῶς λοιπὸν τὸ σημεῖον $(0, 0)$ νὰ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἀμφοτέ-
ρου. Πρὸς τοῦτοις καταφεύρομεν εἰς τὸν ὁρισμὸν.

Ἐξετάζομεν ἐάν ἡ διαφορὰ $f(x, y) - f(0, 0) = x^4 + y^4$ διατηρῇ πρόσημον εἰς μίαν περιοχὴν
 V τοῦ $(0, 0)$.

Πράγματι, διὰ ὑπάρθε $(x, y) \in V \setminus \{(0, 0)\}$ εἶναι $f(x, y) - f(0, 0) > 0$, δηλ. $f(x, y) > f(0, 0)$.

Συνεπῶς τὸ σημεῖον $(0, 0)$ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἐλαχίστου.

§2. ΤΟΠΙΚΑ ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ἐστω ἡ πραγματικὴ συνάρτησις f ὁρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον U τοῦ χώρου \mathbb{R}^q .

Θὰ λέγωμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον $x_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_q\} \in U$ ἡ συνάρτησις f παρουσιάζει ἓνα

μεν ένα τοπιούν άυροτάτου τής f .

Διά νά δυνθώμεν όμως νά άποφανθώμεν, άν μία λύσις του άνωτέρω συστήματος είναι θέσις άυροτάτου διά τήν f , δά πρέπει νά λάβωμεν ύπ' όψιν μας και τās μεριυās παραγώγους δευτέρας τάξεως. Κατωτέρω δίδομεν, άνευ άποδείξεως, μίαν πρότασιν (ύαντήν συνθήκην) τοπιουό άυροτάτου τής f .

Πρότασις V-2-2. Έστω ή πραγματιυή συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$, $q \geq 3$ ώρισμέ-
νη επί ένός άνοιυτου ύποσυνόλου $U \subset \mathbb{R}^q$, τής όποιās ύπάρχουν έν U και είναι συνε-
χεις αι μεριυαί παράγωγοι μέχρι και δευτέρας τάξεως και έστω τό σημείον
 $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in U$ τό όποιον είναι λύσις του συστήματος τών έισώσεων.

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, q$$

θέτομεν $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_q)}{\partial x_i \partial x_j}$ (Ίσχύει $a_{ij} = a_{ji}$),

και διά $p = 1, 2, \dots, q$ έστω ή όρίδουσα:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

τοιαύτη, ώστε $\Delta_1 = a_{11}$. Τότε:

α) Ίνα ή f έχη ένα τοπιούν ελάχιστον εις τό σημείον x_0 , άρκει αι όρίδουσαι

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q$ νά είναι πāsαι θετιυαί

β) Ίνα ή f έχη ένα τοπιούν μέριστον εις τό σημείον x_0 , άρκει αι άνωτέρω όρι-
δουσαι νά είναι έναλλάξ άρνητιυαί και θετιυαί (ήτοι ή συνάρτησις $-f$ νά παρου-
σιάζη τοπιούν ελάχιστον).

Παρατηρήσεις: 1^η/ Άν διά τό σημείον x_0 δέν πληρούται μία τών άνισοτήτων τής περι-
πτώσεως α) ή β) δέν δά πρέπει νά συμπεραίνωμεν, ότι τούτο δέν είναι θέσις άυρο-
τάτου. Είς αύτήν τήν περίπτωση ή τελιυή διαπίστωσις δά γίνεταί τή βοηθεία
του όρισμοό (βλέπε υατωτέρω παράδειγμα)

2^η/ Είς τήν περίπτωση τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3$, ή άνωτέρω ύα-

η συνθήκη τοπικού άκροτάτου εις έν σημείον $(x_0, y_0, z_0) \in U$ διατυπώνται ως κάτωθι:

α) Διά τό έλάχιστον:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) = f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

και

$$f''_{xx} = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0, \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} > 0. \quad (1)$$

β) Διά τό μέγιστον:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) = f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

και

$$f''_{xx} = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0, \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} < 0.$$

Παράδειγμα: Νά εύρεθούν τά τοπικά άκροτάτα τής συναρτήσεως:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz + 3zx$$

Λύσις: Επιλύομεν τό σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 3x^2 + 3y + 3z = 0 \\ f'_y &= 3y^2 + 3z + 3x = 0 \\ f'_z &= 3z^2 + 3x + 3y = 0 \end{aligned} \right\}$$

Τούτο δέ έχει τάς λύσεις $(0, 0, 0)$ και $(-2, -2, -2)$.

Έν συνέχεια εύρίσκειμεν τάς μεριδιά παραγώρους $\theta^{\alpha\beta}$ -τάξεως τής f . Αυτά είναι:

$$f''_{xx} = 6x, f''_{yy} = 6y, f''_{zz} = 6z, f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = 3.$$

α) Εις τό σημείον $(0, 0, 0)$ έχομεν τάς τιμάς τών μεριδιών παραγώρων:

$$f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 0 \text{ και } f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = 3$$

Είναι δέ:

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54.$$

Διά τό $(0, 0, 0)$ παρατηρούμεν ότι: $\Delta_1 = f''_{xx} = 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 > 0$, άρα δέν εφαρμόζονται αι ικαναί συνθήκαι και έπομένως ή πρότασις V - 2-1 (θλίπε σχετιωώς και άνωτέρω παρατήρησιν 1) δέν μάς πληροφορεί άν τό σημείον $(0, 0, 0)$ είναι ή δέν είναι θέσις άκροτάτου. Θά έξετάσωμεν τούτο τή βοηθεία του όρισμου, θά έξετάσωμεν δηλαδή άν

(1) οίσοσδήποτε τών συμβολισμών f''_{xx} ή f''_{yy} ή f''_{zz} ή $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ είναι δόκιμος και θά χρησιμοποιείται άδιακρίτως.

υπάρχει περιοχή V του σημείου $(0,0,0)$ εντός της οποίας η διαφορά:

$$f(x,y,z) - f(0,0,0) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy + 3yz + 3zx$$

διατηρή πρόσημον. Είς ολάνδηποτε όμως περιοχήν του $(0,0,0)$ υπάρχουν σημεία (x_0, y_0, z_0) και (x'_0, y'_0, z'_0) , ώστε να έχωμεν:

$$f(x_0, y_0, z_0) - f(0,0,0) > 0, f(x'_0, y'_0, z'_0) - f(0,0,0) < 0.$$

Άρα η διαφορά δεν διατηρεί πρόσημον και τό $(0,0,0)$ δεν είναι θέσις τοπικού άυροτάτου της f .

β) Είς τό σημείον $(-2, -2, -2)$ έχομεν:

$$f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = -12 \text{ και } f''_{xy} = f''_{yz} = f''_{zx} = 3$$

Είναί δέ:

$$\Delta_1 = -12 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & 3 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 135 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & 3 \\ 3 & 3 & -12 \end{vmatrix} = -1350 < 0.$$

Συνεπώς, κατά την προηγουμένην πρότασιν, είς τό έν λόγω σημείον $(-2, -2, -2)$ έχομεν τοπιυόν μέγιστον. Είναί δέ τούτο $f(-2, -2, -2) = 12$.

§ 3. ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΔΙΔΟΜΕΝΗΣ ΥΠΟ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗΝ ΜΟΡΦΗΝ

I. Τοπιυά άυρότατα της συναρτήσεως $f(x,y) = 0$.

Έστω η έξίσωσις $f(x,y) = 0$ (1). Υποθέτομεν ότι η συνάρτησις $f(x,y)$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως.

Θεωρούμεν τό σύστημα των εξισώσεων: $f(x,y) = 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0$ (2)

και έστω (x_0, y_0) μία λύσις του συστήματος (2), διά την οποίαν υποθέτομεν $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \neq 0$

Έπειδή $f(x_0, y_0) = 0$ και $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \neq 0$, συμφώνως πρός τό θεώρημα IV - 1-1 των πεπληγμένων συναρτήσεων, η εξίσωσις (1) όρίσει μία μόνον συνάρτησιν είς μίαν περιοχήν του (x_0, y_0) , έστω την $y = \varphi(x)$, και δια την οποίαν έχομεν $y_0 = \varphi(x_0)$.

Είναί δέ τότε:

$$y'_{x=x_0} = \varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = 0.$$

Ήτοι, τό σημείον $(x_0, y_0 = \varphi(x_0))$, πιθανόν να είναι θέσις τοπιυού άυροτάτου.

Η δευτέρα παράγωγος της $y = \varphi(x)$ δίδεται, ως γνωστόν (βλ. σελ. 82), υπό του τύπου:

$$y'' = \varphi''(x) = -\frac{(f_y')^2 f_{xx}'' - 2 f_x' f_y' f_{xy}'' + (f_x')^2 f_{yy}''}{(f_y')^3}$$

Είναι δε λόγω της (2)

$$\varphi''(x_0) = -\frac{f_{xx}''(x_0, y_0)}{f_{yy}''(x_0, y_0)}$$

Επομένως: 1^η/ Εάν $\varphi''(x_0) > 0 \iff f_{xx}''(x_0, y_0) \cdot f_y'(x_0, y_0) < 0$, τότε το σημείο x_0 είναι θέσις τοπικού ελαχίστου της $y = \varphi(x)$, η δέ τιμή του είναι $y_{\min} = \varphi(x_0) = y_0$.

2^η/ Εάν $\varphi''(x_0) < 0 \iff f_{xx}''(x_0, y_0) \cdot f_y'(x_0, y_0) > 0$, τότε το σημείο x_0 είναι θέσις τοπικού μεγίστου της $y = \varphi(x)$, η δέ τιμή του είναι $y_{\max} = \varphi(x_0) = y_0$.

3^η/ Εάν $\varphi''(x_0) = 0 \iff f_{xx}''(x_0, y_0) = 0$, τότε δεν δύναμεθα να αποφανθώμεν διά τα άμρό-
τατα της συναρτήσεως $y = \varphi(x)$ και ούτω εργαζόμεθα με τας παραγώγους ανωτέρας
τάξεως της $\varphi(x)$, εφ' όσον υπάρχουν και αι μερικοί παράγωγοι ανωτέρας τάξεως της $f(x, y)$.

IX. Τοπικά άμρότατα της συναρτήσεως $f(x, y, z) = 0$.

Έστω η εξίσωσις: $f(x, y, z) = 0$ (1) Υποθέτομεν ότι η συνάρτησις $f(x, y, z)$ έχει μερικάς
παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχείς.

Θεωρούμεν το σύστημα των εξισώσεων:

$$f(x, y, z) = 0, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

και έστω (x_0, y_0, z_0) μία λύσις αυτού, διά την οποίαν υποθέτομεν $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$.

Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα IX - 2-1_β τῶν πεπληρωμένων συναρτήσεων ὀρίσεται μία συν-
άρτησις ἢ $z = \varphi(x, y)$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $(x_0, y_0, z_0 = \varphi(x_0, y_0))$.

Ἐν συνεχείᾳ υποδορίσομεν τὰς μερικὰς παραγώγους $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ εἰς τὴν θέσιν (x_0, y_0) .

Εἶναι $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x'}{f_z'}$ καὶ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(f_x')^2 f_{xx}'' - 2 f_x' f_z' f_{xz}'' + (f_z')^2 f_{xx}''}{(f_z')^3}$$

Εἰς δὲ τὴν θέσιν (x_0, y_0, z_0) δὲ ἔχωμεν, λόγω τῆς (2):

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{f_{xx}''(x_0, y_0, z_0)}{f_{zz}''(x_0, y_0, z_0)}$$

Ἀναλόγως δὲ εὐρίσκομεν:

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{f_{xy}''(x_0, y_0, z_0)}{f_{zz}''(x_0, y_0, z_0)} \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = -\frac{f_{yy}''(x_0, y_0, z_0)}{f_{zz}''(x_0, y_0, z_0)}$$

Συμφώνως πρὸς τὰ εὐτεθέοντα εἰς τὴν § 1 αἱ συνθήκαι, ἵνα εἰς τὸ σημείο (x_0, y_0) ἡ
 $z = \varphi(x, y)$ ἔχη:

1^η/ Τοπικόν ἐλάχιστον εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0 \text{ και } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$$

(x_0, y_0) (x_0, y_0)

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι, ὁρῶν τῶν (3), ἰσοδυναμοῦν μέ τας κατωθι:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0 \text{ και } f''_{xx} > 0$$

(x_0, y_0, z_0) (x_0, y_0, z_0)

2^η/ Τοπικόν μέγιστον εἶναι:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} > 0 \text{ και } f''_{xx} < 0$$

(x_0, y_0, z_0) (x_0, y_0, z_0)

3^η/ Ἐάν

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = 0, \text{ τότε διὰ τὴν ἔκταυριθωσιν ἀποροτάτου χρειάζομεθα}$$

τὰς μεριμὰς παρακάτωι ἀνωτέρας τάξεως τῆς $f(x, y, z)$, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν αὗται.

Παραδείγματα: 1^η/ Ὑπολογίσατε τὰ ἀποροτάτα τῶν συναρτήσεων, αἵτινες ὁρίζονται ὑπὸ τῆς ἐισώσεως: $f(x, y) = y^4 - 8x^2 + x^4 = 0$ (1) (βλ. Σχ. 1)

Λύσις: Εἶναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -16x + 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

Τὸ σύστημα:

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ ἔχει τὰς λύσεις:}$$

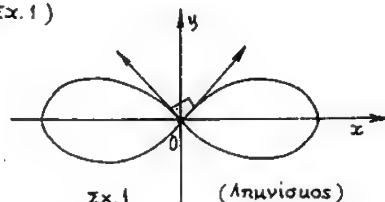
$$(x = \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{4}), (x = \frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{4}), (x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{4}), (x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ και } (x = 0, y = 0).$$

$$\text{Διὰ τὰς τέσσαρας πρώτας λύσεις εἶναι } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{4})} \neq 0.$$

Ἐπομένως εἰς τὴν περιοχὴν ἐνδοῦ τῶν τεσσάρων ἀνωτέρω λύσεων ἀντιστοιχεῖ καὶ μία συνάρτησις $y = \varphi(x)$.

Ἐν συνεχείᾳ ἐξετάσομεν τὰ κατωθι:

$$\text{Ἡ } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 + 12x^2 \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$



Ὅθεν, τὸ σημεῖον $(+\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{4})$ εἶναι θέσις τοπικοῦ μερίστου, εἶναι τοῦτο $y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Ὀμοίως εὐρίσκωμεν διὰ τὰ σημεία:

$$(+\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ θέσις ἐλαχίστου μέ } y_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(-\frac{1}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ θέσις μερίστου μέ } y_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}) \text{ θέσις ἐλαχίστου μέ } y_{\min} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Τὸ σημεῖον $(0,0)$ δὲν εἶναι θέσις ἀμφοτέρου.

2% Ὑπολογίσατε τὰ ἀμφοτέρωτα τῶν συναρτήσεων, αἵτινες ὁρίζονται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσης:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 0 \quad (1)$$

Λύσις: Εἶναι: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Τὸ σύστημα: $f(x,y,z) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} \neq 0 \quad (2)$

ἔχει τὴν μοναδικήν λύσιν $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = -1)$.

Ὅθεν, ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπιλύεται μονοσημάντως εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $(x_0 = 0, y_0 = 0)$,

ἔστω δὲ $Z = \varphi(x,y)$ ἡ οὕτως ὁρισμένη πεπλεγμένη συνάρτησις τοιαύτη, ὥστε $z_0 = \varphi(0,0) = -1$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{(0,0,-1)} = 4 > 0 \text{ καὶ } f'_x \cdot f'_y \Big|_{(0,0,-1)} = 2 > 0.$$

Ὅθεν τὸ σημεῖον $(0,0)$ εἶναι θέσις τοπικοῦ μερίστου τῆς $z = \varphi(x,y)$, εἶναι δὲ τοῦτο:

$$z_{\max} = \varphi(0,0) = -1.$$

§ 4. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΑΣ

Ἐστω μία πραγματικὴ συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$, $q = 2, 3, \dots$ ὥρισμένη εἰς ἓν ἀνοιχτόν ὑποσύνολον U τοῦ \mathbb{R}^q , τῆς ὁποίας αἱ μεταβληταὶ δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι, ἀλλὰ ἐπαληθεύουν τὰς p ἐξισώσεις $(p < q)$:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, \dots, \varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, \quad (1)$$

ἐνθα αἱ πραγματικαὶ συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ εἶναι ὥρισμέναι ἐπὶ τοῦ συνόλου $U \subset \mathbb{R}^q$.

Ἐστω τὸ σύνολον:

$$U_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q : \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, j = 1, 2, \dots, p\}$$

καὶ ἓν σημεῖον $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in U_0$.

Διάφορα προβλήματα οδηγούν εις αναζητησιν των άυροτάτων τιμών μιās συναρτήσεως, ως άνωτέρω ή f , ύποκειμένην εις μίαν ή περισσοτέρας από τās δεσμευτικές συνθήκας (1). Εις τās περιπτώσεις αυτές λέγομεν, ότι πρόκειται περί δεσμευμένων τοπιών άυροτάτων (άυροτάτων ύπό συνθήκας), εν αντιδιαστολή προς τὰ άυρότατα τὰ όποια διεπραγματεύθημεν μέχρι τούδε και τὰ όποια, προς διάκρισιν, καλούνται έλεύθερα άυρότατα.

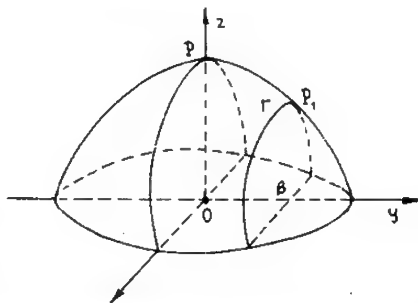
Διά να υαταστή σαφής ή διάκρισις μεταξύ του έλευθέρου και του υπό συνθήκην άυροτάτου, θεωρούμεν τήν συνάρτησιν: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ με πεδίο όρισμού τό σύνολον: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2+y^2 \leq 1\}$.

Τό μέγιστον της f είναι τό σημείο P , ενώ τό μέγιστον ταύτης υπό τήν συνθήκην:

$$y = \beta, \text{ όπου } 0 < \beta < 1$$

είναι τό σημείο P_1 (βλ. έναντι σχήμα).

Γεωμετρικώς τό σημείο P_1 είναι έν σημείο της καμπύλης Γ , τό όποϊον έχει μεγίστην κατηγμένην.



Κατωτέρω, δίδομεν τόν όρισμόν τοπιού άυροτάτου μιās συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ύπο συνθήκην και εν συνεχεία διατυπούμεν, άνευ άποδείξεως, μίαν αναγκαίαν συνθήκην άυροτάτου υπό συνθήκην.

Όρισμός V-4-1. Θά λέρωμεν ότι τό σημείο $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q) = x_0 \in U_0$ είναι μία θέσις (τοπιού) μερίστου, αντιστοιχως (τοπιού) έλάχιστου, της συναρτήσεως $f: U_0 \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ υπό τās συνθήκας:

$\phi_j(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, j=1, 2, \dots, p$, τότε και μόνον τότε, αν ύπάρχη περιοχή V του σημείου $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ τοιαύτη, ώστε: διά κάθε $x \in V \cap U_0$ να ισχύη:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_q) \leq f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q), \text{ αντιστοιχως } f(x_1, x_2, \dots, x_q) \geq f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$$

‘Η τιμή $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ καλείται τότε έν μέγιστον, αντιστοιχως έν έλάχιστον, υπό τās συνθήκας τās καθορισόμενες υπό τών: $\phi_j(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0$ με $j=1, 2, \dots, p$.

Τό πρόβλημα τό όποϊον θα μās άπασχολήση εις τήν παρούσαν παράγραφον είναι ή αναζήτησις και εύρεσις τών θέσεων των άυροτάτων τιμών της συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ύποκειμένην εις τās δεσμευτικές συνθήκας τās καθορισόμενες υπό τών:

$$\phi_j(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, j=1, 2, \dots, p. \quad (p < q)$$

Μία μέθοδος διά τήν αντιμετώπισιν προβλημάτων του άνωτέρω είδους είναι γνωστή ως 1) Τό $U_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q: \phi_j(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, j=1, 2, \dots, p\}$

ὑπὸ συνθήκας). Αὕτη ἔχει ὡς ἑξῆς :

θηλιανήν συνάρτησιν:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_q) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_q),$$

ηγε) και λαμβάνομεν τό σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, i=1, 2, \dots, q \\ \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, j=1, 2, \dots, p \end{cases}$$

Γ Υπό τις συνθήκες: $\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, j=1, 2, \dots, p$ Τότε υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ τοιούτοι ώστε το σημείο $(E_1, E_2, \dots, E_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ να είναι μία λύσις του συ-
στήματος (Σ) .

Παρατηρήσεις: 1^η Από σύστημα (Σ) αναλυτικώτερου γράφεται:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_q} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_q} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_q} + \dots + \lambda_p \frac{\partial \phi_p}{\partial x_q} &= 0 \\ &\vdots \\ \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, \dots, \phi_p(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0 \end{aligned} \right\} (\Sigma')$$

Τό ἀνωτέρω σύστημα (Σ') εἶναι ἓν σύστημα μέ $q+p$ ἀγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ καί $q+p$ ἑξισώσεις. Ἐάν $(E_1, E_2, \dots, E_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ εἶναι μία λύσις αὐτοῦ, τό σημεῖον (E_1, E_2, \dots, E_q) εἶναι ἐνδεχόμενον νά εἶναι θέσις ἀπορρότου τῆς f . Ἄν τό σύστημα δέν ἔχῃ λύσιν, τότε ἡ f δέν λαμβάνει ἀπορρότας τιμὰς εἰς τό σύνολον U . Εἰς τήν πρᾶξιν ἀπαλείφουμεν τοὺς ἀγνώστους $\lambda_j, j=1, 2, \dots, p$ καί ἰσχυόμεν ἓν σύστημα μέ q ἑξισώσεις καί ἀγνώστους τοὺς x_1, x_2, \dots, x_q .

23) Εἰς τὴν πρᾶξιν ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰς ἀνωτά-
τας τιμὰς (μέγιστα καὶ ἐλάχιστα) μιᾶς συναρτήσεως $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ὑποκειμένην
εἰς τὰς δεσμευτικὰς συνθήκας τὰς υποδιδομένας ὑπὸ τῶν:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, \dots, \varphi_p(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0$$

Τότε: α) Σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν:

$$F(x_1, \dots, x_q, \lambda_1, \dots, \lambda_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_q) + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_p \varphi_p$$

μέ παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

β) Μηδενίζομεν τὰς μεριὰς παραγώγους τῆς F ὡς πρὸς τὰς $q+p$ μεταβλη-
τὰς: $x_1, x_2, \dots, x_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, ἴπτοι:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_q} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1 = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \varphi_2 = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_p} = \varphi_p = 0.$$

γ) Ἐπιλύομεν μετὰ ταῦτα τὸ σύστημα τοῦτο τῶν $q+p$ ἑξισώσεων μέ τούς $q+p$
ἀγνώστους: $x_1, x_2, \dots, x_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

δ) Ἄν $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ εἴναι μία λύσις τοῦ συστήματος τούτου, τό-
τε τὸ σημεῖον (x_1, x_2, \dots, x_q) εἴναι ἐνδεχόμενον νὰ εἴναι μία θέσις ἀνωτάτου τῆς
 f ὑπὸ τὴν συνθήκην (1). Ἀπομένει θεθαίως ὁ ἔλεγχος τοῦ ἂν ἔν ὡς ἂνω εὐρε-
θὲν σημεῖον εἴναι ἢ ὄχι θέσις τοπικοῦ ἀνωτάτου καὶ εἰς καταφαντικὴν περι-
πτώσιν ποῖον τὸ εἶδος τοῦ ἀνωτάτου.

Ἐπειδὴ εἰς τὰς ἐφαρμογὰς συνθῶς παρουσιάζονται αἱ περιπτώσεις ($q=3, p=2$),
($q=3, p=1$) ἀναφέρομεν κατωτέρω, ἄνευ ἀποδείξεως, δύο σχετικὰς προτάσεις αἱ ὁ-
ποῖαι δίδουν ἱκανὰς συνθήκας, ἵνα μία λύσις τοῦ συστήματος (Σ) εἴναι θέσις ἀνωτά-
του τῆς f .

Πρότασις II-4-1. Ἐστωσαν ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x, y, z)$ ὠρισμένη εἰς ἓν ἀνοι-
κτὸν ὑποσύνολον U τοῦ R^3 μέ μεριὰς παραγώγους συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ U καὶ αἱ συνθῆ-
και: $\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0$ (σ)

θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν: $F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z)$.

Ἐστω:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & \varphi_{1x} & \varphi_{2x} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & \varphi_{1y} & \varphi_{2y} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & \varphi_{1z} & \varphi_{2z} \\ \varphi_{1x} & \varphi_{1y} & \varphi_{1z} & 0 & 0 \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} & \varphi_{2z} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

καὶ $x_0 = (x_0, y_0, z_0, \lambda_1, \lambda_2)$ μία λύσις τοῦ συστήματος $F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 0, F'_{\lambda_1} = 0, F'_{\lambda_2} = 0$.

τότε:

- i) Εάν $\Delta > 0$ διά μίαν λύσιν του συστήματος, τότε η λύσις είναι θέσις ελάχιστου διά την f .
- ii) Εάν $\Delta < 0$ διά μίαν λύσιν του συστήματος, τότε η λύσις είναι θέσις μεγίστου διά την f .

→ Εφαρμογή: Νά εύρεθούν τὰ σημεία τῆς καμπύλης:

$$\varphi_1(x,y,z) \equiv xz+yz+2=0, \varphi_2(x,y,z) \equiv xy-1=0$$

τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν $(0,0,0)$ τὴν ἐλάχιστην ἢ μεγίστην ἀπόστασιν.

Λύσις: Πρέπει νά εύρεθούν τὰ ἀυρότατα τῆς $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ἢ τῆς $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, ὅταν $\varphi_1(x,y,z)=0$ καὶ $\varphi_2(x,y,z)=0$.

Σχηματίζομεν τὴν βοηθητικὴν συνάρτησιν:

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2 + \lambda_1(xz+yz+2) + \lambda_2(xy-1).$$

Πιθαναὶ θέσεις ἀυροτάτων τῆς f εἶναι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$F'_x=0, F'_y=0, F'_z=0, F'_{\lambda_1}=0, F'_{\lambda_2}=0.$$

Τὸ σύστημα αὐτὸ δέχεται τὰς κατωθὶ λύσεις:

$$\alpha) \quad x=1, y=1, z=-1, \lambda_1=1, \lambda_2=-1$$

$$\beta) \quad x=-1, y=-1, z=1, \lambda_1=1, \lambda_2=-1.$$

Θά ἐξετάσωμεν τώρα τὸ πρόσημον τῆς ὀρίσούσης Δ , ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὴν ἀνωτέρω πρότασιν διά καθε λύσιν.

Διά τὴν λύσιν α) εἶναι: $\Delta = 24 > 0$ καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον $(1,1,-1)$ εἶναι θέσις τοπιουῦ ἐλάχιστου. Τὸ τοπιουὸν ἐλάχιστον τῆς f εἶναι 3 καὶ τῆς $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ εἶναι $\sqrt{3}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εύρίσκουμεν ὅτι καὶ εἰς τὴν δευτέραν λύσιν ἡ συνάρτησις παρουσιάζει τοπιουὸν ἐλάχιστον: $f(-1,-1,1)=3$.

Πρότασις V-4-2. Ἐστώσαν ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὠρισμένη εἰς ἓν ἀνοιχτὸν ὑποσύνολον U τῆς \mathbb{R}^3 μὲ μερικὰς παραγώγους συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ U καὶ ἡ συνθήκη: $\varphi(x,y,z)=0$.

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν: $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda \varphi(x,y,z)$.

Έστωσαν αὶ ὀρίσονται:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & \varphi_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & \varphi_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & \varphi_y \\ F_{zy} & F_{zz} & \varphi_z \\ \varphi_y & \varphi_z & 0 \end{vmatrix}$$

καὶ $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ μία λύσις τοῦ συστήματος: $F'_x=0, F'_y=0, F'_z=0, F'_\lambda=0$.

Τότε:

- i) Ἐάν διὰ μίαν λύσιν τοῦ συστήματος εἶναι: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0$, τότε ἡ λύσις εἶναι θέσις ἐλαχίστου διὰ τὴν f .
- ii) Ἐάν διὰ μίαν λύσιν τοῦ συστήματος εἶναι: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$, τότε ἡ λύσις εἶναι θέσις μεγίστου διὰ τὴν f .

Ἐφαρμογή: Νά εὑρεθοῦν τὰ τοπικὰ ἀμρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ὑπὸ τὴν συνθήκην: $\varphi(x, y, z) = x + y + z + 1 = 0$.

Λύσις: Α' τρόπος. Σχηματίζομεν τὴν βοηθητικὴν συνάρτησιν:

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z + 1),$$

ὅπου λ προσδιοριζέται πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ θεωροῦμεν τὸ σύστημα:

$$F'_x=0, F'_y=0, F'_z=0, F'_\lambda=0,$$

ἥτοι τὸ σύστημα: $2x + \lambda = 0, 2y + \lambda = 0, 2z + \lambda = 0, x + y + z + 1 = 0$.

Τὸ σύστημα τοῦτο δέχεται τὴν μοναδικὴν λύσιν:

$$x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = -\frac{1}{3}, \lambda = \frac{2}{3}$$

Συνεπῶς τὸ σημεῖον $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ εἶναι πιθανόν θέσις τοπικοῦ ἀμρότατου τῆς f .

Πρὸς καθορισμὸν τοῦ ἂν τὸ ὡς ἄνω σημεῖον εἶναι θέσις ἀμρότατου καὶ εἰς καταφατικὴν περίπτωσιν πρὸς καθορισμὸν τοῦ ἔδους τοῦ ἀμρότατου θὰ ἐξετάσωμεν τὰ πρόσθημα τῶν ὀρισουσῶν Δ_1 καὶ Δ_2 , αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἀνωτέρω πρότασιν V-4-2.

Εὐνόλως ὁμῶς εὐρίσκειμεν: $\Delta_1 = -12 < 0, \Delta_2 = -4 < 0$.

Ἄρα τὸ σημεῖον $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ εἶναι θέσις τοπικοῦ ἐλαχίστου.

Ἡ ἀπάντησις δύναιται νὰ δοθῇ καὶ μετὰ ἐφαρμογὴ τοῦ ὁρισμοῦ. Πρὸς τοῦτοις σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν:

$$f(x, y, z) - f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = f(x, y, z) - \frac{1}{3} = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

Ἀλλὰ :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

Ὅθεν :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Ἄρα :

$$f(x, y, z) - f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \geq 0.$$

δηλ. τὸ σημεῖον $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ εἶναι θέσις ἐλαχίστου διὰ τὴν f ὑπὸ τὴν συνθήκην:

$$x+y+z = -1$$

!!

→ Β' Τρόπος. Λόγω τῆς δοθείσης συνθήκης ἔχομεν:

$$f(x, y, z) = f(x, y, -x-y-1) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$$

Ἀρκεῖ ὅθεν νὰ εὗρωμεν τὰ τοπιὰ ἀκρότατα τῆς συναρτήσεως:

$$g(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1$$

Ἐχομεν: $g'_x = \frac{\partial g}{\partial x} = 4x + 2y + 2$, $g'_y = \frac{\partial g}{\partial y} = 4y + 2x + 2$.

Τὸ σύστημα: $g'_x = 0$, $g'_y = 0$ δεχεται τὴν μοναδικὴν λύσιν: $(x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3})$

Ἐξ ἄλλου εὐνόως εὐρίσκομεν:

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \bigg|_{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})} = 4 > 0, \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \bigg|_{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})} = 2, \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \bigg|_{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})} = 4.$$

Ὅθεν: $\Delta = rt - s^2 = 12 > 0$.

Ἐπειδὴ $\Delta > 0$ καὶ $r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \bigg|_{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})} = 4 > 0$, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν V-1-2 (βλέπε σελ. 109), ἡ συνάρτησις $g(x, y)$ παρουσιάζει τοπιὸν ἐλάχιστον εἰς τὴν θέσιν $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ f παρουσιάζει τοπιὸν ἐλάχιστον εἰς τὴν θέσιν $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ὑπὸ τὴν συνθήκην: $x+y+z+1=0$, εἶναι δέ:

$$f_{\min} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = g_{\min} \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

§ 5. ΑΠΟΛΥΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ὁρισμός V-5-1. Ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ὥρισμένη εἰς ἓν ὑποσύνολον U τοῦ \mathbb{R}^n θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχει ἓν ἀπόλυτον μέριστον (ἀντ. ἀπόλυτον ἐ-

πλάσιον) επί του συνόλου U , εάν υπάρχει ένα σημείον $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_q)$ του U τοιούτου, ώστε διά κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \in U$ να έχουμε: $f(x) < f(x_0)$ (αντ. $f(x) > f(x_0)$).

Τα απόλυτα μέγιστα και ελάχιστα ονομάζονται, με κοινόν όνομα, απόλυτα άκρότατα.

Προφανώς έν απόλυτον άκρότατον είναι συγχρόνως και ένα τοπιυόν άκρότατον (σχετιυόν άκρότατον). Η διαφορά μεταξύ ενός απόλυτου άκροτάτου και ενός τοπι-
υού άκροτάτου μιας συναρτήσεως είναι ότι τό μέν απόλυτον άκρότατον είναι μία ιδιότης την όποιαν παρουσιάζει (πιθανόν) ή συνάρτησις αναφερομένη αυτή (ή ιδιότης) έφ' όλουλήρου του πεδίου όρισμού της συναρτήσεως, ενώ τό τοπιυόν ά-
κρότατον είναι μία ιδιότης της συναρτήσεως αναφερομένη εις μίαν περιοχήν ενός σημείου του πεδίου όρισμού της.

Αναφορικώς με τά απόλυτα άκρότατα διατυπώμεν άπλώς, άνευ άποδείξεως, την κάτωθι πρότασιν.

Πρότασις V- 5-1. Εάν ή πραγματική συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ είναι συνεχής επί ενός συμπαρούς συνόλου U του \mathbb{R}^q , τότε ή f έχει έν απόλυτον μέγιστον και έν απόλυτον ελάχιστον επί του U . (Βλ. σχετιυώς τόμος Α' σελ. 415).

Δέν θά ασχοληθώμεν ευτενέστερον με τό θέμα τούτο. Παραπέμπομεν τόν αναγνώ-
στην εις τό βιβλίον ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ, τεύχος Γ' του Δ. Α. ΚΑΠΠΟΥ.)

Εφαρμογή: Νά εύρεθούν, άν υπάρχουν, τά απόλυτα άκρότατα της συναρτήσεως:

$$f(x, y, z) = xyz, \text{ όρισομένης επί του συνόλου } U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Λύσις: Τό σύνολον U είναι συμπαρές, όθεν, κατά την άνωτέρω πρότασιν, υπάρχουν απόλυτα άκρότατα της συνεχούς συναρτήσεως f . Πρός τούτοις άρκει νά εύρωμεν τά άκρότατα της συναρτήσεως: $f(x, y, z) = xyz$
υπό την συνθήκην την καθορισομένην υπό των:

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \varphi_2(x, y, z) = x + y + z = 0.$$

Ένταυθα έχομεν $q=3, p=2$, ότε εφαρμόμεθα αναλόγως πρός την εφαρμογήν της προ-
τάσεως V - 4-1.

Θέτουμεν :

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$$

και θεωρούμεν το σύστημα : $F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 0, F'_{\lambda_1} = 0, F'_{\lambda_2} = 0$.

Τούτο είναι ισοδύναμον προς τα κάτωθι συστήματα :

$$) \quad \alpha) \quad \begin{cases} y - x = 0 \\ yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ xy + \lambda_1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}, \quad \theta) \quad \begin{cases} z - 2\lambda_1 = 0 \\ yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ xy + \lambda_1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Αι λύσεις του πρώτου συστήματος είναι :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z = -\sqrt{2}, \quad \lambda_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z = \sqrt{2}, \quad \lambda_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Αι λύσεις του δευτέρου συστήματος είναι :

$$x = -\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6}, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, \quad z = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6}, \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6}, \quad y = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, \quad z = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}$$

Αι αντίστοιχοι τιμαί της f είναι :

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, \frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}(-1+\sqrt{5})}{6}, -\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{5})}{6}, \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Είναι τώρα εύκολον να συμπεράνωμεν ότι το απόλυτον ελάχιστον της f είναι η τιμή :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right), \quad \text{το δε απόλυτον μέγιστον η τιμή : } \frac{\sqrt{2}}{2} = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right).$$

Συμπληρώματα και Άσκησεις

1. Να ευρεθούν τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα των κάτωθι συναρτήσεων:

α). $f(x, y) = x^2 + 2x - y^2 - 4y + 3$

β). $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

γ). $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$

δ). $f(x, y) = y \cdot \sqrt{1+x} + x \sqrt{1+y}$ διά $x > -1$ και $y > -1$

ε). $f(x, y) = x^3 + x^4 - 2x^2y + y^2$

ς). $f(x, y) = (x+y-3) \cdot e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

ζ). $f(x, y) = x - 2y + \log \sqrt{x^2+y^2} + 3 \log \frac{y}{x}, x > 0$

η). $f(x, y) = \eta \mu \chi \eta \mu \eta \mu (x+y), (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$

2. Δείξτε ότι η συνάρτησις $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 3x(x^2 + y^2) + 2x^2$ με πεδίο ορίσμου των x, y των \mathbb{R}^1 έχει εν. ελάχιστον επί ευθείας ευθείας διερχομένης διά της αρχής, δέν έχει όμως ένα ελάχιστον εις την αρχήν.

3. Κιβώτιον σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ανοικτόν πρὸς τὰ ἄνω ἔχει ὄγκον 32 dm^3 . Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ διαστάσεις του ὥστε ἡ ὀλίμη του ἐπιφάνεια νὰ εἶναι ἐλάχιστη;

4. Νὰ υπολογισθοῦν αἱ σταθεραὶ a καὶ b εἰς τρόπον ὥστε ἡ συνάρτησις:

$$f(a, b) = \int_0^1 \{ \eta \mu x - (ax^3 + bx) \}^2 dx$$

νὰ γίνεταί ἐλάχιστη.

(Υπόθ. Ἐπιλύσατε τὸ σύστημα: $\frac{\partial f(a, b)}{\partial a} = 0, \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} = 0$ κατ'εἰρη.

5. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 9. Νὰ ευρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ ἐάν τὸ γινόμενόν των εἶναι ἐλάχιστον.

6. Δείξτε ὅτι: ὁ ὄγκος τοῦ μεγίστου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου τὸ ὅποιον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ ἐλλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ εἶναι $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

7. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y, z) = xyz(1-x-y-z)$ έχει ένα σχετιuόν (τοπιuόν) μέγιστον εἰς τὸ σημεῖον $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

7a. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐλάχιστη ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν: $(E_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z+2$ καὶ $(E_2): \frac{x}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$.

8. Εὑρετε τὰ ἀμuότατα τῶν συναρτήσεων: α) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1$. β) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2x - 12y + 12z$

9. Υπολογίστε τὰ ἀμuότατα τῶν αὐτῶν συναρτήσεων, αἵτινες ὀρίσονται ὑπὸ ἐκuόσσης τῶν ἀμολούων ἐξισώσεων:

α) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 3xy = 0$ β) $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3xy = 0$

γ) $f(x, y) = y^2 + y - x^2 = 0$ δ) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$

ε) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ στ) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xz + 2xz + 4yz - 7 = 0$

(Μία λύσις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ $(x_0, y_0, z_0) = (4, -3, 2)$).

10. Εὑρετε τὴν ἐλάχιστην ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν μέχρι τῆς ὑπερβολῆς:

$$x^2 + 8xy + 7y^2 = 225, z = 0.$$

10a. Νά εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $f(x, y) = \int_x^y \frac{\pi t + 1}{t} dt$ ($x < y$).

11. Εὑρετε τὰ ἀμuότατα τῆς συναρτήσεως: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ὑπὸ τὴν συνθήκην τὴν μαθορισμένην ὑπὸ τῶν:

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y - z = 0, \varphi_2(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0.$$

12. Εὑρετε τὰ ἀμuότατα τῆς συναρτήσεως $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, ὑπὸ τὴν συνθήκην: $ax + by + cz = 1$.

13. Ὁμuίως τῆς συναρτήσεως $f(x, y) = xy$, ὑπὸ τὴν συνθήκην: $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.

14. Ὁμuίως τῆς συναρτήσεως $f(x, y, z) = xyz$ ὑπὸ τὴν συνθήκην: $\varphi(x, y, z) = xy + (y+z)z + 1 = 0$.

14a. Ἐάν $\varphi(a) = k \neq 0$, $\varphi'(a) \neq 0$ καὶ οἱ x, y, z ἱκανοποιῶν τὴν σχέσιν: $\varphi(x) \cdot \varphi(y) \cdot \varphi(z) = k^3$, δείξτε ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x) + f(y) + f(z)$ ἔχει ἕνα μέγιστον ὅταν εἶναι $x = y = z = a$, ὑπὸ τὸν ὅρον νά εἶναι $f'(a) \cdot \left(\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)} - \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)} \right) > f''(a)$

15. Ομοίως της συναρτήσεως: $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}xy + 5y^2$ υπό την συνθήκην:

$$\varphi(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0.$$

Υπόδ. Θέσαστε $x = 2 \cos t$, $y = \eta \mu t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ και ακολουθώντας εύρετε τα τοπικά άκροτα της συνθέτου συναρτήσεως:

$$g(t) = f(2\cos t, \eta \mu t) = 4\cos^2 t + 5\eta \mu^2 t - \eta \mu t \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

16. Εύρετε τα άκροτα της συναρτήσεως $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ επί της περιφέρειας με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 1$.

17. Εύρετε τα απόλυτα άκροτα της $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκην την υποδρισμένην υπό των: $\varphi_1(x,y,z) = x+y+z=0$, $\varphi_2(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 4(z^2-1)=0$.

18. Εύρετε τα απόλυτα άκροτα της συναρτήσεως: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1$ υπό την συνθήκην: $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0$.

19. Να εύρεθῇ σημείον τοῦ επιπέδου $z = x+y$ τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τὰ σημεία $A(1,1,1)$ καὶ $B(-2,-2,-2)$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

20. Ἐστω ὅτι ἡ θερμοκρασία εἰς πᾶθε σημείον (x,y,z) τῆς σφαίρας: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως f με τύπον: $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$.

Νὰ ἐξετασθῇ ἐὰν ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς σφαίρας πηγαὶ θερμοτήτος καὶ ἀκολουθῶς νὰ εὑρεθῇ ἡ θερμοκρασία εἰς αὐτάς.

Υπόδ. Αἱ πηγαὶ θερμοτήτος εἶναι αἱ θέσεις ἀκροτάτων τῆς συναρτήσεως:

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z, \quad \text{ὅταν } x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0.$$

21. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκροτάτα τῆς συναρτήσεως: $f(x,y,z) = x \log x + y \log y + z \log z$ υπό την συνθήκην: $x+y+z=a$, $a>0$.

22. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σχετιὰ ἀκροτάτα τῆς συναρτήσεως:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}, \quad (x>0, y>0, z>0).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΩΝ

§1. ΑΝΩΜΑΛΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἐστω ἡ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης ὑπὸ πεπληρωμένην μορφήν $F(x,y)=0$. Ἐνα σημεῖον τῆς καμπύλης καλεῖται ὁμαλόν, ἐὰν εἰς αὐτό τό σημεῖον εἶναι $F_y(x,y) \neq 0$. Εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν καὶ νὰ ἐπιτύκωμεν μίαν μοναδικὴν διαφορίσιμον λύσιν τῆς μορφῆς $y=f(x)$. Ἐπὶ πλεον ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον εἶναι $y' = -\frac{F_x}{F_y}$, (βλ. σχετικῶς κεφ. IV, § 1). Ἀναλόγως τό σημεῖον θά καλεῖται ὁμαλόν ἐὰν $F_x(x,y) \neq 0$.

Καλούμεν ἀνώμαλα ἢ ἰδιάζοντα σημεῖα τῆς καμπύλης αὐτῆς διὰ τὰ ὁποῖα ὑκανοποιούνται συγχρόνως αἱ ἐξισώσεις:

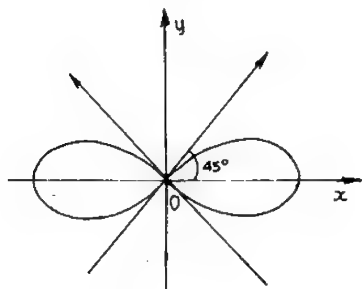
$$F_x(x,y) = 0, \quad F_y(x,y) = 0 \quad (2)$$

Εἰς ἓνα ἀνώμαλον σημεῖον δέν δυνάμεθα, ἔν γένει, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν κλίσιν $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ τῆς ἐφαπτομένης.

Ἐνας σπουδαῖος τύπος ἀνωμάλου σημείου εἶναι τό λεγόμενον πολλαπλοῦν σημεῖον ἢ κόμβος, ὅτλ. τό σημεῖον διὰ τοῦ ὁποίου διέρχονται δύο ἢ περισσότεροι κλάδοι τῆς καμπύλης. π.χ. Τό σημεῖον $(0,0)$ εἶναι πολλαπλοῦν σημεῖον τοῦ Ἀληνίου $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ (βλ. Σχ.1 ἐπομένης σελίδος).

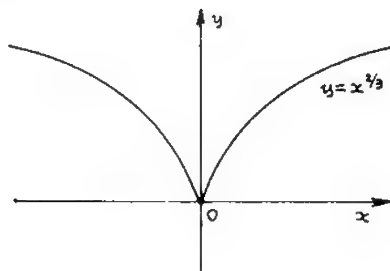
Ἡνα ἔχωμεν ἓνα πολλαπλοῦν σημεῖον, αἱ συνθήκαι $F_x = 0, F_y = 0$ εἶναι ἀναρκαῖαι, ἀλλὰ αὐτό δέν σημαίνει ὅτι εἶναι καὶ ὑκαναί διὰ τὴν ὑπαρεῖν πολλαπλοῦ σημείου. π.χ. Ἄν θεωρήσωμεν τὴν καμπύλην $y^3 - x^4 = 0$. Διὰ τό σημεῖον $(0,0)$ ἔχομεν $F_x = F_y = 0$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης γράφεται $y = x^{4/3}$. Παρατηροῦμεν ὅτι: $(-x)^{4/3} = x^{4/3}$, ὁθεν αὕτη εἶναι συμμετρίκῃ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y . Εἶναι δέ $y' = \frac{4}{3} x^{1/3}$, συνεπῶς ἡ καμπύλη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἁξόνων. Ἡ δευτέρα παράγωγος εἰς τὴν θέσιν $(0,0)$ γίνεται ἀπειρος ὁθεν ἂν καὶ μὴ ἐνδύωνται αἱ πρῶται μερικαὶ παράγωγοι εἰς τὴν ἀρχὴν, ἔν τούτοις εἰς τὴν περιοχὴν αὐτοῦ τοῦ σημείου ἡ καμπύλη εἶναι ὁμαλὴ καὶ ἔχει ἓναν κλάδον.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η υαμπύλη, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $(y-x)^2=0$. Αὕτη εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς (διχοτόμος τῆς γων. $0xy$). Παρατηροῦμεν διὰ τὸ σημεῖον $(0,0)$ ὅτι εἶναι: $F_x = F_y = 0$, ὅπου $F(x,y)=(y-x)^2$; ἥτοι ἀν καὶ μηδενίζονται αἱ F_x, F_y εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ ἐν τούτοις ἡ υαμπύλη εἶναι ὁμαλὴ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου αὐτοῦ.



Λημνίσκος

(Δύο ἐφαπτόμεναι διὰ τοῦ 0)
Σχ. 1



(Μία ἐφαπτομένη διὰ τοῦ 0)
Σχ. 2

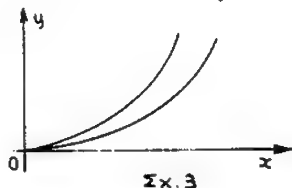
Ένας ἄλλος τύπος ἀνωμαλῶν σημείων εἶναι αἱ λεγόμεναι *κορυφαί*. Καὶ εἰς αὐτὰ τὰ σημεία ἀμφότεραι αἱ μεριμαὶ παράγωγοι F_x, F_y μηδενίζονται.

Ένα χαρακτηριστικὸν παράδειγμα εἶναι ἡ υαμπύλη, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $y^3-x^2=0$ ἢ $y=x^{2/3}$ (βλ. Σχ 2). Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον $(0,0)$ εἶναι μία κορυφή τῆς ἐν λόγῳ υαμπύλης, ἥτις ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο κλάδους, οἵτινες ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην (τὸν oxy) εἰς τὸ σημεῖον 0. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *σημεῖον ἀναυιάμψεως αᾶ' εἵδους*, ὅταν κλάδοι τῆς υαμπύλης μεῖνται ἐκτετρωθεν τῆς ἐφαπτομένης. Τέλος ἀν θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(y-x^2)^2-x^3=0$$

τὸ σημεῖον $(0,0)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον.

Ἡ γραμμὴ ἔχει δύο κλάδους $y=x^2 \pm \sqrt{x^3}$ διὰ $x \geq 0$, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τοῦ oxy εἰς τὸ σημεῖον 0 καὶ μεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς τὸν oxy (βλ. Σχ. 3). Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται *σημεῖον ἀναυιάμψεως βᾶ' εἵδους*.



Σχ. 3

Ἡδὴ ὥς ἐξετάσωμεν τὸ ἄνω θέμα τῶν ἀνωμάλων σημείων κἀπὼς ἐυτενέστερον. Ἐστω $F(x,y)=0$ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (γ), ὅπου τὸ σημεῖον $M(x,y)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον ταύτης, δηλ. $F_x = F_y = 0$. Ἀναπτύσσομεν τὴν $F(x,y)$ κατὰ Ταυλὸν εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου $M(x,y)$ καὶ ἔχομεν:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = F(x,y) + F_x \cdot \Delta x + F_y \cdot \Delta y + \frac{1}{2} (F_{xx} \cdot \Delta x^2 + 2F_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + F_{yy} \cdot \Delta y^2) + R_3 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον $M(x+\Delta x, y+\Delta y)$, ἐξ ὑποθέσεως, κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ ἐπειδὴ $F(x,y) = F_x(x,y) = F_y(x,y) = 0$, ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$F_{xx} \cdot \Delta x^2 + 2F_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + F_{yy} \cdot \Delta y^2 + \frac{R_3}{\Delta x^2} = 0 \quad (2)$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον $M' \rightarrow M$, ὅτε καὶ $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ καὶ λὼγῳ τοῦ ὅτι ὁ R_3 περιέχει ὅρους τουλάχιστον εἰς τὴν τρίτην δύναμιν ὡς πρὸς $\Delta x, \Delta y$, ὁ τύπος (2) μετὰ τὴν ἀψιν τῶν ὁρίων, δίδει:

$$F_{xx}'' + 2 \cdot F_{xy}'' \cdot y' + F_{yy}'' \cdot y'^2 = 0 \quad (3)$$

ἵνα λοιπὸν εἰς τὸ θεωρηθὲν ἀνώμαλον σημεῖον $M(x,y)$ ὑπάρχουν ἐφαπτόμεναι τῆς καμπύλης, ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν πραγματικαὶ ριζαὶ τῆς (3) ὡς πρὸς y' . Πρὸς τούτοις ἔστω $F_{yy} \neq 0$ καὶ οὕτω διαυρίνομεν τὰς κάτωδι περιπτώσεις:

I. Ἐὰν ἡ διαυρίνουσα τῆς (3) δηλ. ἡ $F_{xy}''^2 - F_{xx}'' \cdot F_{yy}'' > 0$, διὰ τοῦ σημείου M (διπλὸ ἢ κώμβος) διέρχονται δύο ἐφαπτόμεναι, ὁποῦ ἔχομεν ἐν τῆς (3) δύο διαφορετικὰς τιμὰς τοῦ y' . Ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐφαπτομένης εἶναι:

$$y' = \frac{Y-y}{X-x} \quad (4)$$

ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν τελικῶς:

$$(X-x)^2 F_{xx}'' + 2(X-x) \cdot (Y-y) F_{xy}'' + (Y-y)^2 F_{yy}'' = 0 \quad (5)$$

Ἡ (5) δίδει τὰ δύο σεῦρη τῶν ἐφαπτομένων.

Π.χ. Ὁ Ἀλημνίσμος $(x^2+y^2)-2a^2(x^2-y^2)=0$ ἢ ἡ στροφοειδὴς $(x^2+y^2)(x-2a)+a^2x=0$ ἔχουν τὸ σημεῖον $M(0,0)$ διπλὸ μὲ δύο διαφορετικὰς ἐφαπτομένας.

II. Εάν $F_{xy}'' - F_{yx}'' \cdot F_{yy}'' = 0$, τότε θα διέρχωνται διά του διπλού σημείου δύο συμπίπτουσες εφαπτόμενες, δηλ. οι δύο κλάδοι της καμπύλης εφάπτονται αλλήλων. Είναι η περίπτωση των γωνιαίων σημείων. Έν της (3) λαμβάνομεν τότε: $y' = -\frac{F_{xy}''}{F_{yy}''}$, ή δέ εξίσωσις της εφαιπτομένης είναι:

$$-\frac{F_{xy}''}{F_{yy}''} = \frac{Y-y}{X-x} \quad \text{ή} \quad F_{xy}''(X-x) + F_{yy}''(Y-y) = 0 \quad (6)$$

III. Εάν $F_{xy}'' - F_{yx}'' \cdot F_{yy}'' < 0$, εις αὐτήν τήν περίπτωσιν δέν ἔχομεν πραγματικὴν ἐφαπτομένην καὶ τὸ σημεῖον καλεῖται τότε μεμονωμένον σημεῖον.

Π.χ. Ἐστω ἡ καμπύλη $(x^2 - a^2)^2 + (y^2 - \beta^2)^2 = a^4 + \beta^4$. Ἡ τιμὴ $x=y=0$ ἐκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν τῆς καμπύλης, ἀλλὰ πᾶσαι αἱ ἄλλαι τιμαὶ τῶν x, y αἱ κείμεναι ἐντὸς τοῦ χωρίου $|x| < a\sqrt{2}$, $|y| < \beta\sqrt{2}$ καθίσταν τὸ ἀριστερόν μέλος τῆς ἐξίσωσεως μικρότερον τοῦ δεξιοῦ, ἄρα τὸ σημεῖον $M(0,0)$ εἶναι μεμονωμένον σημεῖον τῆς καμπύλης.

Τέλος παραλείπομεν τὴν περίπτωσιν ὅπου πᾶσαι αἱ μερικαὶ παράγωγοι δευτέρας ἢ καὶ ἀνωτέρας τάξεως μηδενίζονται εἰς ἓνα σημεῖον. Ἡ περίπτωση αὕτη τῶν ἀνωμάλων σημείων χρήσει περαιτέρω διερευνήσεως.

Ἐφαρμογή: Νὰ διερευνηθοῦν τὰ ἀνώμαλα σημεία τοῦ λημνίσμου $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

Λύσις: θέτομεν $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$.

Εἶναι δέ, $F_x = 4(x^2 + y^2)x - 2a^2x$, $F_y = 4(x^2 + y^2)y + 2a^2y$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα: $F_x = 0, F_y = 0$, ἀληθεύει διά $x = y = 0$ καὶ ὅτι ἡ τιμὴ αὕτη δίδει $F(0,0) = 0$. Ὅθεν τὸ σημεῖον $M(0,0)$ εἶναι ἀνώμαλον σημεῖον τῆς καμπύλης.

Λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ τὰς δευτέρας παραγώγους τῆς $F(x, y)$.

Ἐχομεν $F_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2$, $F_{xy} = 8xy$, $F_{yy} = 12y^2 + 4x^2 + 2a^2$.

Εἶναι δέ $F_{xy} - F_{yx} \cdot F_{yy} \Big|_{(0,0)} = 0^2 - (-2a^2) \cdot (2a^2) = 4a^4 > 0$.

Ἄρα τὸ $M(0,0)$ εἶναι διπλὸ σημεῖον τῆς καμπύλης.

Αι Εξισώσεις τών έφαπτομένων εἰς αὐτό εἶναι :

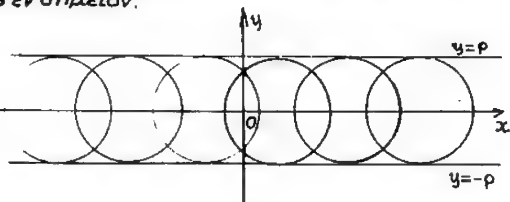
$$X^2(-2\alpha') + 2 \cdot X \cdot Y \cdot 0 + Y^2(2\alpha') = 0 \quad \eta \\ Y^2 - X^2 = 0.$$

§2. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΙΑ ΜΙΑΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ.

Ἄς θεωρήσωμεν τήν μονοπαραμετρίωτήν οἰογένειαν τών ἐπιπέδων γραμμών $F(x,y,C)=0$, $C_1 < C < C_2$.

Ὁρισμός VII-2-1. Μία γραμμή (γ) θά υαληται περιβάλλουσα τῆς οἰογένειας τών γραμμών $F(x,y,C)=0$, ἐάν υάθε σημεῖον τῆς (γ) εἶναι σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῆς μέ υάποια γραμμή τῆς οἰογένειας υαί υάθε γραμμή τῆς οἰογένειας ἐφάπτεται τῆς (γ) τουλάχιστον εἰς ἓν σημεῖον.

Παράδειγμα: Ἡ οἰογένεια τών υῦ-
υἰλων $(x-c)^2 + y^2 = \rho^2$, $-\infty < c < +\infty$ ἔχει ὡς
περιβάλλουσας τὰς εὐθείας $y = \pm \rho$ (βλ. Σx.1)



Ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης.

Ἐστω ἡ οἰογένεια τών υαμπύλων

$$F(x,y,C)=0 \quad (1), \text{ ὅπου } C \text{ παράμετρος.}$$

Σx.1

Ὑποθέτομεν ὅτι αὕτη ἡ οἰογένεια ἔχει μίαν περιβάλλουσα, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις τίθεται ὑπό τήν μορφήν $R(x,y)=0$. Ἐστω $M(x,y)$ ἓνα σημεῖον τῆς περιβαλλούσης. Τοῦτο τό σημεῖον δ' ἀνήκει ἐπίσης εἰς μίαν ὠρισμένην υαμπύλν τῆς οἰογένειας (1). Ὅθεν ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτήν τήν υαμπύλν μία ὠρισμένη τιμή τῆς παραμέτρου C . Ἐπομένως διὰ υάθε σημεῖον (x,y) τῆς περιβαλλούσης ἔχμεν υαί μίαν ὠρισμένην τιμήν τῆς C , συνεπῶς τό C δύναται νά θεωρηθῇ ὡς συνάρτησις τών (x,y) , ἥτοι: $C = C(x,y)$. Ἄρα διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς περιβαλλούσης θά ἔχωμεν:

$$F(x,y,C(x,y)) = 0 \quad (2)$$

Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $C(x,y)$ εἶναι παραωρίσιμος εἰς ἓνα ὠρισμένον διάστημα υαί διάφορος σταθερᾶς εἰς αὐτό.

Ἄς ὑποδορίσωμεν τόν συνευθεστὴν υατευδύγσει τῆς ἐφαπτομένης τῆς περιβαλλούσης τῆς δόδομένης ὑπό τῆς (2) εἰς τό σημεῖον $M(x,y)$ αὐτῆς. Διὰ τοῦτο

άρχει νά εὑρωμεν τό y' αὐτῆς. Πρὸς τούτοις παραγωγίζομεν τὴν (2) ὡς πρὸς x καὶ λαμβάνομεν:

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'_c \{c'_x + c'_y \cdot y'\} = 0 \quad (3)$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἥδη τὴν ἀντίστοιχον καμπύλην τῆς οἰομενείας (1), ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $M(x, y)$. Ταύτης ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης της εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y)$ θά παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0 \quad (4)$$

Ἐδῶ τὸ c εἶναι σταθερόν.

Ἐπειδὴ ἡ περιβάλλουσα καὶ ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y)$ θά ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην καὶ ὡς ἐκ τούτου τὰ y' τὰ διδόμενα ὑπὸ τῶν τύπων (3) καὶ (4) θά πρέπει νά εἶναι ἴσα. Ἰνα συμβαίη αὐτό θά πρέπει νά ἔχωμεν:

$$F'_c \{c'_x + c'_y \cdot y'\} = 0 \quad (5)$$

Ἐπειδὴ διὰ τὴν περιβάλλουσαν $c \neq$ σταθερᾶς θά εἶναι καὶ $c'_x + c'_y \cdot y' \neq 0$.

Τὰ σημεῖα $M(x, y)$ τῆς περιβαλλούσης ὀφείλουν νά ἐπαληθεύουν καὶ τὴν ἐξίσωσιν:

$$F'_c = 0 \quad (6)$$

Ὅθεν, τὰ $M(x, y)$ τῆς περιβαλλούσης ὀφείλουν νά ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, c) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ἐάν $R(x, y) = 0$ (8) εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς c μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (7), τότε τὰ σημεῖα τῆς περιβαλλούσης θά ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (8).

Ἦτοι αἱ σχέσεις (7) ἀποτελοῦν μίαν ἀναρριαίαν συνθήκην ὑπάρξεως περιβαλλούσης.

• Ἐστω ἡ οἰομενεία τῶν καμπύλων $F(x, y, c) = 0$. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον

των σημείων, αν υπάρχουν, τα οποία επαληθεύουν συγχρόνως τās τρεις εξισώσεις:

$$F(x,y,c)=0, \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial x}=0, \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial y}=0 \quad (9)$$

Τα άνωτέρω σημεία καλούνται **άνωμάλα ή ιδιάζοντα σημεία της οίσογενείας** $F(x,y,c)=0$ και είναι τό σύνολον των άνωμάλων σημείων πάντων των καμπύλων της οίσογενείας $F(x,y,c)=0$. Είς αυτά τα σημεία δέν δυνάμεθα νά όρίσωμεν τήν έφαπτομένην της καμπύλης της οίσογενείας, διότι τό $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$ δέν όρίζεται καίώς έυ τούτου δι' αυτά τα σημεία δέν δυνάμεθα νά όμιλήσωμεν περί έπαφής των καμπύλων.

Έρχασόμενοι κατά άμυβώς ανάλογον τρόπον όπως διά τήν περιβάλλουσαν εύρίσκομεν ότι, ό γ.τ. των ιδιάζόντων σημείων της (1) δά επαληθεύη εξίσωσιν της μορφής (2) συνεπώς καί εξίσωσιν της μορφής (3). Όθεν λόγω των (9) δά επαληθεύη τήν εξίσωσιν $F'_c=0$. Ήτοι ό γ.τ. των ιδιάζόντων σημείων δά επαληθεύη τās εξισώσεις (7), συνεπώς καί τήν $R(x,y)=0$.

Όθεν, ή εξίσωσις $R(x,y)=0$ πού προκύπτει έυ της απαλοιφής τού c μεταξύ των εξισώσεων (7) όρίζει, είτε τήν περιβάλλουσαν της οίσογενείας (1), είτε τόν γ.τ. των ιδιάζόντων σημείων της οίσογενείας (1), είτε έναν συνδυασμόν των δύο άνωτέρω.

• Ήδη γεννάται τό έρώτημα νά εύρωμεν τās έιανάς συνθήκας, αί όποίαι πρέπει νά πληρούνται, ίνα έχωμεν περιβάλλουσαν. Έστωσαν $x=x(c)$, $y=y(c)$ αί παραμετρίαι εξισώσεις της καμπύλης, ήτις δίδεται υπό των εξισώσεων (7).

Προφανώς δά έχωμεν τās ταυτότητας:

$$F(x(c), y(c), c)=0, F'_c(x(c), y(c), c)=0 \quad (10)$$

Ή δεύτερά των (10) γράφεται:

$$F'_x \frac{dx}{dc} + F'_y \frac{dy}{dc} + F'_c = 0 \quad \eta$$

$$F'_x \frac{dx}{dc} + F'_y \frac{dy}{dc} = 0 \quad (11)$$

Ή (11) πληρούται άπό πάντα τα σημεία της καμπύλης $x=x(c)$, $y=y(c)$.

$$\text{Έάν } F'^2_x + F'^2_y \neq 0 \text{ καί } \left(\frac{dx}{dc}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dc}\right)^2 \neq 0 \quad (12)$$

είς ένα σημείον $M(x,y)$, τότε ή περιβάλλούσα καί ή αντίστοιχος καμπύλη

Έχουν εἰς αὐτό τό σημεῖον τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, ἥτις ὀρίζεται πλήρως. Ὅθεν, ἡ περιβάλλουσα καὶ ἡ ἀντίστοιχος καμπύλη τῆς οἰομενείας, ἥτις διέρχεται δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου, ἐφάπτονται ἀλλήλων.

Ἄρα, αἱ συνδῆσαι (7) καὶ (12) εἶναι ἱκαναὶ διὰ τὴν ὑπαρξιν περιβαλλούσης.

Παραδείγματα 1^α Νά εὐρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν εὐθειῶν:
 $x \sigma \nu \alpha + \psi \eta \mu \alpha - \rho = 0$ (1), ὅπου α παράμετρος.

Λύσις: Παραγωρίζοντες τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς α λαμβάνομεν:

$$-x \eta \mu \alpha + \psi \sigma \nu \alpha = 0 \quad (2)$$

Διὰ τὴν ἀπαδείψωμεν τὴν παράμετρον α πολλαπλασιάζομεν τὴν (1) ἐπὶ $\eta \mu \alpha$ καὶ τὴν (2) ἐπὶ $\sigma \nu \alpha$, καὶ προσδέτομεν, ὅτε λαμβάνομεν:

$$x = \rho \sigma \nu \alpha \quad (3)$$

Δι' ἀντιμταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν:

$$y = \rho \eta \mu \alpha \quad (4)$$

Δι' ὑψώσεως τῶν (3) καὶ (4) εἰς τὸ τετράγωνον εὐρίσκομεν: $x^2 + y^2 = \rho^2$ (5). Ἡ (5) εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης, ἥτις εἶναι περιφέρεια κυκλίου (βλ. Σχ. 1).

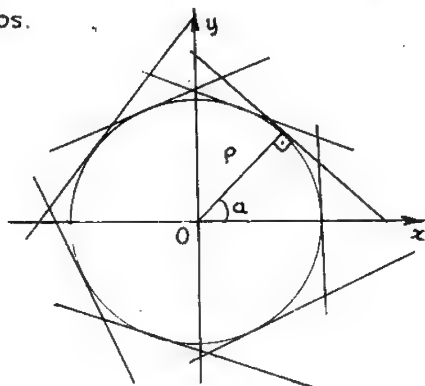
2^α. Νά εὐρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν κυκλίων.

$$(x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad c \text{ παράμετρος}$$

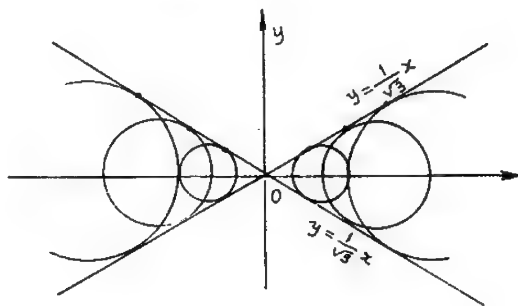
Λύσις: Διαφορίζοντες ὡς πρὸς c τὴν δοθεῖσαν λαμβάνομεν: $2x - 3c = 0$.

Διὰ ἀντιμταστάσεως τῆς τιμῆς $c = \frac{2x}{3}$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς οἰομενείας ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης: $y^2 = \frac{x^2}{3}$, ἥτις εἶναι αἱ εὐθεῖαι: $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x$. (Σχ. 2).

(Ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων ἐξαιρεῖται)
 ὑποδοῦναι ἐμει δὲν ἔχομεν ἐπαφὴν.



Σχ. 1



Σχ. 2

39/ Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες ox, oy ἀπομύπτουν ἓνα μῆκος ἴσον πρὸς τὴν μονάδα.

Λύσις: Ἐάν $a=c$ εἶναι ἡ γωνία ἡ δεικνυομένη ἐν τῷ Σχ. 1, τότε αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι δίδονται ὑπὸ

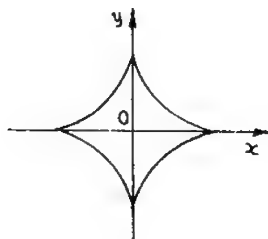
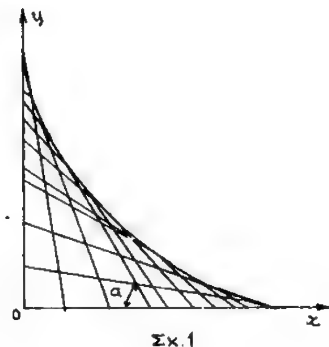
τῆς ἐξίσωσης: $\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^3 a} + \frac{y}{\eta\mu^3 a} = 1$ (1) (διὰ τί;)

Διὰ παραγωγίσεως τῆς (1) ὡς πρὸς a λαμβάνομεν:

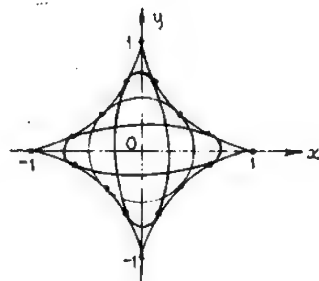
$$-\frac{\eta\mu a}{\sigma\upsilon\nu^3 a} x - \frac{\sigma\upsilon\nu a}{\eta\mu^3 a} y = 0 \quad (2)$$

Ἐν τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιβάλλουσας ὑπὸ παραμετρικὴν μορφήν, ἥτις ἐστὶν $x = \sigma\upsilon\nu^3 a$, $y = \eta\mu^3 a$. Ἐν τῶν τελευταίων ἐξισώ-

σεων λαμβάνομεν: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Αὕτη ἡ καμπύλη ὡς γνωστόν, καλεῖται ὀστεροειδὴς (ἢ Σχ. 2) καὶ εἶναι ἐπίσης ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενεῖας τῶν ἐλλείψεων: $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} = 1$ (ἢ Σχ. 3).



Σχ. 2



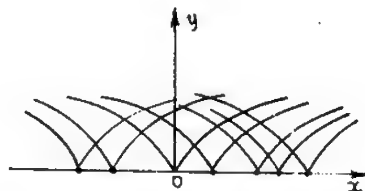
Σχ. 3

39/ Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενεῖας τῶν ἡμι-κυβικῶν παραβολῶν $y^3 - (x-c)^2 = 0$.

Λύσις: Παραγωγίζοντες πρὸς c τὴν προείσαν λαμβάνομεν: $2(x-c)=0$ ἢ $x=c$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν c μεταξὺ τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὐρίσκομεν:

$$y = 0$$

Ὁ ἄξων τῶν x εἶναι ὁ γ.τ. τῶν μή ὁμαλῶν σημείων τῆς ὁδοῦσης οἰομενεῖας.



γ.τ. τῶν μή ὁμαλῶν σημείων
Σχ. 4.

Πράγματι, εάν θέσωμεν $F(x, y, c) = y^3 - (x-c)^2$ άρκει νά εύρωμεν διά ποία σημεία επαληθεύονται αί έξισώσεις:

$F(x, y, c) = 0, F'_x = 0, F'_y = 0$, ήτοι αί έξισώσεις $y^3 - (x-c)^2 = 0, -2(x-c) = 0, 3y^2 = 0$. Αί τρεῖς τελευταῖαι έξισώσεις δίδουν τήν καμπύλην υπό παραμετρικήν μορφήν $x=c, y=0$, δηλ. τόν άξονα τών x .

Άρα δέν ύπάρχει περιβάλλουσα τής δοθείσης οἰογενείας καί ό γ.τ. τών μή όμαλῶν σημείων είναι ό ίδιον τών x

53%. Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα καί ό γ.τ. τών μή όμαλῶν σημείων τής οἰογενείας $(y-c)^2 - \frac{2}{3}(x-c)^3 = 0$. (1)

Λύσις: Διά παραγωρίσεως ως πρὸς c τήν δοθεῖσαν λαμβάνομεν:

$$-2(y-c) + \frac{2}{3}3(x-c)^2 = 0 \quad \text{ή}$$

$$y-c - (x-c)^2 = 0 \quad (2)$$

Ήδη απαλείφωμεν τήν c μεταξύ τῶν (1) καί (2). Πρὸς τούτοις ἀντισυστῶντες εἰς τήν (1) $y-c = (x-c)^2$ λαμβάνομεν:

$$(x-c)^4 - \frac{2}{3}(x-c)^3 = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x-c)^3 \left[(x-c) - \frac{2}{3} \right] = 0 \quad (3)$$

Έυ τῆς (3) λαμβάνομεν τὰς λύσεις:

$$\overline{c} = x \quad \text{ή} \quad c = x - \frac{2}{3} \quad (4)$$

Δι' ἀντισυστάσεως εἰς τήν (2) τῆς πρώτης τῶν (4) εύρίσκομεν:

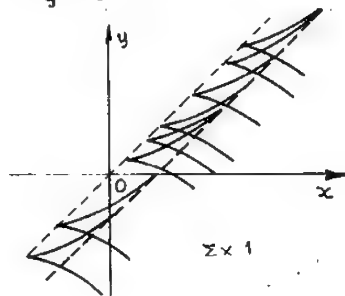
$$y - x - (x-x)^2 = 0, \text{ ἔξ ἧς } y = x \quad (5)$$

Δι' ἀντισυστάσεως τῆς δευτέρας τῶν (4) εἰς τήν (2) λαμβάνομεν:

$$y - x + \frac{2}{3} - (x - x + \frac{2}{3})^2 = 0, \text{ ἔξ ἧς } y = x - \frac{2}{9} \quad (6)$$

Οὕτω ἐπιτύχαμεν δύο εὐθείας $y = x, y = x - \frac{2}{9}$.

Ἡ πρώτη εὐθεῖα ό γ.τ. τῶν μή όμαλῶν σημείων καί ἡ δευτέρα ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰογενείας (βλ. Σχ. 1)



§3. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑ ΜΙΑΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

I. Περιβάλλουσα μονοπαραμετρίτης οίμογενειας επιφανειών:

Ύψθεωρήσωμεν μίαν μονοπαραμετρίτην οίμογενειαν επιφανειῶν $F(x,y,z,c)=0$ (1) ὅπου c παράμετρος μεταβαλλομένη εἰς τὸ διάστημα $C_1 < c < C_2$.

Ὁρισμός VI-3-1. Θά λέγωμεν ὅτι μία ἐπιφάνεια E εἶναι περιβάλλουσα τῆς οίμογενείας (1), ἐὰν αὕτη ἐφάπτεται ἐνιάσσης ἐπιφανείας τῆς οίμογενείας (1) κατὰ μῆκος μιᾶς ὁδοῦτήρου καμπύλης καὶ ἐὰν ἐπὶ πλεόν αὐταὶ αἱ καμπύλαι τῆς ἐπαφῆς σχηματίζουσιν μίαν μονοπαραμετρίτην οίμογενειαν καμπύλων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας E , αἱ ὁποῖαι καλύπτουν πῆλῶς τὴν E .

Παράδειγμα: Θεωροῦμεν τὴν οίμογενειαν τῶν σφαιρῶν $x^2+y^2+(z-c)^2=1$, αἱ ὁποῖαι ἔχουν αὐτὴν ἴση πρὸς τὴν μονάδα καὶ τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κείνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oz . Ἡ περιβάλλουσα τούτων εἶναι ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ἐξίσωσιν $x^2+y^2=1$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι: τὰ σημεία τῆς ἐπιφανείας, ἥτις εἶναι περιβάλλουσα τῆς οίμογενείας (1), ἐπαρτῶνται τὰς κατωθὶ ἐξισώσεις:

$$F(x,y,z,c)=0, \quad \frac{\partial F(x,y,z,c)}{\partial c} = 0 \quad (2)$$

→ βλ. ἀπόδειξιν. «Πρόχειρες Σημ. Ἀνωτ. Μαθ.» Τόμος II Η. Κριτιμιού σελ. 310 § 474.

Ἦστω $R(x,y,z)=0$ (3) παριστᾷ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς c μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2). Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἡ (3) θὰ παριστᾷ εἴτε τὴν περιβάλλουσαν τῆς οίμογενείας (1), εἴτε τὸν γ. τ. τῶν ἀνωμαλῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οίμογενείας (1) ὁπλ. τῶν σημείων τῶν ἐπιφανειῶν διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν $F=0$ καὶ $F_x=F_y=F_z=0$, εἴτε ἕναν συνδυασμὸν τῶν δύο ἀνωτέρω.

Διὰ $c=c_0$, αἱ ἐξισώσεις $F(x,y,z,c_0)=0, \frac{\partial F(x,y,z,c_0)}{\partial c} = 0$ (4) θὰ παριστοῦν μίαν καμπύλην (γ_0) κειμένην ἐπὶ τῆς περιβαλλούσης E , κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας θὰ ἐφάπτεται ἡ ἐπιφάνεια $F(x,y,z,c_0)=0$ τῆς οίμογενείας (1). Ἡ γραμμὴ (γ_0) καλεῖται χαρακτηριστικὴ γραμμὴ τῆς οίμογενείας διὰ τὴν τιμὴν $c=c_0$.

Ἡ περιβάλλουσα μιᾶς οίμογενείας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ γ. τ. τῶν χαρακτηριστικῶν γραμμῶν ὅταν ἡ παράμετρος c μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $C_1 < c < C_2$.

Εάν θεωρήσουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων :

$$F(x, y, z, c) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, c)}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y, z, c)}{\partial c^2} = 0 \quad (5)$$

διὰ $c_1 < c < c_2$, τούτο όρίζει μίαν γραμμήν υειμένη επί τής περιβαλλούσης, και ή όποία υαδείται γραμμή αναιάμψεως τής περιβαλλούσης, όότι υατά μήκος αὐτῆς ή περιβάλλουσα αναδιπλούται.

Προφανώς αὐ (5) όρίζουν μίαν γραμμήν υειμένην επί τής περιβαλλούσης.

• Ὡς θέσωμεν: $F(x, y, z, c) = F(c)$.

Ἦδη θεωροῦμεν δύο χείτονιὰς χαραυτηριστιυάς :

$$F(c_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c} F(c_0) = 0 \quad (6)$$

$$\text{και} \quad F(c_0 + \Delta c) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c} F(c_0 + \Delta c) = 0 \quad (7)$$

Ἀναπτύσσοντες τὰ πρῶτα μέλη τής χαραυτηριστιυῆς (7) υατά Taylor (βλ. σελ. 409, Τόμος Α') μέ $h = \Delta c$ λαμβάνομεν :

$$F(c_0) + \frac{\Delta c}{1!} \cdot \frac{\partial F(c_0)}{\partial c} + \frac{\Delta c^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 F(c_0)}{\partial c^2} + \dots = 0, \quad \frac{\partial F(c_0)}{\partial c} + \frac{\Delta c}{1!} \cdot \frac{\partial^2 F(c_0)}{\partial c^2} + \dots = 0 \quad (7')$$

Αὐ χαραυτηριστιυαὶ (6) και (7) διὰ $\Delta c \rightarrow 0$ ἔχουν υοινὰ τὰ σημεῖα τὰ πᾶν-
ροῦντα τὰς τρεῖς εξισώσεις :

$$F(c_0) = 0, \quad \frac{\partial F(c_0)}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(c_0)}{\partial c^2} = 0$$

Ὅθεν, ό γ.τ. τῶν ἄνωτέρω σημείων, υαδώς τό c μεταβάλλεται, εἶναι ή γραμμή αναιάμψεως.

Παράδειγμα 1* Νά εὑρεθῇ ή περιβάλλουσα τής οἰμορνεύιας τῶν ἐπιπέδων :

$$3c^2x - 3cy + z - c^3 = 0 \quad (1)$$

Λύσις : Ἡ παράγωγος τής δοθείσης εξισώσεως ως πρός c εἶναι :

$$6cx - 3y - 3c^2 = 0 \quad (2)$$

Ἀρμεῖ νά ἀπαδείψωμεν τήν c μεταξύ τῶν (1) και (2) ἢ μεταξύ τοῦ ἰσο-
δυνάμου συστήματος :

$$\left. \begin{aligned} 2cx - y - c^2 &= 0 \\ c^2x - 2cy + z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Τούτο μᾶς δίδει :

$$\left. \begin{aligned} -(y^2 - xz) &= c^2(y - x^2) \\ (y - x^2)c &= \frac{z - xy}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Τελικῶς ἐν τοῦ (4) λαμβάνομεν:

$$4(x^2-y)(y^2-xz)-(xy-z)^2=0 \quad (5)$$

δηλ. μία ἐπιφάνεια 4^{ης} βαθμοῦ.

Διὰ νά εὐρώμεν τὴν γραμμὴν ἀναυάμψεως τῆς περιβάλλουσας ἀρκεῖ νά ἀπαλείψωμεν τὸ c μεταξὺ τῶν ἑισώσεων (1), (2) καὶ τῆς παρανώρου τῆς (2) ὡς πρὸς c , δηλ. τῆς ἑισώσεως $x-c=0$ (6).

Τελικῶς εὐρίσκομεν: $x=c, y=c^2, z=c^3$.

22/. Νά εὐρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰμογενείας τῶν ἐπιφανειῶν:

$$x^2+y^2=4c(z-c) \quad (1)$$

Λύσις: Ἡ (1) παρακωριζομένη ὡς πρὸς c δίδει:

$$-4z+8c=0 \quad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῆς c μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$x^2+y^2=z^2 \quad (3)$$

Ἡ (3) παριστᾷ μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐν περιστροφῇ¹⁾ μέ ἄξονα τὸν Oz καὶ τῆς ὁποίας ἡ γενέτειρα σχηματίζει μέ τὸν ἄξονα Oz γωνίαν 45°.

II. Περιβάλλουσα διπαραμετριῆς οἰμογενείας ἐπιφανειῶν.

Θεωροῦμεν τὴν ἑξίσωσιν:

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad (1)$$

ἡ ὁποία παριστᾷ ἐπιφανείας S ἐξαρτωμένας ἀπὸ δύο παραμέτρους C_1 καὶ C_2 . Δὲν ὑπάρχει γενικῶς ἐπιφάνεια ἐφαπτομένη πασῶν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῆς τῆς οἰμογενείας κατὰ μῆκος μίας καμπύλης γραμμῆς. Θὰ ἀναζητήσωμεν ἐὰν ὑπαρξῇ μία ἐπιφάνεια E ἐφαπτομένη ἐκαστῆς τῶν ἐπιφανειῶν τῆς οἰμογενείας (1) εἰς ἓνα σημεῖον καὶ ὅχι κατὰ μῆκος μίας καμπύλης.

Ἐξ ὁρισμοῦ, θα λέγωμεν ὅτι μία ἐπιφάνεια E εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς διπαραμετριῆς οἰμογενείας τῶν ἐπιφανειῶν (1) ἐὰν εἰς ὑάδε σημεῖον P τῆς E ἡ ἐπιφάνεια E ἐφάπτεται μιᾶς ἐπιφανείας τῆς οἰμογενείας (1) εἰς τρόπον ὥστε,

1) Μία κωνικὴ ἐπιφάνεια μέ ἀρχὴν τὸ $O(0,0,0)$ δύναται νά παρασταθῇ μέ τὴν ἑξίσωσιν $F(x, y, z) = 0$, ὅπου ἡ F ὁμογενὴς συνάρτησις ὡς πρὸς x, y, z .

υαδώς τό P υινείται ἐπί τῆς E αἱ παραμετρυαί τιμαί C_1, C_2 ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὴν ἐπιφάνεια ἐφαπτομένην τῆς E εἰς τό P υινσῦνται εἰς ἓνα χωρίον τοῦ C_1, C_2 ἐπιπέδου υαί ἐπὶ πλεόν εἰς διάφορα σημεῖα (C_1, C_2) ἀντιστοιχοῦν διάφορα σημεῖα P τῆς E .

Μία ἐπιφάνεια τότε τῆς οἰογενείας ἐφάπτεται τῆς περιβαλλούσης εἰς ἓνα σημεῖον υαί ὄχι υατὰ μήκος μιᾶς ὁλοκληρήρου υαμπύλης.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐπιφανείας τῆς οἰογενείας μετὰ τῆς περιβαλλούσης πρέπει νά ἱυανοποιεῖ τὰς ἔξισώσεις.

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = 0; \quad F'_{C_1}(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad F'_{C_2}(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad (2)$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παραμέτρων C_1 υαί C_2 μετὰξὺ τῶν ἔξισώσεων (2) ἔχομεν εἴτε τὴν ἐξίσωσιν τῆς περιβαλλούσης ἢ ὁποῖα ἐν γένει εἶναι μία ἐπιφάνεια εἴτε τὸν π.τ. τῶν ἰδιαζόντων σημείων τῆς οἰογενείας δηλ. τῶν σημείων διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν: $F=0, F_x=F_y=F_z=0$.

Ἀπὸ τὰς ἔξισώσεις (2) δυνάμεθα γενικῶς νά εὑρωμεν τό σημεῖον ἐπαφῆς ἐκείνης τῆς ἐπιφανείας χωριστὰ δίδοντες τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς εἰς τὰς παραμέτρους C_1, C_2 .

Παράδειγμα. Ἡ οἰογένεια τῶν σφαιρῶν μέ μοναδιαία αὐτῖνα υαί τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ xy -ἐπιπέδου δίδεται ὑπὸ τῆς ἔξισώσεως:

$$F(x, y, z, C_1, C_2) = (x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Διὰ νά εὑρωμεν τὴν περιβάλλουσα ἀρυεῖ νά ἀπαλείψωμεν τὰ C_1, C_2 μετὰξὺ τῆς ἔξισώσεως (1) υαί τῶν ἔξισώσεων $\frac{\partial F}{\partial C_1} = -2(x-C_1) = 0$ υαί $\frac{\partial F}{\partial C_2} = -2(y-C_2) = 0$.

Ἡ ἀπαλοιφή δίδει $z^2 = 1$ ἢ $z = \pm 1$ ἥτοι ἡ περιβάλλουσα εἶναι δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τό ἐπίπεδον oxy .

Συμπληρώματα υαί ἀσκήσεις:

1. Νά διερευνηθοῦν τὰ ἀνώμαλα σημεῖα τῶν κατωθι ἡυαμπύλων υαί νά εὑρεθοῦν αἱ ἔξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων εἰς αὐτά:

α) $F(x, y) = ax^3 + by^3 - xy = 0$, β) $F(x, y) = (1 + e^{1/y})y - x = 0$

γ) $F(x, y) = (y^2 - 2x^2)^2 - x^5 = 0$, δ) $F(x, y) = y^2(2a - x) - x^3 = 0$

ε) $F(x, y) = (y - 2x)^2 - x^5 = 0$, στ) $F(x, y) = (x^2 + y^2)(x - 2a) + a^2x = 0$

η) $F(x, y) = x^2 + y^2 - y(3x^2 - y^2) = 0$, θ) $F(x, y) = x^4 + y^4 + y^3 - xy^3 - xy^2 = 0$.

2. Ὄρθῃς γωνίας ἡ κορυφή κινεῖται ἐπὶ τοῦ oy καὶ ἡ μία πλευρὰ διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου $E(a,0)$ τοῦ ox . Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς ἄλλης πλευρᾶς.

3. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν ευθειῶν: $x\sigma\upsilon\nu\alpha + y\eta\mu\alpha - f(\alpha) = 0$, ὅπου $f(\alpha)$ δοθεῖσα συνάρτησις τῆς γωνίας α .

Ἐφαρμογή: $f(\alpha) = \epsilon\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$.

4. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν κύκλων μέ μοναδιαία ἀκτίνα διερχομένων διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφέρειας $x^2 + y^2 = 1$.

5. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν παραβολῶν: i) $(x-c)^2 - 2y = 0$,
ii) $y^2 - 2(c+1)x + c^2 = 0$.

6. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν καμπύλων: $(x-c)^3 - y^2 = 0$.

7. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν ἐλλείψεων:

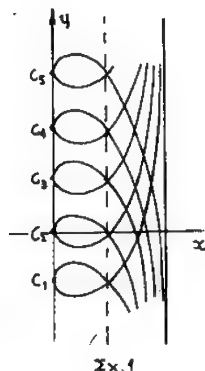
$$F(x, y, a, b) = x^2 b^2 + y^2 a^2 - a^2 b^2 = 0$$

i) Ὄταν $παβ = C$, ii) Ὄταν $a + b = C$

8. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν στροφοειδῶν:

$$[x^2 + (y-c)^2](x-2) + x = 0 \quad (\text{βλ. Σχ.1})$$

(Ἀπάντ. Ἡ ευθεῖα $x=0$ δηλ. ὁ ἄξων τῶν y εἶναι ἡ μόνη περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας. Ἐνῶ ἡ $x=1$ διέρχεται διὰ τῶν διπλῶν σημείων τῆς οἰοσ. τῶν καμπύλων).



9. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν παραβολῶν $y = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \sigma\upsilon\nu^2 t} + x\epsilon\phi t$. (t : παράμετρος, V_0, g σταθεραί)
(Ἀπάντ: $y = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2} + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g}$: παραβολή ἀσφαλείας).

10. Ἐστω $y = f(x)$ μία ἐπίπεδος γραμμὴ καὶ τὸ σημεῖον M ἐπ' αὐτῆς. Ἐστωσαν MP καὶ MR αἱ προβολαὶ τοῦ M ἐπὶ τῶν ἀξόνων ox, oy ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς ευθείας PR (παράμετρος νὰ ληθῇ τὸ x τοῦ σημείου M).

11. Νά ὁρισθῇ ἡ συνάρτησις $P(\theta)$ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα $x \cos \theta + y \sin \theta = P(\theta)$ νὰ ἐφαπτεται πάντοτε τῆς καμπύλης (γ) τῆς ἐξουήσης ἐξισώσεως: $x = t^2, y = t^3$.

(Ἀπάντ. $P(\theta) = 4 \sin^3 \theta / 27 \cos \theta$).

12. Ἐστώσαν $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης (γ) . Καλοῦμεν *ἐνείληρμένην* τῆς (γ) μίαν καμπύλην (γ^*) , ἥτις εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν καθέτων τῆς (γ) . Ἡ δὲ καμπύλη (γ) καλεῖται *ἐξείληρμένη* τῆς (γ^*) . Ὡς γνωστόν αἱ καθετοὶ τῆς (γ) δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\{x - \varphi(t)\} \cdot \varphi'(t) + \{y - \psi(t)\} \cdot \psi'(t) = 0$ (1) t : παράμετρος.

Παραγινώσκοντες τὴν (1) ὡς πρὸς t λαμβάνομεν:

$$\{x - \varphi(t)\} \varphi''(t) + \{y - \psi(t)\} \psi''(t) - \varphi'(t)^2 - \psi'(t)^2 - \psi = 0. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἐπιτυγχάνομεν τὰς κατωθι παραμετρίαις ἐξισώσεις τῆς περιβαλλούσης:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) - \psi'(t) \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'} = \varphi - \frac{\psi' \rho}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \\ y &= \psi(t) + \varphi'(t) \frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'} = \psi + \frac{\varphi' \rho}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ὅπου $\rho = \frac{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}$ δηλ. ἡ αὐτὴ καμπυλότητα τῆς καμπύλης. Αἱ (3) εἶναι αἱ ὑπὸ παραμετρίαν μορφήν ἐξισώσεις τῆς ἐνείληρμένης τῆς $x = \varphi(t), y = \psi(t)$.

Συσχετίζοντες τοὺς τύπους (3) μετὰ τῶν τύπων πού δίδουν τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου καμπυλότητας μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης (βλ. Τόμος I, σελ. 587) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐνείληρμένη τῆς (γ) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁ γ.τ. τῶν κέντρων καμπυλότητας ταύτης.

13. Νά εὐρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιφανειῶν:

i) $y^2 - z^2 - 2c(x - c) = 0$. ii) $x \sin t + y \cos t + z = t, t$: παράμετρος.

14. Νά εὐρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰμογενείας τῶν ἐπιπέδων $x \cos \alpha + y \sin \alpha + z = 0$ καθὼς καὶ ἡ γραμμὴ ἀνακύμψεως τῆς περιβαλλούσης.

- (15). Δείξατε ὅτι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι ἡ ἴδια ἡ ἐπιφάνεια.

16. Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι σταθερόν.

17. Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν ἐλλειψοειδῶν ἐν περιστροφῇ $\theta x^2 + a^2(y^2 + z^2) = a^2 \theta^2$, ὅταν αἱ παράμετροι a καὶ θ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως: $a^2 + \theta^2 = k^2$.

18. Ἐστω ἡ οἰομενεία τῶν σφαιρῶν:

$$(x - a \sin \varphi)^2 + (y - a \eta \mu \varphi)^2 + z^2 - R^2 = 0$$

ἡ ὁποία ὀρίζεται ὡς τὸ σύνολον τῶν σφαιρῶν σταθερᾶς αὐτίνος R τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εὐρίσκονται ἐπὶ τῆς περιφερείας $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$. Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἀνωτέρω σφαιρῶν (φ : παράμετρος) καθὼς καὶ ἡ γραμμὴ ἀναυάμψεως ταύτης.

(Ἀπάντ. Ἡ περιβάλλουσα εἶναι $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$, ἥτις εἶναι μία σπειροειδὴς ἐπιφάνεια. Ἡ γραμμὴ ἀναυάμψεως εἶναι $z^2 + a^2 - R^2 = 0$, ὥστ. ἡ γραμμὴ ἀναυάμψεως ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σημεία πραγματικὰ ἢ φανταστικὰ, καὶ ὅσον τὸ $|a| < R$ ἢ $|a| > R$).

19. Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰομενείας τῶν ἐπιφανειῶν $F(x, y, z, c_1, c_2) = 0$, ὅπου c_1, c_2 συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως: $\varphi(c_1, c_2) = 0$.

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα οἰομενεία δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μονοπαραμετρικὴ μετὰ παράμετρον τὴν c_1 , θεωροῦντες τὴν c_2 ὡς πεπληρωμένην συνάρτησιν τῆς c_1 , ὀρισμένην ὑπὸ τῆς ἐξίσωσews $\varphi(c_1, c_2) = 0$. Ὅθεν ἡ περιβάλλουσα θὰ ὀρίσεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $F = 0$ (1) καὶ ἀπὸ τὴν $F_{c_1} + \frac{d c_2}{d c_1} \cdot F_{c_2} = 0$ (2), ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς (1) διὰ παραγωγίσεως ὡς πρὸς c_1 .

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ $\varphi(c_1, c_2) = 0$ θὰ ἔχωμεν διὰ παραγωγίσεως ὡς πρὸς c_1 : $\varphi_{c_1} + \frac{d c_2}{d c_1} \cdot \varphi_{c_2} = 0$ (3). Ἀπαλειφόντες μεταξὺ τῶν (2) καὶ (3) τὸ $\frac{d c_2}{d c_1}$ λαμβάνομεν: $F_{c_1} \varphi_{c_2} - F_{c_2} \varphi_{c_1} = 0$ (4). Ἡ περιβάλλουσα λοιπὸν ὀρίζεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:

$$F = 0, \varphi = 0, F_{c_1} \varphi_{c_2} - F_{c_2} \varphi_{c_1} = 0.$$

20. Νά εύρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα ὑπὸ τὸν τοῦς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἐλάχιστον σχηματιζόμενον τετράεδρον νὰ ἔχῃ σταθερὸν ὄγκον V .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

§ 0. ΠΡΟΚΑΤΑΡΤΙΚΑΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑΙ ΓΝΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ \mathbb{R}^2

Προκειμένου νά ὀρίσωμεν τό διπλό ὀλουλήρωμα εἶναι ἀπαραίτητον νά δώσωμεν ἐν συντομίᾳ μεριστοῦς τοπολογικοῦς ὀρισμοῦς ἀναφερομένους εἰς τό ἐπίπεδον oxy , δηλ. εἰς τόν χώρον \mathbb{R}^2 . Τινάς ἐξ αὐτῶν τοῦς ἔχομεν ἀναφέρει εἰς τό κεφάλαιον I §§ 2,4.

Θεωροῦμεν τό ἐπίπεδον oxy καί δύο σημεῖα αὐτοῦ, ἔστω $\alpha = (x_1, y_1)$ καί $\beta = (x_2, y_2)$. Ὡς γνωστόν, ἡ ἀπόστασις d τῶν α καί β δίδονται ὑπό τοῦ τύπου:

$$d(\alpha, \beta) = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}.$$

Τό σύνολον $E = \{(x, y) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < \epsilon^2\}$ καλεῖται ἕνας ἀνοιutos κύκλος κέντρου (α, β) καί αὐτίνος ϵ . Ὁ ἀνωτέρα κύκλος λαμβάνεται καί ὡς μία ϵ -περιοχή ἢ ἀπλῶς περιοχή τοῦ σημείου (α, β) .

Ἐνα σημεῖον α ἐνός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^2$ ἀκαλεῖται ἐσωτερικόν σημεῖον τοῦ A , ἐάν ὑπάρχη μία ϵ -περιοχή τοῦ α κειμένη ἐντός τοῦ A .

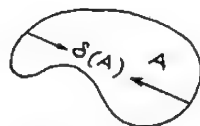
Συμφάνως πρὸς τόν ὀρισμόν τοῦ ἀνοιutoῦ συνόλου τό ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τό κεφάλαιον I, § 4, σελ. 19 εὐνόλως διαπιστοῦται ὅτι, ἵνα ἕνα σύνολον A εἶναι ἀνοιuton πρέπει καί ἀρμεῖ κλειμένη ὡς ἐσωτερικά τοῦ σημεία.

Ἐνα σημεῖον α καλεῖται σνοριακόν τοῦ συνόλου A , ἐάν καθε περιοχή αὐτοῦ περιέχη σημεῖα ἀνήκοντα καί μὴ ἀνήκοντα εἰς τό A . Τό σύνολον τῶν σνοριακῶν σημείων ἐνός συνόλου A καλεῖται σύνορον τοῦ A .

Συμφάνως πρὸς τόν ὀρισμόν τοῦ κλειστοῦ συνόλου, τόν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τό κεφάλαιον I § 4 δά πρέπει καθε κλειστόν σύνολον νά περιέχη τό σύνορόν του.

Ἐστω τό σύνολον A καί $x, y \in A$. Διάμετρος δ τοῦ συνόλου A καλεῖται ὁ ἀριθμός ὁ ὀριζόμενος ὑπό τοῦ τύπου:

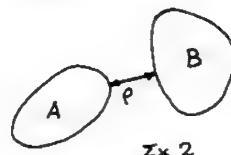
$$\delta(A) = \sup_{(x, y) \in A \times A} d(x, y), \quad (\text{βλ. Σχ. 1})$$



Σχ. 1

Εάν A και B είναι δύο τυχόντα σύνολα του επιπέδου, απόσταση ρ τούτων, ορίζεται ο αριθμός ο οποίος ορίζεται από τον τύπο:

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y), \text{ (βλ. Σχ. 2).}$$



Σχ. 2

Εάν τα A και B έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, τότε $\rho(A, B) = 0$.

Ένα σύνολο ονομάζεται φραγμένο εάν αυτό είναι δυνατό να περιληφθεί εντός ενός πεπερασμένου μήκους.

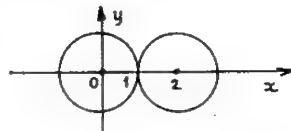
Όπως γνωστόν, ένα σημείο a θα ονομάζεται όριο του συνόλου A , εάν υπάρχει μια ακολουθία $\{x_n\}$ των σημείων του A τέτοια ώστε $d(x_n, a) \rightarrow 0, n \uparrow \infty$.

Θεώρημα VII - 0-1 (Διαχωρισμότητας). Εάν A και B είναι δύο κλειστά και φραγμένα σύνολα με μη κοινά σημεία, τότε $\rho(A, B) > 0$.

Ο ορισμός του συνεκτικού συνόλου που εδώσαμεν εις το κεφάλαιο I. § 5 δύναται να διατυπωθῇ διὰ τὰ υποσύνολα του \mathbb{R}^2 κατὰ έναντιό εὐχρηστον τρόπον ὡς ἀκολουθῶς:

Ένα σύνολο $G \subset \mathbb{R}^2$ θα λέγεται συνεκτικόν, εάν καὶ δε Σειρὰ σημείων του δύναται νὰ ἐνωθῇ διὰ μιᾶς ποσυχωνικῆς γραμμῆς κλειμένης ἐξ ὁλοκληρου ἐντός του G . Έν ἀνοιχτόν συνεκτικόν σύνολο θα καλεῖται πεδῖον. Π.χ. τὸ σύνολο $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ εἶναι ἓνα πεδῖον.

Τὸ σύνολο $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1 \text{ ἢ } (x-2)^2 + y^2 < 1\}$ βλ. Σχ. 1 δὲν εἶναι πεδῖον, διότι εἶναι ἀνοιχτόν, ἀλλ' οὐκ συνεκτικόν.



Σχ. 1

Θεώρημα VII - 0-2 (Heine-Borel-Lebesgue). Έστω G ἓνα κλειστόν καὶ φραγμένο σύνολο του επιπέδου. Υποθέτομεν ὅτι εἰς καὶ δε σημείον P τοῦ G ἀντιστοιχεῖ ἓνας ἀνοιχτός κύκλος (P, R_p) . Καλοῦμεν αὐτὴν τὴν οἰσχευῖαν τῶν κύκλων \mathcal{F} . Τότε ὑπάρχει ἓνας πεπερασμένος ἀριθμὸς ἀνοιχτῶν κύκλων ἐκ τῆς οἰσχευῖας \mathcal{F} ἢ ὅποια καλύπτει τὸ σύνολο G , δηλ. καὶ δε σημείον τοῦ G ἀνήκει τουλάχιστον εἰς ἓνα ἐκ τῶν πεπερασμένου τῷ πλῆθος κύκλων.

Παρατηρήσεις i) Αντί της ομογενείας άνοιγμάτων υύυλων δυνάμεθα νά θεωρή-
αμεν μίαν ομογενείαν άνοιγμάτων τετραγώνων ή τριγώνων ή ιάδε τύπο περιοχής
τών σημείων του G.

ii) Το άνωτέρω θεώρημα είναι θεμελιώδες διά την Άνάλυσιν.

iii) Η υπόθεσις ότι τό G είναι υλειστόν και φραγμένον είναι ούσιώδης.

Ο όρισμός της όμαλής συνεχείας που έδώσαμεν εις τό κεφάλαιον II § 7.
διατυπώται εις την ειδικήν περίπτωσην του επιπέδου ως άπολούθως:

Όρισμός VII-0-1. Μία συνάρτησις $f(x,y)$ ώρισμένη και συνεχής εις ένα σύ-
νολον S λέγομεν ότι είναι όμαλώς συνεχής επί του S, εάν διά ιάδε $\epsilon > 0$
ύπάρχη $\delta(\epsilon) > 0$ τοιούτον ώστε $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \epsilon$, όταν $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} < \delta(\epsilon)$
διά ιάδε $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in S$.

Θεώρημα VII-0-3. Εάν ή πραγματική συνάρτησις $f(x,y)$ είναι συνεχής εις ένα
υλειστόν και φραγμένον σύνολον S, τότε ή $f(x,y)$ είναι και όμαλώς συνεχής επ' αυτού.
Η υπόθεσις ότι τό S είναι υλειστόν είναι ούσιώδης. π.χ. ή συνάρτησις $f(x,y) = \frac{1}{1-(x^2+y^2)}$
είναι συνεχής εις τό άνοιγτόν σύνολον $S = \{(x,y): x^2+y^2 < 1\}$, άλλ' ουχι όμαλώς συνε-
χής επ' αυτού, ιαδούτι αύτη δέν είναι φραγμένη.

§ 1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Τήν έννοιαν του έμβαδού ενός πολυγωνιου χωρίου την θεωρούμεν πρωστήν αν-
τήν στοιχειώδη γεωμετρίαν. ΈΕ άλλου αυτό τό έδέχθημεν και όταν έπρόκειτο
όρίσωμεν τό έμβαδόν ενός επιπέδου χωρίου (βλ. Τόμος I σελ. 509-511). Ηδη δά μελε-
τήσωμεν εις την παρούσαν § την έννοια του έμβαδού αναλυτικώτερον, προ-
κειμένου νά χρησιμοποιήσωμεν ταύτην διά τόν όρισμόν του διπλού ολοκληρωματος.
Έστω F ένα τυχόν επιπέδον σχήμα και άς θεωρήσωμεν πάντα τά πολυγωνία
σχήματα P τά όποια έγκλειόνται υπό του F και πάντα τά πολυγωνία σχήματα Q
τά όποια έγκλειούν τό F

Διά τά άνωτέρω σχήματα P και Q έχομεν: έμβαδόν P \leq έμβαδόν Q

Τὰ ἔμβαδά τῶν πολυγωνιῶν σχημάτων P προφανῶς φράσσονται ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς πολυγωνιοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ F καὶ τὰ ἔμβαδά τῶν πολυγωνιῶν σχημάτων Q φράσσονται ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς πολυγωνιοῦ σχήματος τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ F .

Ὅθεν, τὰ ἔμβαδά τῶν P ἔχουν ἕνα ἀνώτερον πέρασ καὶ τὰ ἔμβαδά τῶν Q ἔχουν ἕνα κατώτερον πέρασ. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοὺς κατωτέρω ἀριθμούς:

$$S_* = S_*(F) = \sup_{P \subset F} (\text{ἐμβ. } P) \quad (1)$$

$$S^* = S^*(F) = \inf_{Q \supset F} (\text{ἐμβ. } Q) \quad (2)$$

$$\text{Προφανῶς ἔχομεν: } S_* \leq S^* \quad (3)$$

Ἐὰν $S_* = S^* = S$, τότε αὐτὴν τὴν κοινὴν τιμὴν καλοῦμεν ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου F . Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν δὲ λέγωμεν ὅτι τὸ χωρίον F εἶναι τετραγωνίσιμον.

Πρότασις VII-1-1. Ἐνα ἐπίπεδον σχῆμα F εἶναι τετραγωνίσιμον, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν, διὰ καθεστὸς $\varepsilon > 0$ ὑπάρχουν δύο πολυγωνιὰ σχήματα $P \subset F$ καὶ $Q \supset F$ τοιαῦτα, ὥστε $\text{ἐμβ. } Q - \text{ἐμβ. } P < \varepsilon$ (1).

Ἀπόδειξις: Πράγματι, ἐὰν ὑπάρχουν τοιαῦτα πολυγωνιὰ σχήματα πληροῦντα τὴν σχέσιν (1) δὲ ἔχωμεν:

$$\text{ἐμβ. } P \leq S_* \leq S^* \leq \text{ἐμβ. } Q \quad (2) \quad \eta'$$

$$0 \leq S^* - S_* < \varepsilon \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ (3) ἰσχύει διὰ καθεστὸς $\varepsilon > 0$ ἔπεται ὅτι $S^* = S_* = S$, ἥτοι τὸ χωρίον εἶναι τετραγωνίσιμον.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω $S^* = S_*$ καὶ ἔστω $\varepsilon > 0$. Ὑπάρχει ἕνα πολυγωνιὸν σχῆμα P ἐκμελόμενον ὑπὸ τοῦ F καὶ ἕνα πολυγωνιὸν σχῆμα Q ἐκμελὸν τοῦ F τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{ἐμβ. } P \leq S_* \quad \text{καὶ} \quad S^* \leq \text{ἐμβ. } Q \leq S^* + \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

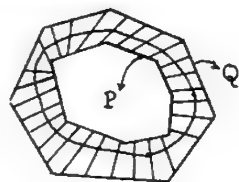
ἢ ἐπειδὴ $S_* = S^*$ ἔχομεν:

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{ἐμβ. } P \leq S_* \leq \text{ἐμβ. } Q \leq S_* + \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\text{ἐμβ. } Q - \text{ἐμβ. } P < \varepsilon.$$

Τό σύνολον τῶν σημείων τῶν ἀνηιόντων εἰς τό Q καί συγχρόνως μή ἀνηιόντων εἰς τό P εἶναι ἓνα πολυγωνιόν σχῆμα (βλ. Σκ.1) τό ὁποῖον ἔχει ἔμβαδόν ($\text{ἔμβ. } Q - \text{ἔμβ. } P$) καί τό ὁποῖον περιέχει τό σύνορον F . Ὅθεν, ἡ συνθήκη τῆς ἀνωτέρω προτάσεως διατυπώται ὡς ἀκολούθως:



Σκ.1

Πρότασις VII-1-2. Τό χωρίον F εἶναι τετραγωνίσιμον, ἔάν καί μόνον ἔάν, τό σύνορον του δύναται νά ἐμκλεισθῇ εἰς ἓνα πολυγωνιόν χωρίον, τό ὁποῖον νά ἔχη ὅσο θέλομεν μικρόν ἔμβαδόν.

Ἐνεκα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δά λέγωμεν ὅτι, ἓνα ἐπίπεδον σχῆμα καί εἰδίονα τερον μία καμπύλη ἔχει μηδενιόν ἔμβαδόν, ἔάν τοῦτο δύναται νά ἐγκλεισθῇ εἰς ἓνα πολυγωνιόν χωρίον τό ὁποῖον ἔχει ὅσο θέλομεν μικρό ἔμβαδόν.

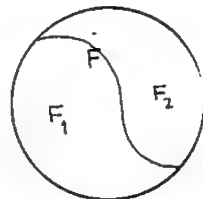
Συμφώνως πρὸς τόν ὁρισμόν τοῦ μηδενικοῦ ἔμβαδού καί τῆς Προτάσεως VII-1-1 ἔχομεν τήν κατωτέρω πρότασιν:

Πρότασις VII-1-3. Ἐνα ἐπίπεδον σχῆμα εἶναι τετραγωνίσιμον, ἔάν καί μόνον ἔάν, τό σύνορόν του ἔχη μηδενιόν ἔμβαδόν.

Εὐνόως διαπιστοῦται ὅτι: Μία καμπύλη μέ πεπερασμένον μήκος ἔχει μηδενιόν ἔμβαδόν.

Μία ἀξιοσημείωτος ιδιότης τῶν μηδενικῶν ἔμβαδῶν εἶναι ἡ ἀμολαυδός:

Πρότασις VII-1-4. Ἐάν F_1 καί F_2 εἶναι δύο τετραγωνίσιμα χωρία ἄνευ κοινῶν ἐσωτερικῶν σημείων καί F εἶναι ἡ ἔνωσις αὐτῶν, τότε τό F εἶναι ὁμοίως τετραγωνίσιμον καί ἰσχύει: $\text{ἔμβ. } F = \text{ἔμβ. } F_1 + \text{ἔμβ. } F_2$ (1)



Σκ.2

Ἀπόδειξις: Τό ὅτι τό F εἶναι τετραγωνίσιμον ἔπεται ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως καί ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι τό σύνορον τοῦ F συνίσταται ἐκ συνόλων μηδενικοῦ ἔμβαδού, τά ὁποῖα τινά εἶναι μέρη τῆς ἐνώσεως τῶν συνόρων τῶν τετραγωνισίμων χωρίων F_1 καί F_2 (βλ. Σκ.2). Ἡ ἀπόδειξις ὁλοκληροῦται ἔάν διαπιστώσωμεν

πὴν ἰσότητα (1).

Πρὸς τοῦτοις θεωροῦμεν τὰ πολυγωνικά σχήματα P_1 καὶ P_2 ἐγκλειόμενα εἰς τὰ F_1 καὶ F_2 καὶ τὰ πολυγωνικά σχήματα Q_1 καὶ Q_2 ἐγκλειόμενα τὰ F_1 καὶ F_2 ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ τὰ P_1 καὶ P_2 δὲν τέμνονται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος P τὸ ὁποῖον συνίσταται ἐκ τῶν P_1 καὶ P_2 εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβ. P_1 + ἐμβ. P_2 . Ὀμοίως, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος Q τὸ ὁποῖον συνίσταται ἐκ τῶν τεμνομένων πολυγωνικῶν σχημάτων Q_1 καὶ Q_2 εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ ἐμβ. Q_1 + ἐμβ. Q_2 . Οὕτω ἔχομεν:

$$\text{ἐμβ. } P = \text{ἐμβ. } P_1 + \text{ἐμβ. } P_2 \leq \text{ἐμβ. } F \leq \text{ἐμβ. } Q \leq \text{ἐμβ. } Q_1 + \text{ἐμβ. } Q_2 \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:

$$\text{ἐμβ. } P_1 + \text{ἐμβ. } P_2 \leq \text{ἐμβ. } F_1 + \text{ἐμβ. } F_2 \leq \text{ἐμβ. } Q_1 + \text{ἐμβ. } Q_2 \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔπεται ὅτι:

$$0 \leq |\text{ἐμβ. } F - (\text{ἐμβ. } F_1 + \text{ἐμβ. } F_2)| \leq (\text{ἐμβ. } Q_1 - \text{ἐμβ. } P_1) + (\text{ἐμβ. } Q_2 - \text{ἐμβ. } P_2).$$

Ἐπειδὴ αἱ διαφοραὶ $(\text{ἐμβ. } Q_1 - \text{ἐμβ. } P_1)$, $(\text{ἐμβ. } Q_2 - \text{ἐμβ. } P_2)$ δύνανται νὰ καταστοῦν ὅσο θέλομεν μικραῖ, ἔπεται ὅτι:

$$\text{ἐμβ. } F = \text{ἐμβ. } F_1 + \text{ἐμβ. } F_2$$

Εὐνόως διαπιστοῦται ὅτι: ἡ τομὴ δύο τετραγωνισίμων σχημάτων εἶναι ἓνα τετραγωνίσιο σχῆμα.

§ 2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ἐστω G ἓνα τετραγωνίσιο χωρίον καὶ $f(x, y)$ μία φραγμένη συνάρτησις ὁρισμένη ἐπὶ τοῦ G . Οὕτω ὑπάρχουν δύο ἀριθμοὶ m καὶ M , κατὰ τὰ ὅντα φράγμα τῆς $f(x, y)$ ἐπὶ τῷ G τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \text{διὰ καθε } (x, y) \in G.$$

Χωρίζομεν τὸ χωρίον G εἰς τετραγωνίσια χωρία G_p πεπερασμένου πλήθους τοιαῦτα, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

- i) Έναστον τῶν G_p εἶναι ὑποσύνολον τοῦ G .
 ii) Έναστον σημεῖον (x, y) τοῦ G ἀνήκει εἰς ἓνα τουλάχιστον τῶν G_p .
 iii) Δύο οἰαδήποτε μέρη G_j καί G_k ($j \neq k$) ἢ δὲν ἔχουν κοινά σημεῖα ἢ ἂν ἔχουν τινὰ κοινά σημεῖα ταῦτα δὲν εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα οὔτε τοῦ G_j οὔτε τοῦ G_k .

Ὁ χωρισμός τοῦ τετραγωνισίου χωρίου G εἰς τετραγωνίσια χωρία G_p ἔχοντα τὰς ἀνωτέρω ιδιότητες καλεῖται διαμέρισις τοῦ G καί συμβολίζεται αὕτη διὰ τοῦ \mathcal{D} , τὰ δὲ G_p καλοῦνται στοιχεῖα τῆς \mathcal{D} .

Μία διαμέρισις \mathcal{D} καλεῖται λεπτότερα τῆς \mathcal{D}' , ἐὰν ἡ \mathcal{D} προκύπτῃ ἀπὸ τὴν \mathcal{D}' μὲ περαιτέρω διαιρέσιν τῶν στοιχείων G_p τῆς \mathcal{D}' ἢ ὅπερ ἰσοδυναμῶς μᾶδε στοιχεῖον G_p τῆς \mathcal{D}' εἶναι εἴτε ἓνα στοιχεῖον τῆς \mathcal{D} εἴτε ἡ ἑνώσις διαφόρων στοιχείων αὐτῆς.

Θεωροῦμεν τὸ ἄθροισμα τῆς μορφῆς:

$$\sigma = \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p \quad (1)$$

ὅπου ΔS_p παριστᾷ τὸ ἔμβαδόν τοῦ χωρίου G_p καί (ξ_p, η_p) εἶναι ἓνα τυχὸν σημεῖον ἀνῆκον εἰς τὸ G_p . Ἀθροισμα τῆς μορφῆς (1) καλεῖται ἄθροισμα τοῦ Riemann ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν $f(x, y)$ καὶ τὸ χωρίον G , ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διαμέρισιν \mathcal{D} .

Ἐὰν D παριστᾷ τὴν μεγίστην τῶν διαμέτρων $\delta(G_p)$ τῶν χωρίων G_p , ἡ ποσότης D καλεῖται λεπτότης τῆς διαμερίσεως.

Ὁρισμός VIII-2-1. Ένας ἀριθμός J θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι τὸ ὄριον τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann (1) καθὰς τὸ $D \rightarrow 0$, ἐὰν διὰ μᾶδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ ἓνας ἀριθμός $\delta(\varepsilon) > 0$ τοσούτος, ὥστε διὰ μᾶδε διαμερίσιν \mathcal{D} μὲ $D < \delta(\varepsilon)$ καὶ μᾶδε ἐπιλογή τῶν σημείων $(\xi_p, \eta_p) \in G_p$ ἔχωμεν:

$$\left| \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p - J \right| < \varepsilon.$$

Ἐὰν ὑπάρχῃ ὁ ἀριθμός J , οὗτος εἶναι τὸ ὄριον:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p$$

τῶν ἀθροισμάτων τοῦ Riemann καὶ καλεῖται διηκό ὁλοκληρώμα τῆς συναρτήσεως $f(x, y)$ ἐπὶ τοῦ χωρίου G συμβολιζόμενον οὕτω: $\iint_G f(x, y) dS$ ἢ $\iint_G f(x, y) dx dy$.

$$\text{Όστε, } \iint_G f(x,y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p$$

Εάν λοιπόν υπάρχει το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ επί του χωρίου G , αυτή θα ονομάζεται όλοκληρώσιμος επί του G , ή δε έκφρασις $f(x,y)ds$ ή $f(x,y) dx dy$ υαλείται στοιχείον της ολοκληρώσεως.

Τό G υαλείται συνήθως υαί πεδίων τῆς ολοκληρώσεως.

Εάν $f(x,y) = 1$ διὰ υάδε $(x,y) \in G$, τότε:

$$\iint_G dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \sum_{p=1}^n \Delta S_p = \text{έμβ. } G.$$

§ 3. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΥΠΑΡΞΕΩΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Έστω ή συνάρτησις $f(x,y)$ ώρισμένη επί του τετραγωνισίμου χωρίου G υαί \mathcal{D} μία διαμέρισις αὐτοῦ. Ὑς συμβολίσωμεν διὰ M_p υαί m_p τό άνώτερον υαί υατάτερον πέρας τῆς $f(x,y)$ επί τῶν τετραγωνισίμων χωρίων G_p πού προυήπτουν ἐν τῆς διαμερίσεως \mathcal{D} .

Διὰ τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν $f(x,y)$ σχηματίζομεν τά άδροίσματα:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{D}) = \sum_{p=1}^n M_p \cdot \Delta S_p \quad (1)$$

$$\mathcal{Q}_*(\mathcal{D}) = \sum_{p=1}^n m_p \Delta S_p \quad (2)$$

όπου τό ΔS_p είναι τό έμβαδόν του χωρίου G_p .¹⁾

Τά άδροίσματα (1) υαί (2) υαλοῦνται άνω υαί υάτω άδροισμα του Darboux τῆς f άντιστοιχούντα εἰς τὴν διαμέρισιν \mathcal{D} .

Έστω ένα σημείον $(\xi_p, \eta_p) \in G_p$ υαί $f(\xi_p, \eta_p)$ ή τιμή τῆς συναρτήσεως $f(x,y)$ θά έχωμεν:

$$\mathcal{Q}_*(\mathcal{D}) = \sum_{p=1}^n m_p \Delta S_p \leq \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p \leq \sum_{p=1}^n M_p \cdot \Delta S_p = \mathcal{Q}^*(\mathcal{D}).$$

Όθεν:

$$\mathcal{Q}_*(\mathcal{D}) \leq \mathcal{Q}^*(\mathcal{D}) \quad (3)$$

ήτοι: τό υάτω άδροισμα τῆς f τό άντιστοιχούν εἰς τὴν διαμέρισιν \mathcal{D} είναι μικρότερον ή ίσον του άντιστοιχου άνω άδροίσματος αὐτῆς.

Συμφώνως πρὸς τόν όρισμόν του άνωτέρω πέρατος διὰ υάδε $\epsilon > 0$ είναι δυνατόν νά εὔ-

¹⁾ Χάριν απλουστεύσεως τῆς γραφῆς γράψωμεν M_p υαί m_p αντί $M_p(\mathcal{D})$ υαί $m_p(\mathcal{D})$, όμοίως $\mathcal{Q}^*(\mathcal{D})$ υαί $\mathcal{Q}_*(\mathcal{D})$ αντί $\mathcal{Q}^*(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ υαί $\mathcal{Q}_*(\mathcal{D}, \mathcal{D})$.

ρωμεν ένα σημείον (ξ_p, η_p) ἀνῆκον εἰς τὸ G_p τῆς διαμερίσεως \mathcal{D} καὶ τοῖσ' αὐτοῖς, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$M_p - f(\xi_p, \eta_p) < \frac{\epsilon}{S} \quad (4)$$

ὅπου S εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου G .

Λόγω τῆς (4) ἔχομεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p = \sum_{p=1}^n [M_p - f(\xi_p, \eta_p)] \Delta S_p < \frac{\epsilon}{S} \cdot \sum_{p=1}^n \Delta S_p = \frac{\epsilon}{S} \cdot S = \epsilon.$$

Ὁθεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p < \epsilon \quad (5)$$

κατ' ἀναλογία ἔχομεν:

$$\sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p - \Omega_*(\mathcal{D}) < \epsilon \quad (6).$$

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) συμπεραίνομεν ὅτι: Διὰ τὰς διαμερίσεις \mathcal{D} ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ χωρίου G τὸ ἄθροισμα τοῦ Riemann τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν $f(x, y)$ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ἄνω ἁθροίσματος τῆς f καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου κατωῦ ἁθροίσματος τῆς f . Αἱ δὲ διαφοραὶ αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν (5) καὶ (6) δύνανται νὰ μεταστούν ὅσον θέλομεν μικραῖ.

Πρότασις VII-3-1. Ἐὰν ἡ διαμέρισις \mathcal{D}' εἶναι λεπτοτέρα τῆς \mathcal{D} , τότε δὲ ἔχομεν:

$$\Omega_*(\mathcal{D}) \leq \Omega_*(\mathcal{D}') \leq \Omega^*(\mathcal{D}') \leq \Omega^*(\mathcal{D}).$$

Ἀπόδειξις: Κάθε στοιχεῖον G_p τῆς διαμερίσεως \mathcal{D} εἶναι ἡ ἑνωσις τῶν στοιχείων G'_{pk} , $k=1, 2, \dots, \lambda_i$ τῆς \mathcal{D}' .

Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν:

$$\Delta S_p = \sum_{k=1}^{\lambda_i} \Delta S'_{pk}, \text{ ὅπου } \Delta S'_{pk} \text{ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ } G'_{pk}$$

καὶ

$$M_p \geq M_{pk}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \lambda_i$$

Κάθε στοιχεῖον G'_i θεωρεῖται ὅτι εἶναι ὑποσύνολον ἐνὸς μόνου στοιχείου G_p . Ἐπὶ πλέον δὲ δὲ ἔχομεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) = \sum_{p=1}^n M_p \Delta S_p \geq \sum_{p=1}^n M_{pk} \left(\sum_{k=1}^{\lambda_i} \Delta S'_{pk} \right) = \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^{\lambda_i} M_{pk} \Delta S'_{pk} = \Omega^*(\mathcal{D}').$$

Ὁθεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) \geq \Omega^*(\mathcal{D}') \quad (7)$$

Ἀναλόγως:

$$\Omega_*(\mathcal{D}) \leq \Omega_*(\mathcal{D}') \quad (8)$$

σύνολον τῶν υἁτῶν ἄθροισμάτων, συμφώνως πρὸς τὸ Ἀξίωμα II-5-1, Τόμος I, σελ. 88, ἔχει ἕνα ἄνωγέρον πέρασ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν:

$$\bar{J} = \inf_{\Phi} \Omega^*(\Phi) \text{ καὶ } \underline{J} = \sup_{\Phi} \Omega_*(\Phi) \quad (1).$$

Οἱ ἀριθμοὶ \bar{J} καὶ \underline{J} καλοῦνται ἀντιστοιχῶς ἄνω καὶ κατω ὁλοκληρώματα τοῦ Darboux ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν συνάρτησιν $f(x, y)$.

Πρότασις VII-3-3. Διὰ τὸ κατω καὶ ἄνω ὁλοκληρώματα τοῦ Darboux ἰσχύει $\underline{J} \leq \bar{J}$.

Ἀπόδειξις: Ἐστω ὅτι $\underline{J} > \bar{J}$ τότε ὑπάρχει ἕν $\varepsilon > 0$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\underline{J} - \bar{J} > \varepsilon > 0 \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon - (\underline{J} - \bar{J}) < 0 \quad (2).$$

Ἐξ ἄλλου, συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμὸν τοῦ ἀνωτέρου καὶ κατωτέρου πέρατος, ὑπάρχει ἕνα ἄνω ἄθροισμα $\Omega^*(\Phi_1)$ καὶ ἕνα κατω ἄθροισμα $\Omega_*(\Phi_2)$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\Omega^*(\Phi_1) - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ καὶ } \underline{J} - \Omega_*(\Phi_2) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3).$$

Ἐν τῶν σχέσεων (3) λαμβάνομεν:

$$\Omega^*(\Phi_1) - \Omega_*(\Phi_2) + (\underline{J} - \bar{J}) < \varepsilon \quad (4)$$

λόγῳ δὲ τῶν σχέσεων (2) καὶ (4) ἔχομεν:

$$\Omega^*(\Phi_1) - \Omega_*(\Phi_2) < \varepsilon - (\underline{J} - \bar{J}) < 0 \quad (5).$$

Τὸ τελευταῖον συμπέρασμα εἶναι ἄτοπον, διότι ἀντιβαίνει πρὸς τὴν πρότασιν VIII-3-2. (ἥτις λέγει ὅτι: καθε ἄνω ἄθροισμα τῆς $f(x, y)$ εἶναι μεγαλύτερον παντὸς κατω ἄθροισματος).

● Ἐστω μία διαμέρισις Φ τοῦ χωρίου G εἰς τετραγωνίσματα χωρία G_p με ἀντίστοιχα σύνορα L_p . Ἡ ἑνωσις L τῶν συνόρων L_p ὁλῶν τῶν στοιχείων G_p τῆς Φ θὰ καλεῖται σύνορον τῆς διαμερίσεως Φ , δηλ. εἶναι ἕξ ὁρισμοῦ:

$$L = \bigcup_{p=1}^n L_p.$$

Τὰ σύνορα L_p ἔχουν ἐμβαδὸν μηδενικόν διὰ καθε διαμέρισιν τοῦ χωρίου G εἰς τετραγωνίσματα χωρία G_p . Συνεπῶς καὶ τὸ σύνορον L τῆς διαμερίσεως Φ , ὡς ἑνωσις πεπερασμένου πληθους συνόρων ἔχοντων μηδενικὸν ἐμβαδόν, θὰ ἔχη μηδενικὸν ἐμβαδόν.

Ἐπὶ πλεόν τὸ σύνορον L , ὡς πεπερασμένη ἑνωσις κλειστῶν συνόλων, εἶναι κλειστὸν σύνολον.

Λήμμα VII - 3-1. (Darboux). Το άνω όλοκληρώμα \bar{J} (άντ. κάτω όλοκληρώμα \underline{J}) είναι το όριον τών άνω (άντ. κάτω) άθροισμάτων του Darboux καθώς $D \rightarrow 0$.

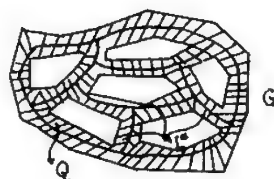
δηλ. $\bar{J} = \lim_{D \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n M_p \Delta S_p$ (άντ. $\underline{J} = \lim_{D \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n m_p \Delta S_p$). (όπου D παριστά την μεγίστην τών διαμέτρων $\delta(G_p)$ τών στοιχείων G_p της διαμερίσεως Φ του χωρίου G).

Απόδειξις: Συμφώνως προς τόν όρισμόν του άνω όλοκληρώματος \bar{J} διά τάδε $\epsilon > 0$ υπάρχει μία διαμέρισις Φ^* του G τοιαύτη, ώστε τό αντίστοιχον άνω άθροισμα νά πληροί την σχέσιν :

$$0 < \bar{\Omega}^*(\Phi^*) - \bar{J} < \epsilon.$$

Έγκυλιθίζομεν τό σύνορον L^* της διαμερίσεως Φ^* εντός ενός πολυγωνιουού σχήματος Q , τό όποϊον νά έχη έμβαδόν μιμρότερον του $\frac{\epsilon}{2M}$, ένδα $M = \sup_{(x,y) \in G} |f(x,y)|$, εις τρόπον, ώστε τό L^* νά μήν έχη κοινά σημεία μετά της περιμέτρου του πολυγωνιουού σχήματος (βλ. Σχ. 1).

Τό σύνορον L^* και τό σύνορον του πολυγωνιουού σχήματος Q είναι δύο κλειστά και φραγμένα σύνολα μή έχοντα κοινά σημεία, συνεπώς, συμφώνως προς τό θεώρημα VII - 0-1, ή απόστασις αὐτῶν είναι ένας θετικὸς αριθμὸς έστω $\alpha > 0$. Ἦδη ὥς θεωρήσομεν μιαν αὐθαίρετον διαμέρισιν Φ του χωρίου G , της οποίας τά στοιχεῖα θά τά παριστῶμεν διά του G_p και τοιαύτην ὥστε $D < \alpha$.



Σχ. 1

Ἦδη υπάρχει μία προφανής ιδιότης τών στοιχείων G_p της διαμερίσεως Φ , ήτοι: Εάν G_p και L^* έχουν τουλάχιστον ένα κοινόν σημείον, τότε τό στοιχείον G_p μετὰ εις όλοκληρώρου εις τό έσωτερικόν του πολυγωνιουού χωρίου Q . Τό έσωτερικόν του πολυγωνιουού χωρίου εις τό Σχ. 1 είναι τό γραμμοσειασθέν. Τά στοιχεῖα G_p της διαμερίσεως Φ τά ανήκοντα εις τό έσωτερικόν του πολυγωνιουού χωρίου καλοῦνται συνωριακά στοιχεῖα της διαμερίσεως Φ .

Εις την περίπτωση όπου υπάρχουν στοιχεῖα της διαμερίσεως Φ τοιαῦτα, ὥστε ένα τμήμα αὐτῶν ανήκει εις τό έσωτερικόν του πολυγωνιουού χωρίου και ένα άλλο εις τό έξωτερικόν αὐτου, τότε θεωροῦμεν την διαμέρισιν $\Phi \cap Q = \Phi_1$, δηλ. την

τομήν πάντων τῶν στοιχείων τῆς Φ μετά τοῦ Q , ἡ Φ , εἶναι λεπτοτέρα τῆς Φ . Κατ' αὐτόν τὸν τρόπον πάντα τὰ στοιχεῖα τῆς διαμερίσεως Φ (ἢ τῆς Φ_1) θὰ εἶναι συνωριαυὰ καὶ μὴ συνωριαυὰ, τὰ δευτέρα δὲ θὰ τὰ καλοῦμεν ἐσωτερικὰ στοιχεῖα τῆς διαμερίσεως Φ .

Κάθε ἐσωτερικὸν στοιχεῖον θὰ περιέχεται γνησίως εἰς ἓνα στοιχεῖον τῆς διαμερίσεως Φ^* , διότι ἐν ἐναντία περιπτώσει εἰάν ἐτέμνετο ὑπὸ δύο στοιχείων τῆς Φ^* , τότε θὰ ἐτέμνετο καὶ ὑπὸ τοῦ συνόρου L^* , ἥτοι θὰ ἦτο συνωριαυὸν στοιχεῖον, ὁπερ ἄτοπον.

Ἦδη δὲ δεῖξωμεν ὅτι διὰ καθε διαμέρισιν Φ μὲ $D < \alpha$ ἀντιστοιχεῖ ἓνα ἄνω ἄθροισμα $\Omega^*(\Phi)$ μὲ διαφορά ἀπὸ τοῦ \bar{J} μικρότερον τοῦ ε . Διὰ νὰ δεῖξωμεν αὐτό χωρίζομεν τὸ ἄθροισμα $\Omega^*(\Phi)$ εἰς δύο ομάδας ὥρων:

$$\Omega^*(\Phi) = \sum_{p=1}^n M_p \cdot \Delta S_p = \sum' M'_p \cdot \Delta S'_p + \sum'' M''_p \cdot \Delta S''_p,$$

ὅπου ἡ ἄθροισις \sum' ἐπευτείνεται ἐφ' ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν στοιχείων τῆς διαμερίσεως καὶ ἡ \sum'' ἐπευτείνεται ἐφ' ὅλων τῶν συνωριαυῶν στοιχείων τῆς διαμερίσεως. Ὡς υπολογίσωμεν ἤδη χωριστὰ ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω ἄθροισμάτων. Τὸ ἀντίστοιχον ἀνώτερον πέρασ M'_p δὲν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἀνώτερον πέρασ τῶν τιμῶν τῆς $f(x, y)$, ὑποθέτοντες τούτο ἐπὶ τοῦ ἰδίου στοιχείου τῆς διαμερίσεως Φ^* .

Ἐνεκα τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι:

$$\sum' M'_p \Delta S'_p \leq \tilde{\Omega}^*(\Phi).$$

Ἐπὶ πλέον ἔχομεν τὴν προφανῆ ἀνωσότητα:

$$|M''_p| \leq M = \sup_{(x,y) \in G} |f(x,y)| \quad \text{δι' ὅλα τὰ } p.$$

καὶ

$$\sum'' \Delta S''_p < \varepsilon \text{ με } Q < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Συνεπῶς:

$$|\sum'' M''_p \Delta S''_p| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ὅθεν, $\Omega^*(\Phi) = \sum' M'_p \cdot \Delta S'_p + \sum'' M''_p \Delta S''_p < \tilde{\Omega}^*(\Phi) + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{J} + \varepsilon$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀνωσότητος ἔπεται τὸ συμπέρασμα.

Διὰ τὸ κατω ἄθροισμα θὰ ἔχωμεν κατ' ἀναλογία:

$$\underline{J} - \varepsilon < \Omega_*(\Phi)$$

Θεώρημα VII - 3-1. Ἡ ὑμάνη καὶ ἀναγκασία συνθήκη, ἵνα ἡ συνάρτησις $f(x,y)$, ὡ-
ρισμένη ἐπὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ χωρίου G , εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ G , εἶναι διὰ
κάθε $\varepsilon > 0$ νὰ ὑπάρῃ μία διαμέρισις \mathcal{D} τοῦ χωρίου G τοιαύτη, ὥστε τὰ ἄθροισματα
τοῦ Darboux τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὴν τὴν διαμέρισιν νὰ ὑμανοποιῶν τὴν σχέ-
σιν: $\Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) < \varepsilon$.

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκασίον) Ἐστω ὅτι ἡ $f(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ G καὶ
ἔστω J τὸ ὁλοκληρώμα ταύτης ἐπὶ τοῦ G . Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ὅριου
τῶν ἄθροισμάτων τοῦ Riemann διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε
διὰ καθε διαμέρισιν \mathcal{D} μὲ $D < \delta(\varepsilon)$ ἡ ἀνισότης

$$\left| J - \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (1)$$

νὰ ὑμανοποιῖται ἀνεξαρτήτως τῆς ἐκλογῆς τῶν (ξ_p, η_p) ἐπὶ τῶν στοιχείων G_p
τῆς διαμερίσεως \mathcal{D} .

Ἐξ ἄλλου, ἐπεὶ δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ Riemann τῆς $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ G εἶναι μικρότερον
τοῦ ἀντιστοίχου ἄνω ἄθροισματος τῆς f καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου κατω
ἄθροισματος ταύτης, διὰ τὴν δοθεῖσαν διαμέρισιν \mathcal{D} μὲ $D < \delta$ θυνάμεθα νὰ ἐ-
κλέξωμεν τὰ σημεῖα (ξ'_p, η'_p) καὶ (ξ''_p, η''_p) ἐπὶ τῶν στοιχείων G_p τῆς \mathcal{D} εἰς τρόπον,
ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ ἀνισότητες:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \sum_{p=1}^n f(\xi'_p, \eta'_p) \Delta S_p < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{καὶ} \quad \sum_{p=1}^n f(\xi''_p, \eta''_p) \Delta S_p - \Omega_*(\mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

Ἐν τῶν σχέσεων (2) λαμβάνομεν:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{p=1}^n f(\xi'_p, \eta'_p) \Delta S_p - \sum_{p=1}^n f(\xi''_p, \eta''_p) \Delta S_p \right| \quad (3)$$

Ἐξ ἄλλου, λόγῳ τῆς (1), ἔχομεν:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{p=1}^n f(\xi'_p, \eta'_p) \Delta S_p - \sum_{p=1}^n f(\xi''_p, \eta''_p) \Delta S_p \right| = \left| \left(J - \sum_{p=1}^n f(\xi'_p, \eta'_p) \Delta S_p \right) - \left(J - \sum_{p=1}^n f(\xi''_p, \eta''_p) \Delta S_p \right) \right| \leq \\ & \leq \left| J - \sum_{p=1}^n f(\xi'_p, \eta'_p) \Delta S_p \right| + \left| J - \sum_{p=1}^n f(\xi''_p, \eta''_p) \Delta S_p \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Ἡ (3), λόγῳ τῆς (4), δίδει:

$$\Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ήμᾱνόν: Ἐστω ὅτι διὰ τῆς $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει μία διαμερίσις \mathcal{D} τοιαύτη, ὥστε $\Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) < \varepsilon$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἄνω καὶ κάτω ὀλουθηρώματος ἔχομεν: $\bar{J} \leq \Omega^*(\mathcal{D})$ καὶ $\underline{J} \geq \Omega_*(\mathcal{D})$. Συνεπῶς $0 \leq \bar{J} - \underline{J} < \Omega^*(\mathcal{D}) - \Omega_*(\mathcal{D}) < \varepsilon$ διὰ τῆς $\varepsilon > 0$.

Ἄρα $\bar{J} = \underline{J}$.

Ἦδη ἄς παραστήσωμεν διὰ τοῦ J τὴν κοινὴν τιμὴν τῶν \bar{J} καὶ \underline{J} . Ἐν συνεχείᾳ δὲ δεῖξωμεν ὅτι τὸ J εἶναι τὸ ὅριον τῶν ἀδροισμάτων τοῦ Riemann ὅπου τὸ $D \rightarrow 0$, δηλ. τὸ διπλοῦν ὀλουθηρώμα τῆς $f(x, y)$ ἐπὶ τοῦ χωρίου G . Πρὸς τοῦτοις, συμφῶνως πρὸς τὸ Λήμμα τοῦ Darboux, τὸ $J = \lim_{\substack{D \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n M_p \Delta S_p = \lim_{\substack{D \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n m_p \Delta S_p$.

Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$$\sum_{p=1}^n m_p \Delta S_p \leq \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p \leq \sum_{p=1}^n M_p \Delta S_p \quad (5),$$
 ὅπου $(\xi_p, \eta_p) \in G_p$. Λαμβάνοντες τὰ ὅρια τῆς διπλῆς ἀνισότητος (5) μὲ $n \uparrow \infty$ καὶ $D \rightarrow 0$ καὶ ἐπειδὴ τὰ ὅρια τῶν δύο αὐτῶν εἶναι ἴσα πρὸς J , ἔπεται ὅτι καὶ τὸ $\lim_{\substack{D \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p = J$ (6). Ἀλλὰ τὸ ἀριστερὸν μέλος τῆς (6) εἶναι τὸ $\iint_G f(x, y) dx dy$. Ὁδυν: $J = \iint_G f(x, y) dx dy$.

§ 4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα VII-3-1 δὲ ἐξετάσωμεν ἀπολοῦθως τὴν ὀλουθη-
ρωσιμότητα ὠρισμένων σπουδαίων κατηγοριῶν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι ἐμφανί-
ζονται εἰς τὰς διαφόρους ἐφαρμογὰς.

Θεώρημα VII-4-1 Κάθε συνεχὴς συνάρτησις $f(x, y)$ ὠρισμένη ἐπὶ
ἐνὸς κλειστοῦ καὶ φραγμένου χωρίου G εἶναι ὀλουθηρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις: Ἡ $f(x, y)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ καὶ φραγμένου χωρίου G , κα-
τὰ συνέπειαν δὲ εἶναι καὶ ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ, ἥτοι: Διὰ τῆς $\varepsilon > 0$ ὑ-
πάρχει ἀριθμὸς $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἂν θεωρήσωμεν δύο τυχόντα σημεῖα $M_1(x_1, y_1)$
καὶ $M_2(x_2, y_2)$ τοιαῦτα ὥστε: $|M_1 M_2| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2} < \delta(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ὅπου } \mathcal{D} \text{ ἡ ἐμβολὴ τοῦ } G.$$

Ἦδη χωρίζομεν τὸ χωρίον G διὰ μίαν διαμερίσεως \mathcal{D} τοιαύτην, ὥστε $D < \delta(\varepsilon)$.

Ἐφ' ἐκείνου τῶν χωρίων G_p θά ἔχωμεν διὰ τὴν $f(x,y)$ λόγῳ τῆς ὁμαλῆς συνεχείας:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{2S} \quad \text{διὰ τὰς δεύρας σημείων } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ τοῦ χωρίου } G_p.$$

Συνεπῶς θὰ ὑπάρχουν δύο σημεία $(x_0, y_0), (x'_0, y'_0)$ τοῦ G_p διὰ τὰ ὁποῖα θὰ ἴσχυει:

$$f(x_0, y_0) - f(x'_0, y'_0) = M_p - m_p < \frac{\varepsilon}{S}.$$

$$\text{Ὅθεν: } \Omega^*(\phi) - \Omega_*(\phi) = \sum_{p=1}^n M_p \Delta S_p - \sum_{p=1}^n m_p \Delta S_p = \sum_{p=1}^n (M_p - m_p) \Delta S_p < \frac{\varepsilon}{S} \cdot \sum_{p=1}^n \Delta S_p = \frac{\varepsilon}{S} \cdot S = \varepsilon.$$

Συμφώνως, λοιπόν, πρὸς τὸ θεώρημα VII-3-1 τὴ $f(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

Θεώρημα VII-4-2. Ἐάν μία συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι φραγμένη ἐπὶ ἐνὸς υλαιοῦ καὶ φραγμένου χωρίου G καὶ εἶναι συνεχὴς παντοῦ ἐπὶ τοῦ G , δυνατόν ἐκπὸς ἐνὸς συνόλου μηδενικοῦ ἔμβαδου, τότε ἡ συνάρτησις εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ G .

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως ἡ $f(x,y)$ εἶναι φραγμένη ἐπὶ τοῦ G · αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει μία σταθερὰ $k > 0$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν

$$|f(x,y)| < k \quad \text{διὰ τὰς δεύρας } (x,y) \in G.$$

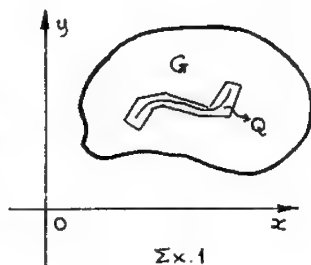
Ἐγκλωβίζομεν τὸ σύνολον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ συνάρτησις εἶναι ἀσυνεχὴς ἐντὸς ἐνὸς πολυγωνικοῦ σχήματος Q ἔμβαδου μικροτέρου τοῦ $\frac{\varepsilon}{4k}$, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σύνολον ὅπου ἡ $f(x,y)$ εἶναι ἀσυνεχὴς νὰ περιέχεται γνησίως ἐντὸς τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος (βλ. σχ.1).

Παριστῶμεν διὰ τοῦ \tilde{G} τὸ μέρος τοῦ χωρίου G τὸ μὴ εἰσερχόμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ Q .

Τὰ συνοριακά σημεία τοῦ πολυγωνικοῦ σχήματος Q , τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ G κεῖνται ἐπὶ τοῦ \tilde{G} , συνεπῶς τὸ \tilde{G} εἶναι υλαιοστὸν. Ἐπειδὴ ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ υλαιοστὸν καὶ φραγμένον σύνολον \tilde{G} θὰ εἶναι καὶ ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ.

Ὅθεν, ὅπως ἐδείχθη κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, διὰ τὰς δεύρας $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀριθμὸς $\delta(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε ἐάν θεωρήσωμεν μιαν διαμέρισιν \mathfrak{D} τοῦ χωρίου \tilde{G} μὲ $D < \delta(\varepsilon)$, ἐφ' ἐκείνου στοιχείου \tilde{G}_p τῆς ἐν λόγῳ διαμερίσεως, νὰ ἔχωμεν: $\sup_{x,y \in \tilde{G}_p} f(x,y) - \inf_{x,y \in \tilde{G}_p} f(x,y) = M_p - m_p \leq \frac{\varepsilon}{2S}$, ὅπου S εἶναι τὸ ἔμβαδόν τοῦ G .

Ἡδὴ θεωροῦμεν τὴν διαμέρισιν \mathfrak{D} τοῦ G τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον στοιχεῖον G_1 συμπίπτει μὲ τὸ Q τὰ δὲ ἄλλα στοιχεῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα τῆς ἀνωτέρω θεω-



ωρηθείσης διαμερίσεως ἐπὶ τοῦ \bar{G} . Ὑπολογίσωμεν ἤδη τὴν διαφορὰν

$$\varrho^*(\phi) - \varrho_*(\phi) = M_1 \Delta S_1 - m_1 \Delta S_1 + \sum_{p=2}^n (M_p - m_p) \Delta S_p$$

$$< (M_1 - m_1) \cdot \frac{\varepsilon}{4k} + \sum_{p=2}^n \frac{\varepsilon}{2S} \cdot \Delta S_p.$$

Ἀλλὰ $M_1 - m_1 \leq 2k$ καὶ $\sum_{p=2}^n \Delta S_p < S$.

Ὅθεν: $\varrho^*(\phi) - \varrho_*(\phi) < 2k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} + \frac{\varepsilon}{2S} \cdot S = \varepsilon$.

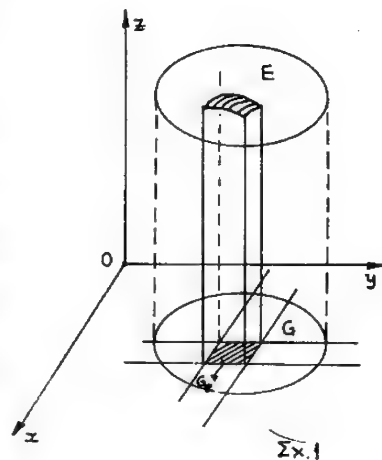
Οὕτω $\varrho^*(\phi) - \varrho_*(\phi) < \varepsilon$ διὰ πᾶθε $\varepsilon > 0$. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὸ θεωρήμα VIII-3-1 ἡ $f(x, y)$ θὰ εἶναι ὁλοκληρώσιμος.

§5. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ $\iint_G f(x, y) dx dy$.

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἄξων $Oxyz$, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $z = f(x, y) \geq 0$, ὑποθέτοντες τὴν συνάρτησιν $f(x, y)$ συνεχὴ ἐπὶ ἑνὸς πεδίου μεταβολῆς τῶν x καὶ y . Θεωροῦμεν τὸ πρισματικὸν στερεὸν τὸ ὁποῖον ὀρίζεται: α) Ἀπὸ ἑνὸς τμήματος E τῆς ἀνωτέρω ἐπιφανείας, β) Ἀπὸ τὴν προβολὴν G αὐτοῦ τοῦ τμήματος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἄξων oxy καὶ γ) Ἀπὸ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν πού προβάλλει τὸ περίγραμμα τοῦ τμήματος E τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ ὄριον τοῦ G ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου oxy (βλ. Σχ. 1). Ἡ δὲ προτιθέμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὸν ὄριον τοῦ ἀνωτέρω στερεοῦ. Πρὸς τοῦτοις θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν ϕ τοῦ χωρίου G ὑπὸ εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας ox, oy καὶ ἐφ' ἑκάστου στοιχείου (ὀρθογωνίου) G_p αὐτῆς λαμβάνομεν ἓνα τυχόν σημεῖον (ξ_p, η_p) καὶ ἀνολογούτως σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα:

$$S_n = \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p \quad (1)$$

ὅπου ΔS_p εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου G_p .



Προφανώς τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα γεωμετρικῶς παριστᾷ ἓνα ἄθροισμα ὀρθωνωνίων παραλληλεπιπέδων. Πράγματι, τὸ $f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p$ παριστᾷ τὸν ὀρθον (γνωστὸ ἐν τῇ στοιχειώδους Γεωμετρίας) τοῦ ὀρθωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ βάσιν ἓνα ὀρθωνιον ἐμβαδοῦ ΔS_p καὶ ὕψος ἴσον πρὸς τὴν τιμὴν $f(\xi_p, \eta_p)$.

Ἐστω ἤδη τὸ $n \rightarrow \infty$ συγχρόνως δὲ καὶ τὸ $D \rightarrow 0$, τότε ὑπάρχει τὸ $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ D \rightarrow 0}} \sum_{p=1}^n f(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p$ καὶ ἐξ ὁρισμοῦ καλεῖται ὁρμος V τοῦ ἀνωτέρω πρισμα-

τιμοῦ στερεοῦ. Ἐξ ἄλλου τὸ ἀνωτέρω ὄριον εἶναι τὸ $\iint_G f(x, y) dx dy$.

Ἄρα ὁ ὁρμος τοῦ ἀνωτέρω στερεοῦ εἶναι $V = \iint_G f(x, y) dx dy$ (2)

§ 6. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Αἱ βασικαὶ ιδιότητες τοῦ διπλοῦ ὀλουθηρώματος εἶναι τελείως ἀνάλογοι μετὰς ἀντιστοιχοῦς ιδιότητες τοῦ ὠρισμένου ὀλουθηρώματος συναρτήσεως μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς. Διὰ τοῦτο θὰ ἀναφέρωμεν ἀπλῶς αὐτάς χωρὶς νὰ δώσωμεν τὰς ἀποδείξεις των.

I. Ἐάν αἱ συναρτήσεις $f_1(x, y)$ καὶ $f_2(x, y)$ εἶναι ὀλουθηρώσιμοι ἐπὶ τοῦ χωρίου G , τότε καὶ ἡ συνάρτησις $C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y)$, ὅπου C_1, C_2 τυχόντες πραγματικαὶ ἀριθμοί, εἶναι ἐπίσης ὀλουθηρώσιμος ἐπὶ τοῦ G καὶ ἰσχύει:

$$\iint_G [C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y)] dx dy = C_1 \iint_G f_1(x, y) dx dy + C_2 \iint_G f_2(x, y) dx dy.$$

Ἐν τῇ ἀνωτέρω ιδιότητος συνάγεται ὅτι:

Τὸ σύνολον τῶν ὀλουθηρώσιμων συναρτήσεων ἐπὶ τοῦ G ἀποτελεῖ ἓνα διανυσματικὸν χώρον.

II α. Ἐάν διὰ τὴν ὀλουθηρώσιμον συνάρτησιν $f(x, y)$ ἐπὶ τοῦ χωρίου G ἰσχύῃ $f(x, y) \geq 0$, τότε δὲ εἶναι καὶ $\iint_G f(x, y) dx dy \geq 0$.

Συνέπεια τῆς ἀνωτέρω ιδιότητος εἶναι ὅτι:

II. Εάν αἱ $f_1(x,y)$ καί $f_2(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ χωρίου G καὶ εἶναι $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, τότε δά εἶναι καὶ $\iint_G f_1(x,y) dx dy \leq \iint_G f_2(x,y) dx dy$.

III. Εἶναι $|\iint_G f(x,y) dx dy| \leq \iint_G |f(x,y)| dx dy$.

IV. Εάν εἶναι $\iint_G f(x,y) dx dy = 0$ καὶ ἡ $f(x,y)$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ, τότε ἡ $f(x,y) = 0$ διὰ καθε $x,y \in G$, εὐτός ἐνός συνόλου μηδενικοῦ ἔμβαδου.

V. Ἐστω G' ἐν ἐσωτερικόν χωρίον τοῦ G . Εάν ἡ $f(x,y)$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ G καὶ εάν $\iint_{G'} f(x,y) dx dy = 0$ διὰ καθε χωρίον G' , τότε ἡ $f(x,y)$ εἶναι μηδέν εἰς καθε σημεῖον τοῦ G .

Πράγματι, ἐάν ἡ $f(x,y)$ ἦτο θετικὴ εἰς ἓνα σημεῖον M , τότε δά ὑπῆρχεν μία περιοχὴ G' περιέχουσα τὸ σημεῖον M ἐντὸς τῆς ὁποίας, ἔνευα τῆς συνεχείας, τῆς $f(x,y)$, ἡ $f(x,y)$ δά ἦτο θετικὴ, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_{G'} f(x,y) dx dy$ δέν δά ἦτο μηδέν, ὅπερ ἄτοπον.

VI. Εάν G_1 καὶ G_2 εἶναι δύο χωρία τοιαῦτα, ὥστε $G_1 \cap G_2 = D$, ἔνθα τὸ ἔμβαδόν τοῦ D εἶναι μηδενικόν καὶ $G = G_1 \cup G_2$, τότε $\iint_G f(x,y) dx dy = \iint_{G_1} f(x,y) dx dy + \iint_{G_2} f(x,y) dx dy$.

VII. Εάν ἡ $f(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ G καὶ ἔστω S τὸ ἔμβαδόν τοῦ G καὶ M καὶ m τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρασ τῆς $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ G , τότε δά εἶναι:

$$m S \leq \iint_G f(x,y) dx dy \leq M S.$$

VIII, (Θεώρημα Μέσης τιμῆς). Ἐστω ἡ συνεχὴς συνάρτησις $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ ὁλοκληρώσιμου καὶ φραγμένου χωρίου G τὸ ὁποῖον ὑποδέτομεν συνευκτινόν. Τότε ὑπάρχει ἓν το-
λάχιστον σημεῖον $(\xi, \eta) \in G$ τοιοῦτον, ὥστε $\iint_G f(x,y) dx dy = S \cdot f(\xi, \eta)$, ἔνθα S τὸ ἔμβαδόν
τοῦ χωρίου G .

Ἀπόδειξις: Εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ ἀνώτερον πέρασ M καὶ τὸ κατώτερον πέρασ m εἶναι αἱ τιμαὶ πού λαμβάνει ἡ συνεχὴς συνάρτησις εἰς κάποια σημεῖα τοῦ πε-

δίου όρισμού της. Άς υποθέσωμεν ότι τας άνωτέρω τιμάς λαμβάνει ή συνάρτησις εις τά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχως και τά όποια υποθέτομεν ότι υείνται εις τό έσωτεριόν του χωρίου G . Έπειδή τό χωρίον G υπετέθη συνευτιμόν τά σημεία ταύτα δύνανται να συνδεσθώ διá μιáς τεθλασμένης γραμμής υειμένης έντός του G . Όστε διá τά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) της τεθλασμένης γραμμής ή συνάρτησις $f(x, y)$ καθίσταται ίση πρós M και m αντίστοιχως. Έπειδή δέ ή $f(x, y)$ είναι συνεχής κατά μήκος αύτης της γραμμής, θα λάβωμεν μαζί μέ τας τιμάς M και m και πάσας τας ένδιαμέσους τιμάς. Όθεν, δυνάμεθα να εύρωμεν επ' αύτης της πολυγωνικής γραμμής ένα σημείον (ξ, η) τοιούτον, ώστε δι' αύτό ή συνάρτησις να λάβωμεν την τιμήν $\frac{1}{S} \iint_G f(x, y) dx dy$, ήτοι:

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \cdot \iint_G f(x, y) dx dy.$$

§ 7. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Εις τας προηγουμένας παραγράφους έδώσαμεν τόν όρισμόν του διπλού όλοκληρώματος, τας βασικάς ιδιότητες τούτου καθώς και την συνθήκη όλουκληρωσιμότητος μιáς συναρτήσεως. Άπομένει ήδη να μελετήσωμεν την μέθοδον υπολογισμού του όλουκληρώματος μιáς όλουκληρωσίμου συναρτήσεως. πρós τούτοις διακρίνομεν δύο βασικάς περιπτώσεις ως πρós τό πεδίο όλουκληρώσεως της συναρτήσεως.

I. Τό πεδίο της όλουκληρώσεως είναι έν όρθογώνιον σχήμα.

Θεώρημα VII - 7-1 Έστω ότι ή συνάρτησις $f(x, y)$ είναι ώρισμένη και όλουκληρώσιμος επί του όρθογωνίου: $P = \{ (x, y) : a \leq x \leq b \text{ και } \gamma \leq y \leq \delta \}$. Επί πλέον δεχόμεθα ότι τό όλουκληρώμα $J(x) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$ υπάρχει διá καθε x του διαστήματος $a \leq x \leq b$. Τότε ισχύουν τά κατωδι :

α) Τό όλουκληρώμα $\int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right] dx$ τό όποϊον γράφομεν και ούτω $\int_a^b dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$ υπάρχει.

β) Επί πλέον έχουμε: $\iint_P f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_y^{\delta} f(x,y) dy$ (Θεώρημα τῶν Fubini).

Απόδειξις: θεωρούμεν μίαν τυχαῖαν διαμέρισιν τοῦ διαστήματος $[a,b]$, ἔστω $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, καὶ μίαν τυχαῖαν διαμέρισιν τοῦ διαστήματος $[y,\delta]$, ἔστω τὴν $y=y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = \delta$.

Ἐν τῶν σημείων τῆς πρώτης διαμερίσεως φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα oy καὶ ἐν τῶν σημείων τῆς δευτέρας φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα ox . Οὕτως

ἔχομεν ἐπιτύχει μίαν διαμέρισιν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου P εἰς τὰ ὀρθογώνια P_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ (βλ. Σχ. 1).

Ἐστω M_{ij} καὶ m_{ij} τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρασ τῶν τιμῶν τῆς $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ ὀρθογωνίου P_{ij} . Διὰ ἓνα σταθερὸν

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ καὶ ἓνα οἰοδήποτε $y \in [y_{j-1}, y_j]$ προφανῶς δὲ ἔχομεν:

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij} \quad (1)$$

Ἐν τῆς (1) προκύπτει:

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j \quad (2), \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

Ἐνεκα τῆς ὑποθέσεως τὸ ὁλοκλήρωμα (2) ὑπάρχει πάντοτε.

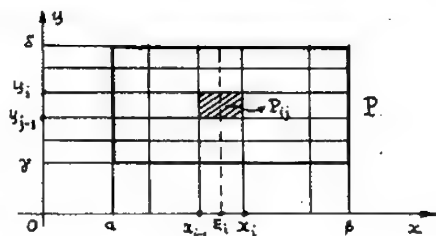
Ἀθροίζοντες τὰς (2) ἀπὸ $j=1$ ἕως $j=m$ λαμβάνομεν:

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j \quad \eta$$

$$\sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \int_y^{\delta} f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς (3) ἐπὶ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, καὶ ἀθροίζοντες ἀπὸ $i=1$ ἕως $i=n$ λαμβάνομεν:

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j \leq \sum_{i=1}^n J(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j$$



Σχ. 1

Ἡ ἔκφρασις $\sum_{i=1}^n J(\xi_i) \Delta x_i$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ Riemann τῆς συναρτήσεως $J(x)$,

τὰ δὲ $\sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta y_j$ καὶ $\sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta y_j$ εἶναι τὸ κάτω καὶ ἄνω ἄθροισμα τοῦ Darboux τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ διπλοῦν ὀλοκληρώμα.

$$\text{Συνεπῶς: } \Omega_*(\phi) \leq \sum_{i=1}^n J(\xi_i) \Delta x_i \leq \Omega^*(\phi) \quad (4)$$

Υποθέτοντες ἥδη ὅτι τὰ Δx_i καὶ Δy_j τείνουν πρὸς τὸ μηδέν ὅταν $n, m \rightarrow \infty$ (δηλ. τὰ ἔμβασά τῶν στοιχείων τῆς ϕ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν), ἔνευα τῆς ὑπάρξεως τοῦ διπλοῦ ὀλοκληρώματος $\iint_P f(x, y) dx dy$, λόγῳ τῆς (4), δὲ ἔχωμεν:

$$\sup_{\phi} \Omega_*(\phi) = \inf_{\phi} \Omega^*(\phi) = \iint_P f(x, y) dx dy = \lim_n \sum_{i=1}^n J(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b J(x) dx \quad (5)$$

Ὅθεν ὑπάρχει τὸ $\int_a^b J(x) dx$.

Ἐπὶ πλέον, λόγῳ τῶν (5), ἔχομεν:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left[\int_y^{\delta} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_y^{\delta} f(x, y) dy.$$

Παρατηρήσεις 1^η. Ἐναλλάσσοντες τὰς μεταβλητάς x καὶ y καὶ υποθέτοντες ὅτι τὸ ὀλοκληρώμα $J_1(y) = \int_a^{\delta} f(x, y) dx$ ὑπάρχει κατὰ τὴν ὁρίσιν εἰς μίαν ἀνάλογον σχέσιν τῆς μορφῆς:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_y^{\delta} \left[\int_a^{\delta} f(x, y) dx \right] dy = \int_y^{\delta} dy \int_a^{\delta} f(x, y) dx.$$

2^η/. Μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ὑπάρχουν τὰ ὀλοκληρώματα:

$$J(x) = \int_y^{\delta} f(x, y) dy \quad \text{καὶ} \quad J_1(y) = \int_a^{\delta} f(x, y) dx$$

πράγμα που συμβαίνει ὅταν ἡ $f(x, y)$ εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ ὀρθογώνιον P , τότε δυνατόν ἐστι νὰ γράψωμεν:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_y^{\delta} f(x, y) dy = \int_y^{\delta} dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

ἥτοι, ἐπιτρέπεται ἡ προειρημένη ἡ ἐναλλαγή τῶν ὁρίων ὀλοκληρώσεως.

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία καλεῖται "ὀλοκληρώσεις", ὑπὸ τὸ σύμβολον τῆς ὀλοκληρώσεως.

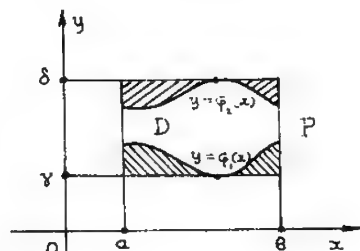
32/ Εάν $f(x,y) = \varphi(x) \cdot \sigma(y)$, τότε θα έχουμε :

$$\iint_P f(x,y) dx dy = \int_y^\delta \int_a^b \varphi(x) \sigma(y) dx = \int_y^\delta \sigma(y) dy \int_a^b \varphi(x) dx = \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \right\} \cdot \left\{ \int_y^\delta \sigma(y) dy \right\}$$

II. Τό χωρίον της ολοκληρώσεως είναι υαμπτυλόγραμμον σχήμα.

Θά υπολογίσωμεν ήδη τό διπλούν ολολήρωμα επί ενός χωρίου D, τού οποίου τό περίγραμμα είναι υαμπτυλόγραμμον σχήμα.

κατ' αρχάς περιορισόμεθα εἰς τήν ἀπλήτην περίπτω-
σιν ὅπου τό περίγραμμα τοῦ D φράσσεται ὑπό
δύο συνεχῶν υαμπτύλων μέ ἐξισώσεις $y = \varphi_1(x)$ καί
 $y = \varphi_2(x)$, ὅπου $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ καί ὑπό τῶν παραλ-
λήλων πρὸς τόν ἄξονα οy εὐθειῶν $x = a$ καί $x = b$
(βλ. Σχ. 2). Ἐπὶ πλέον ὑποθέτομεν ὅτι πᾶσα εὐθεῖα
παράλληλος πρὸς τόν ἄξονα οy τέμνει τό ἐν λόγω
περίγραμμα εἰς δύο τό πολὺ σημεία. Σχετικῶς ἰσχύει τό κατωθί θεώρημα:



Σχ. 2

Θεώρημα VII- 7-2. Ἐστω ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι ὠρισμένη καί ὁλοκλη-
ρώσιμος ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισθέντος χωρίου D καί ὅτι τό ὁλολήρωμα
 $J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$ ὑπάρχει διὰ καθε $x \in [a,b]$. Τότε ἰσχύουν τά κατωθί :

α) Τό ὁλολήρωμα $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$, ὁπλ. τό $\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$ ὑπάρχει.

β) Ἐπὶ πλέον ἔχομεν : $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$.

Ἀπόδειξις : Θετομεν $\gamma = \min \varphi_1(x)$ καί $\delta = \max \varphi_2(x)$ καί ἐν συνεχείᾳ ἐγκλωδι-
σομεν τό χωρίον D ἐντός τοῦ ὁρθογωνίου P, τό ὁποῖον ὁρίσεται ὡς ἀκολούθως :

$P = \{(x,y) : a \leq x \leq b \text{ καί } \gamma \leq y \leq \delta\}$ βλ. Σχ. 2. Θεωροῦμεν ἤδη τήν συνάρτησιν $F(x,y)$,

ἥτις ὁρίσεται ὡς ἑξῆς : $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{διὰ καθε } (x,y) \in D \\ 0 & \text{διὰ καθε } (x,y) \in P \setminus D \end{cases}$

Ἡ συνάρτησις $F(x,y)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ P , διότι πληροῖ τὰς ὑποθέσεις τοῦ προηγουμένου θεωρήματος. Πράγματι, ἐπειδὴ αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ D εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ D . Εἶναι ἡ $F(x,y)$ ἐκ ταυτότητος ἴση πρὸς τὸ μηδέν ἐπὶ τοῦ $P \setminus D$, συνεπῶς ὁλοκληρώσιμος καὶ ἐπὶ τοῦ $P \setminus D$. Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν ιδιότητα VI, §5 καὶ ἐπειδὴ τὸ σύνορον τοῦ D εἶναι μηδενικοῦ ἐμβαδοῦ ἢ $F(x,y)$ θὰ εἶναι ὁλοκληρώσιμος καὶ ἐπὶ τοῦ $D \cup \{P \setminus D\} = P$.

Προφανῶς ἔχομεν:

$$\iint_D F(x,y) dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy \quad (1)$$

καὶ
$$\iint_{P \setminus D} F(x,y) dx dy = 0 \quad (2)$$

Ὅθεν, κατὰ τὴν ιδιότητα VI, §5 καὶ λόγῳ τῶν (1) καὶ (2), ἔχομεν:

$$\iint_P F(x,y) dx dy = \iint_D F(x,y) dx dy + \iint_{P \setminus D} F(x,y) dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy + 0 \quad (3)$$

Πρὸς τούτοις διὰ καθε $x \in [a,b]$ τὸ ὁλοκληρώμα:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_y^{\delta} F(x,y) dy = \int_y^{q_1(x)} F(x,y) dy + \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} F(x,y) dy + \int_{q_2(x)}^{\delta} F(x,y) dy = \\ &= 0 + \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x,y) dy + 0 = \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x,y) dy \end{aligned} \quad (4)$$

τὸ τελευταῖον ὁλοκληρώμα ὑπάρχει λόγῳ τῆς ὑποθέσεως. Ὅθεν τὸ $J(x) = \int_y^{\delta} F(x,y) dy$ ὑπάρχει.

κατ' ἀνωλοκιδίαν θὰ ἔχωμεν:

$$\iint_P F(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_y^{\delta} F(x,y) dy \quad (5)$$

λόγῳ τῶν (3) καὶ (4), ἡ (5) δίδει:

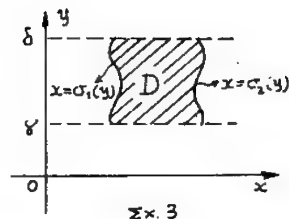
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x,y) dy \quad (6)$$

Παρατηρήσεις: 1^η/. Ἐὰν τὸ περίγραμμα τοῦ χωρίου D δίδεται ὑπὸ τῶν κα-

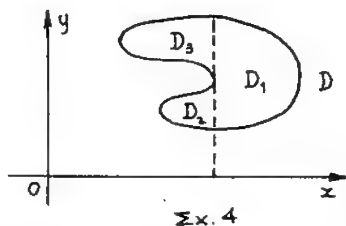
μπύλων $x = \sigma_1(y)$ και $x = \sigma_2(y)$ και των ευθειών $y = \gamma$ και $y = \delta$ (βλ. Σχ. 3) και υπό την υπόθεσιν ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_{\sigma_1(y)}^{\sigma_2(y)} f(x, y) dx$, τότε

θα έχουμε:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\sigma_1(y)}^{\sigma_2(y)} f(x, y) dx$$



23/. Εάν ο τόπος της ολοκλήρωσεως είναι τοιαύτος, ώστε αι παράλληλοι ευθείαι προς τόν άξονα οy ή οx και διερχόμεναι από τά έσωτερικά σημεία του χωρίου έχουν μέ το σύνορον του πλησίον των δύο υονά σημεία, το χωρίον έν προ- υειμένω δά υαλῆται **μή υαγονιυόγ**, έν αντιθέσει προς τά μέχρι τούδε έξετασθέντα, τά όποια υαλούν- ται **υαγονιυά** (βλ. σχ. 4). Τότε χωρίζομεν τό χω- ρίον εις τοιαύτα μέρη, ώστε νά πληρουνται αι υποθέσεις του θεωρήματος, δηλ. τό σύνορον έυάστου των τμημάτων τούτων νά τέμνεται εις δύο τό πολύ σημεία υπό των άνωτέρω ευθειών. Έν συνεχείᾳ υπολορίζομεν χωριστά έφ' έυάστου των τμημά- των του άρχιυού χωρίου τό διπλούν ολοκλήρωμα της δοθείσης συναρτήσεως. Το άθροισμα των εύρεθέντων ολοκληρωμάτων μάς δίδει τό διπλούν ολοκλήρωμα της συναρτήσεως επί του άρχιυού χωρίου. Κατωτέρω δά δώσωμεν και σχετιυόν παράδειγμα. (βλ. παράδειγμα 6^{ου}).



Παράδειγμα 1^{ου}/ Νά υπολορισθῇ τό ολοκλήρωμα $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$, όπου ο τό- πος της ολοκλήρωσεως είναι το όρθογώνιον τό οριζόμενον ούτω: $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq \frac{3}{2}\}$.

Λύσις: Είναι $\iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\int_0^1 (4 - x^2 - y^2) dx \right] dy =$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[4x - \frac{x^3}{3} - y^2 x \right]_0^1 dy = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(4 - y^2 - \frac{1}{3} \right) dy = \left(4y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} y \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{35}{8}.$$

22%. Νά υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_D xy^2 dx dy$, ὅπου ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ καὶ } 0 \leq y \leq 2\}$.

Λύσις: Ἐπειδὴ ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι τῆς μορφῆς $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \sigma(y)$, διὰ τοῦτο τὸ ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα γράφεται:

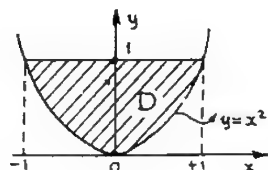
$$\iint_D xy^2 dx dy = \left(\int_0^1 x dx \right) \cdot \left(\int_0^2 y^2 dy \right) = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \cdot \left(\frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

33%. Νά υπολογισθῇ τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, ὅπου ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως περιορίζεται ὑπὸ τῶν γραμμῶν: $y = x^2$ καὶ $y = 1$.

Λύσις: Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως δίδεται ἀπὸ τὸ κατωθι Σχ. 1.

Θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y) dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{2} - x^4 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x - \frac{x^5}{5} - \frac{1}{10} x^5 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

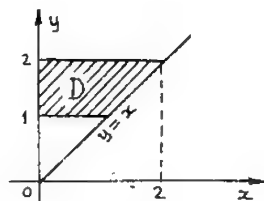


Σχ. 1.

44%. Νά υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_D x^2 y^2 dx dy$, ὅπου ὁ τόπος D ὁρίζεται ὑπὸ τῶν γραμμῶν $y = 1$, $y = 2$ καὶ $y = x$.

Λύσις: Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως δίδεται ἀπὸ τὸ ἑνάντι Σχ. 2. Θά ἔχωμεν λοιπὸν:

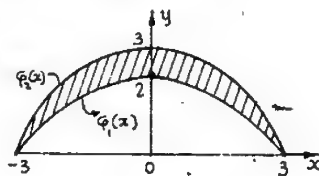
$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y^2 dx dy &= \int_1^2 dy \int_0^y x^2 y^2 dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{3} x^3 y^2 \right]_0^y dy \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 y^5 dy = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$



Σχ. 2.

55%. Νά υπολογισθῇ τὸ διπλοῦν ὁλοκλήρωμα $\iint_D x^2 y dx dy$, ὅπου ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9 \text{ καὶ } \frac{x^2 + y^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 1, y \geq 0\}$.

Λύσις: Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως δεικνύεται εἰς τὸ ἑνάντι Σχ. 3. Εἶναι δὲ $\varphi_1(x) = \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$ καὶ $\varphi_2(x) = \sqrt{9 - x^2}$.



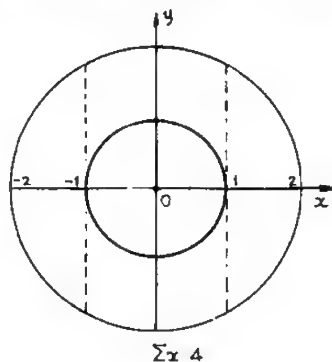
Σχ. 3.

$$\text{Οθεν, } \iint_D x^2 y \alpha x \alpha y = \int_{-3}^3 dx \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} x^2 y dy = \int_{-3}^3 dx \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{q_1(x)}^{q_2(x)} = \int_{-3}^3 \frac{5x^2(9-x^2)}{18} dx = 18.$$

68%. Να ολοκληρωθῇ ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ ἐπὶ τοῦ δαυτυλίου D ποῦ περιορίζεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν $x^2+y^2=1$ καὶ $x^2+y^2=4$.

Λύσις: Ἐπειδὴ τὸ χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως δὲν εἶναι κανονικόν, τὸ χωρίζομεν, ὡς δεικνύει τὸ ἔναντι Σχ.4, εἰς τέσσαρα κανονικὰ χωρία καὶ ἐν συνεχείᾳ ὁλοκληρώνομεν.

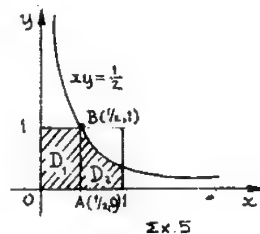
$$\begin{aligned} \text{Εἶναι } \iint_D f(x,y) dx dy &= \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dy. \end{aligned}$$



79%. Να υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $I = \iint_D x \sqrt{1-x^2} dx dy$, ὅπου τὸ χωρίον D περιλαμβάνεται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς $xy = \frac{1}{2}$ τῶν ἀξόνων ox, oy καὶ τῶν εὐθειῶν $x=1$ καὶ $y=1$.

Λύσις: Τὸ χωρίον D εἰκονίζεται εἰς τὸ κατωθί Σχ.5.

Ἡ εὐθεῖα $y=1$ τέμνει τὴν ὑπερβολὴν εἰς τὸ σημεῖον $B(\frac{1}{2}, 1)$. Διὰ τοῦ σημείου B φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν oy , ἥτις τέμνει τὸν ox εἰς τὸ σημεῖον $A(\frac{1}{2}, 0)$. Οὕτω τὸ χωρίον D ἐκχωρίσθη εἰς δύο κανονικὰ χωρία D_1 καὶ D_2 , ἐφ' ἑκάστου τῶν ὁποίων ὑπολογισομεν τὸ ὁλοκλήρωμα.



$$\begin{aligned} \text{Εἶναι } \iint_{D_1} x \sqrt{1-x^2} dx dy &= \int_0^{1/2} dx \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dy = \int_0^{1/2} x \sqrt{1-x^2} dx \int_0^1 dy \\ &= \int_0^{1/2} x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{καὶ } \iint_{D_2} x \sqrt{1-x^2} dx dy &= \int_{1/2}^1 dx \int_0^{1/2x} x \sqrt{1-x^2} dy = \int_{1/2}^1 x \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{1/2x} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} (x(1-x^2)^{1/2} + \arcsin x) \Big|_{1/2}^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

$$\text{Οθεν, } I = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\pi}{12}.$$

§8. ΣΗΜΕΙΑΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

- Μία καμπύλη $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$ καλείται *λεία*, εάν αι συναρτήσεις $\varphi(t)$ καί $f(t)$ έχουν συνεχείς παραγώγους $\varphi'(t)$, $f'(t)$ αι όποίαι δέν μηδενίζονται συγχρόνως. Μία συνεχής καμπύλη αποτελούμενη από ένα πεπερασμένον αριθμόν λείων καμπύλων καλείται *τμηματικώς λεία*.

Θεωρούμεν τό επίπεδον oxy καί ένα κλειστόν καί φραγμένον χωρίον D , του όποιου τό σύνορον είναι ή λεία καμπύλη L . Όμοίως θεωρούμεν εις τό επίπεδον $ou\upsilon$ τό κλειστόν καί φραγμένον χωρίον D^* , του όποιου τό σύνορον έστω ότι είναι ή λεία καμπύλη L^* .

Έστω ότι ό σημειαύς μετασχηματισμός του D^ επί του D οριζόμενος υπό των κάτωδι συναρτήσεων:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \sigma(u, v), \quad (u, v) \in D^* \quad (1)$$

Του άνωτέρω μετασχηματισμού υποθέτομεν ότι αι συναρτήσεις $\varphi(u, v)$, $\sigma(u, v)$ είναι συνεχείς διά τάδε $(u, v) \in D^*$ καί έχουν μεριυάς παραγώγους, ως πρός u καί v , πρώτης τάξεως συνεχείς καί επί πλέον ότι ή 'Ιακωβιανή:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} & \frac{\partial \sigma}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{διά τάδε } (u, v) \in D^*$$

Καί εάν μέν ή όρίζουσα είναι μεγαλύτερα του μηδένός ό μετασχηματισμός καλείται *ευθύς*, εάν δέ είναι μικρότερα καλείται *αντίστροφος*.

Πληρουμένων των άνωτέρω υποθέσεων (ότε εις δύο διαφορετικά σημεία του D^* αντιστοιχούν δύο διαφορετικά σημεία του D) συνεπάγεται ότι υπάρχει ό αντίστροφος μετασχηματισμός τούτου, έστω δέ ότι σ' αυτός είναι ό οριζόμενος υπό των εξισώσεων:

$$u = \varphi_1(x, y), \quad v = \sigma_1(x, y) \quad \text{διά τάδε } (x, y) \in D \quad (2)$$

Η 'Ιακωβιανή του αντίστροφου είναι:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \text{ή τις είναι } \neq 0 \quad \text{διά τάδε } (x, y) \in D.$$

*Αποδεικνύεται ότι: $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1$

Άλλα παραδείγματα μετασχηματισμών είναι τα κάτωθι:

α) Η παράλληλος μεταφορά: $x = u + h$, $y = v + k$.

β) Η Στροφή: $x = u \cos \theta - v \sin \theta$, $y = u \sin \theta + v \cos \theta$.

γ) Ο γραμμικός μετασχηματισμός: $x = au + bv$, $y = cu + dv$, με $ad - bc \neq 0$.

- Έστω ότι μας δίδεται μια λεία καμπύλη (ή αποτελούμενη από πεπερασμένον πλήθος λείων τόξων) Γ^* επί του πεδίου D^* , ήτοι η καμπύλη:

$$u = u(t), v = v(t), \text{ διά } a \leq t \leq b$$

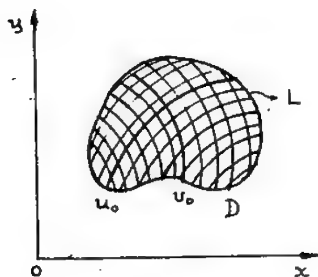
Ο μετασχηματισμός (1) μετασχηματίζει τούτην εἰς καμπύλην $x = \varphi(u(t), v(t)) = \chi(t)$, $y = \sigma(u(t), v(t)) = \psi(t)$, ἥτις εἶναι λεία ἢ τμηματικῶς λεία,

$$\left. \begin{aligned} \text{διότι αἱ παράγωγοι: } \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\partial \sigma}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \sigma}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \end{aligned} \right\}$$

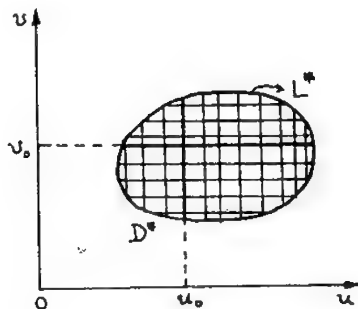
υπάρχουν, εἶναι συνεχεῖς μὴ μηδενιζόμεναι συγχρόνως.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Τὸ σύνορον L^* τοῦ D^* μετασχηματίζεται μέσῳ τῶν (1) εἰς τὸ σύνορον L τοῦ D .



Σχ. 1 (α)



Σχ. 1 (β)

Ἐάν θεωρήσωμεν μίαν εὐθείαν $u = u_0$ εἰς τὸ πεδίον D^* αὕτη μετασχηματίζεται, μέσῳ τῶν (1), εἰς τὴν λείαν καμπύλην τοῦ oxy , ἥτις ἔχει τὴν ἀναλυτικὴν παράστασιν

$$x = \varphi(u_0, v), y = \sigma(u_0, v) \quad (3)$$

ὅπου τὸ v θεωρεῖται παράμετρος (βλ. Σχ. 1 (α) καὶ 1 (β)).

Εάν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεϊαν $u = u_0$ εἰς τὸ D^* αὕτη μετασχηματίζεται, μέσῳ τῶν (1), εἰς τὴν λείαν καμπύλην τοῦ oxy , ἥτις ἔχει τὴν ἀναλυτικὴν παράστασιν:

$$x = \varphi(u, u_0), \quad y = \sigma(u, u_0) \quad (4)$$

ὅπου τὸ u θεωρεῖται παράμετρος (βλ. Σχ. 1 (α) καὶ 1 (β)).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ὁ μετασχηματισμός (1) εἶναι γραμμικός ἢ παράλληλος μεταφορά, αἱ καμπύλαι αἱ ἔχουσαι ἑξισώσεις τὰς (3) ἢ (4) εἶναι ὁμοίως εὐθεῖαι γραμμαί.

Αἱ καμπύλαι αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν ἑξισώσεων (3) καὶ (4) αἱ υεῖμεναι εἰς τὸ χωρίον D καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ἀπεικονίσεις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τοὺς ἄξονας ou , ov (καὶ υεμένων ἐντὸς τοῦ D^*), ὑπὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) καλοῦνται συντεταγμέναι γραμμαί (u -γραμμαί, v -γραμμαί).

Ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω αἱ ἀπεικονίσεις:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \sigma(u, v)$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ὑπάρχει μία καμπύλη διδομένη ὑπὸ τῶν ἑξισώσεων (3) διερχομένη διὰ τοῦ σημείου (x, y) τοῦ D , ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν σταθερὰν τιμὴν τοῦ u καὶ μία καμπύλη διδομένη ὑπὸ τῶν ἑξισώσεων (4), ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν σταθερὰν τιμὴν τοῦ v . Ὅθεν, αἱ ποσότητες u καὶ v δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῶν ἀνήκοντων εἰς τὸ χωρίον D (δηλ. μὲ ἑκαστον ζεύγος u καὶ v προσδιορίζεται πλήρως ἓνα σημεῖον τοῦ D). Αἱ συντεταγμέναι καμπύλαι αἱ διδόμεναι ὑπὸ τῶν (3) καὶ (4), αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας ἐνός σημείου τοῦ D^* , εἶναι, ἐν γένει, καμπυλόγραμμοι. αἱ δὲ ποσότητες u καὶ v καλοῦνται καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ χωρίου D .

Οὕτω αἱ μεταβληταί u καὶ v δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὑπὸ τὴν διπλὴν ἔννοιαν: ἢ ὡς ἐνός ὅτι εἶναι αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ χωρίου D^* καὶ ἢ ὡς ἑτέρου ὡς αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ χωρίου D . (βλ.

Σχ. 1_α καὶ 1_β).

Συνεπῶς πᾶσα ἑξίσωσις τῆς μορφῆς $\varphi(u, v) = 0$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία ἑξίσωσις προσδιορίζουσα μία καμπύλην (C) υεμένην εἰς τὸ χωρίον D^* καὶ ἐπί-

σης ως μία εξίσωση (εις καρτεσιανούς συντεταγμένους) μιας γραμμής (y) του D , ήτις είναι η εικόνη της (C) υπό του μετασχηματισμού (1).

Πολικαί συντεταγμέναι:

Ὡς γνωστόν ἡ σχέσις ἥτις ὑφίσταται μεταξὺ τῶν καρτεσιανῶν καὶ πολικῶν συντεταγμένων εἶναι ἡ κατωθί:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad \text{μέ } \rho \geq 0 \text{ καὶ } 0 \leq \theta < 2\pi \quad (1),$$

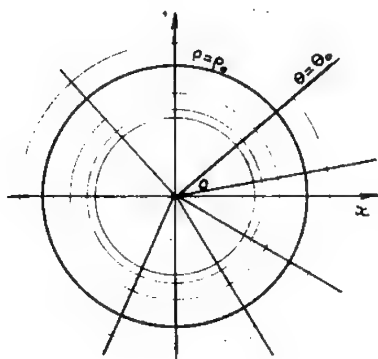
ὅπου ὁ πόλος συμπίπτει μέ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

Ἡ ἰαμβιβαντή ὀρίδουσα τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ εἶναι:

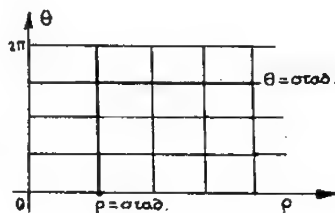
$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \neq 0$$

Αἱ συντεταγμέναι γραμμαὶ τοῦ πολικοῦ συστήματος διὰ $\theta = \text{σταθ.}$ καὶ ρ μεταβλητὸν εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῆς ἀρχῆς 0. Ἐνῶ διὰ $\rho = \text{σταθ.}$ καὶ θ μεταβλητὸν εἶναι ὁμόκεντροι περιφέρειαι (βλ. Σχ. 2).

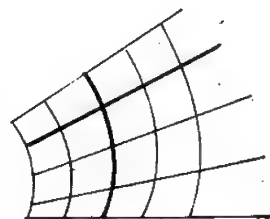
Ἡ ἀπειριόνισις (1) μετασχηματίζει τὴν ἡμι-ῥωρίδα $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ εἰς ὁλόκληρον τὸ ἐπίπεδον (βλ. Σχ. 3_a καὶ 3_b). Αἱ ἀνωτέρω ἀπειριόνισεις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι ἐντὸς τοῦ σημείου $x=0, y=0$.



Σχ. 2



Σχ. 3_a



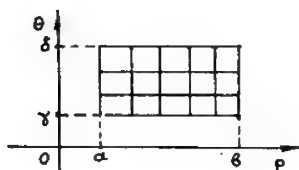
Σχ. 3_b

Παράδειγμα: Ἐστω ἓνα ὀρθογώνιον χωρίον εἰς τὸ ρ, θ -ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὀρί-

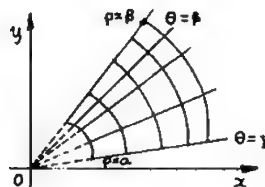
Σέται υπό των σχέσεων:

$$0 < \alpha \leq \rho \leq \beta, \quad 0 \leq \gamma \leq \theta \leq \delta < 2\pi.$$

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \cos \theta$ μετασχηματίζει τὸ ἀνωτέρω ὀρθογώνιον εἰς ἕνα δαυτυλοειδῆ τομέαν τοῦ ἐπιπέδου oxy (βλ. Σχ. 4_α καὶ 4_β).



Σχ. 4_α



Σχ. 4_β

§ 9. ΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΕΙΣ ἘΝΑ ΔΙΠΛΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

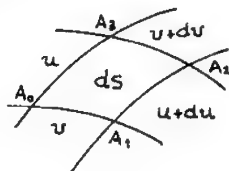
Ἦδη θὰ θεώσωμεν τὸ γενικὸν πρόβλημα τῆς ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν εἰς ἕνα διπλὸν ὁλοκληρώμα.

Θεώρημα VII-9-1. Ἐστω $x = \varphi(u, v)$, $y = \sigma(u, v)$ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπειρο-
νισις με συνεχεῖς μεριμὰς παραγώγους πρώτης τάξεως τοῦ χωρίου D^* τοῦ ἐπι-
πέδου $ou v$ εἰς τὸ χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου oxy . Ὑποθέτομεν ὅτι τὴ ἰαυωθιανή

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0, \quad \text{τότε} \quad \text{ἔμβ. } D = S = \iint_D x dy = \iint_{D^*} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (1)$$

Τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος θὰ δώσωμεν βραδύτερον μιαν αὐστηροτέραν ἀπό-
δειξιν στηριζομένη εἰς τὸν τύπον τοῦ Green.

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy δύο ζεύγη συντεταγμένων
γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν τῷ μὲν πρώτῳ ζεύγῳ
εἰς τὰς τιμὰς $u, u+du$ τοῦ u , τὸ δὲ δεύτερον ζεύγος
εἰς τὰς τιμὰς $v, v+dv$ τοῦ v . Αἱ γραμμαὶ αὗται τέ-
μνουν τὸ χωρίον D κατὰ ἕνα ἀπειροστὸν στοιχειῶδες
χωρίον τὸ $A_0 A_1 A_2 A_3$ (βλ. Σχ. 1). Αὐτὸ τὸ στοιχειῶδες



Σχ. 1

χωρίον εἶναι ἕνα καμπυλόγραμμα παραλληλόγραμμα τὸ ὁποῖον δύναται νὰ
θεωρηθῇ κατὰ προσέγγισιν ὡς ἕνα κοινὸ παραλληλόγραμμα. Αἱ κορυφαὶ τοῦ

έν λόγω παραλληλοπαράμμου ως πρὸς τὸ σύστημα oxy ἔχουν συντεταγμένες:

$$A_0(\varphi(u,v), \sigma(u,v)), A_1(\varphi(u+du, v), \sigma(u+du, v))$$

$$A_2(\varphi(u+du, v+dv), \sigma(u+du, v+dv)), A_3(\varphi(u, v+dv), \sigma(u, v+dv)).$$

Εἶναι δὲ:

$$\varphi(u+du, v) = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot du + \dots = x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \dots$$

$$\sigma(u+du, v) = \sigma(u, v) + \frac{\partial \sigma}{\partial u} \cdot du + \dots = y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \dots$$

$$\varphi(u+du, v+dv) = \varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \dots = x + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \dots$$

$$\sigma(u+du, v+dv) = \dots = y + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \dots$$

$$\varphi(u, v+dv) = \dots = x + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \dots$$

$$\sigma(u, v+dv) = \dots = y + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \dots$$

Τὸ ἔμβαδὸν ds λοιπὸν τοῦ στοιχειώδους αὐτοῦ παραλληλοπαράμμου θὰ εἶναι ὡς γνωστὸν ἐν τῇ Ἀναλυτικῇ Γεωμετρίᾳ προσεγγιστικῶς ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς ἀντι-παραλλήλου ὁριζούσης:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + \frac{\partial x}{\partial u} du & y + \frac{\partial y}{\partial u} du & 1 \\ x + \frac{\partial x}{\partial v} dv & y + \frac{\partial y}{\partial v} dv & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du dv = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} du dv$$

$$\text{Εἶναι λοιπὸν: } S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} ds = \iint_{D^*} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv.$$

Παρατηρήσεις 1^η/. Ἐάν θεωρήσωμεν τὰς πολικὰς συντεταγμένες $x = \rho \sin \theta$,

$y = \rho \eta \mu \theta$, $\rho \geq 0$ καὶ $0 \leq \theta < 2\pi$, αἱ συντεταγμέναι

γραμμαιὶ $\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_0 + d\rho$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_0 + d\theta$ τέμνουν

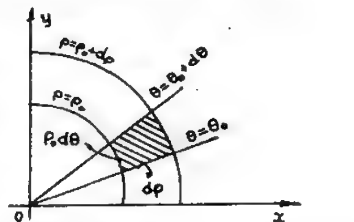
τὸ ἐπίπεδον oxy κατὰ ἓνα ἀπειροστόν "ὀρθογώνιον",

τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ εἶναι $d\rho$ καὶ $\rho_0 d\theta$ (βλ. Σκ. 2).

Ὡς πρῶτον εἶναι: $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho > 0$

Ὅθεν, τὸ ἔμβαδὸν S τοῦ χωρίου D εἰς πολικὰς συντεταγμένες εἶναι:

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| d\rho d\theta = \iint_{D^*} \rho d\rho d\theta \quad (1), \text{ ὅπου } D^* \text{ εἶναι τὸ πεδῖον μεταβολῆς τῶν } \rho \text{ καὶ } \theta.$$



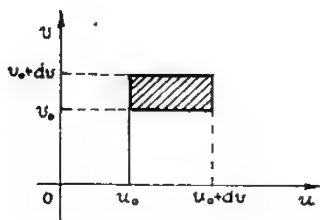
Εστω ότι το χωρίον D^ φράσσεται υπό των ακτίνων $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ και της καμπύλης $\rho = \rho(\theta)$. Όθεν ο τύπος (1) γράφεται:

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{\rho(\theta)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta$$

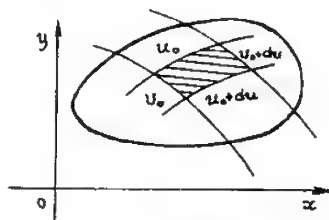
ήτοι: ο γνωστός τύπος όστις δίδει το έμβαδόν του χωρίου εις πολικώς συντεταγμένας.

\rightarrow 29. Ο τύπος $ds = \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$ γεωμετρίως έρμηνεύεται ως άμολούδωσ:

Εάν θεωρήσωμεν το άπειροστόν όρθογώνιον επί του συστήματος ου υ μέ πλευράς τας ευθείας $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$ (βλ. Σχ. 3α) τούτο μετασχηματίζεται



Σχ. 3α



Σχ. 3β

Σεταί υπό των τύπων $x = \varphi(u, v)$, $y = \sigma(u, v)$ εις ένα καμπυλόγραμμον παραλληλόγραμμον (βλ. Σχ. 3β) έχον έμβαδόν: $\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$.

• Άλλαγή των μεταβλητών εις τό όλουλήρωμα $\iint_D f(x,y) dx dy$

*Ας θεωρήσωμεν τό όλουλήρωμα:

$$\iint_D f(x,y) dx dy \quad (1)$$

όπου τό χωρίον της όλουλήρώσεως D είναι φραγμένον υπό μιᾶς λείας καμπύλης L και ή συνάρτησις $f(x,y)$ είναι συνεχής παντού επί του χωρίου D ή η $f(x,y)$ είναι φαρμένη και συνεχής επί του D εντός ενός συνόλου έχοντος έμβαδόν μηδενίον.

Εστω $x = \varphi(u, v)$, $y = \sigma(u, v)$ μια άμφιμονοσήμαντος άπειμόνισις μεταξύ των χωρίων D και D^ και έστω ο. ή άνωτέρω άπειμόνισις ίκανοποιεί τας συνθήκας του θεωρήματος VII-9-1, ίνα ισχύη ο τύπος (1) αυτού.

*Ευφράδομεν τό χωρίον D εις καμπυλόγραμμάς συντεταγμένας, πρὸς τούτοις

χωρίζομεν τὸ χωρίον D^* εἰς τμήματα D_p^* (ὑπο-χωρία) δι' ἑνὸς συστήματος τμηματικῶς λείων καμπύλων. Αἱ ἀντίστοιχοι τμηματικῶς λείαι καμπύλαι χωρίζουν τὸ χωρίον D εἰς τμήματα D_p με' ἀντίστοιχα ἔμβασά ΔS_p . Ἐκλέγομεν ἓνα αὐθαίρετον σημεῖον (x_p, y_p) εἰς ἕκαστον τμήμα D_p καὶ σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα τοῦ Riemann:

$$\sum_{p=1}^n f(x_p, y_p) \Delta S_p \quad (2)$$

ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα (1).

Ἐφαρμόσομεν τὸν τύπον (1) τοῦ θεωρήματος VIII - 9-1, δι' ἕκαστον ὑπο-χωρίον D_p τοῦ D καὶ ἔχομεν:

$$\Delta S_p = \iint_{D_p^*} \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (3)$$

Ἄς συμβολίσωμεν διὰ $J(u, v)$ τὴν ὀρίζουσαν $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, οὕτω ἡ (3) γράφεται:

$$\Delta S_p = \iint_{D_p^*} |J(u, v)| du dv \quad (4)$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς §5, ἰδιότης VIII ἔχομεν:

$$\iint_{D_p^*} |J(u, v)| du dv = |J(u_p^*, v_p^*)| \Delta S_p \quad (5)$$

ὅπου ΔS_p εἶναι τὸ ἔμβασόν τοῦ ὑπο-χωρίου D_p^* .

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν:

$$\Delta S_p = |J(u_p^*, v_p^*)| \Delta S_p \quad (6)$$

Ἡ ἔκφρασις (2), λόρῳ τῆς (6), γράφεται:

$$\sum_{p=1}^n f(x_p, y_p) |J(u_p^*, v_p^*)| \Delta S_p \quad (7)$$

Τὸ σημεῖον (x_p, y_p) ἔξελεῖται ἐντὸς τοῦ D_p αὐθαίρετως, συνεπῶς δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$x_p = \varphi(u_p^*, v_p^*) \text{ καὶ } y_p = \sigma(u_p^*, v_p^*)$$

ὅπλ. ἐλάβομεν ὡς (x_p, y_p) τὸ σημεῖον τοῦ D_p ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον (u_p^*, v_p^*) τοῦ D_p^* . Συνεπῶς τὸ ἄθροισμα (7) γράφεται:

$$\sum_{p=1}^n f(\varphi(u_p^*, v_p^*), \sigma(u_p^*, v_p^*)) |J(u_p^*, v_p^*)| \Delta S_p \quad (8)$$

Τό άθροισμα (8) δέν είναι τίποτ' άλλο ειμή τό άθροισμα τού Riemann τού όλο-
υλητηρώματος :

$$\iint_{D^*} f(\varphi(u,v), \sigma(u,v)) |J(u,v)| du dv \quad (9)$$

Έν τών (2) καί (8) λαμβάνομεν :

$$\sum_{p=1}^n f(x_p, y_p) \Delta S_p = \sum_{p=1}^n f(\varphi(u_p^*, v_p^*), \sigma(u_p^*, v_p^*)) \cdot |J(u_p^*, v_p^*)| \Delta S_p \quad (10)$$

Έάν ήδη θεωρήσωμεν ότι, ή μέγιστη τών διαμέτρων $\delta(D_p^*)$ τών στοιχείων τής διαμερί-
σεως επί τού χωρίου D^* τείνει πρós τό μηδέν, τότε καί πās αι διάμετροι $\delta(D_p)$ τών
αντιστοιχών στοιχείων τού χωρίου D επίσης τείνουν πρós τό μηδέν.

Λαμβάνοντες τά όρια άμφοτέρων τών μελών τής ισότητας (10) τού ηξο καί μέ
 $\max_{1 \leq p \leq n} \delta(D_p^*) \rightarrow 0$, τότε θα λάβωμεν τήν ισότητα τών αντιστοιχών όλουτηρωμάτων,
ήτοι :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} f(\varphi(u,v), \sigma(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$$

Έν τών άνωτέρω έπεται τό θεώρημα :

Θεώρημα VIII-9-2. Έστω τό όλουτήριομα $\iint_D f(x,y) dx dy$, όπου τό χωρίον D έχει
σύνορον μίαν τμηματιuώς λείαν uαμπύλην. Έστω $x = \varphi(u,v)$, $y = \sigma(u,v)$, $(u,v) \in D^*$
μία άμφιμονοσήμαντος άπειuόνις μεταξύ τών χωρίων D καί D^* καί ότι αι
συναρτήσεις $x = \varphi(u,v)$, $y = \sigma(u,v)$ έχουν μεριuάς παραγώγους α^α τάξεως συνεχείς μέ' έα-
uωβιανή $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$, τότε : $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} f(\varphi(u,v), \sigma(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv$.

Παρατήρησις : Ό τύπος τού άνωτέρω θεωρήματος εις τήν περίπτωση τών πο-
λιuών συντεταγμένων $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \eta \theta$, $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ πίνεταί :

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \sin \theta, \rho \eta \theta) \rho d\rho d\theta, \text{ διότι } \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho, \theta)} \right| = \rho.$$

Παραδείγματα 15 Ηά ύποδοχισθι τό διηλoύν όλουτήριομα : $\iint_D (y-x) dx dy$, όπου D

είναι το χωρίον του επιπέδου τό περιυλειόμενον υπό των εϋθειών :

$$y=x+1, \quad y=x-3, \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}, \quad y=-\frac{1}{3}x+5.$$

Λύσις: Ὁ ἀπ' εϋθείας ὑπολογισμός τοῦ ἀνωτέρω ὀλουληρώματος παρουσιάζει ἀρυετὰς πράξεις, ἀλλὰ διὰ μιᾶς καταλλήλου ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν δυνάμεθα νά τό ἀναγῶγμεν εἰς ἓν ἄλλο ὀλουληρώμα, τοῦ ὁποίου τό χωρίον τῆς ὀλουληρώσεως εἶναι ἓν ὀρθογώνιον.

Πρός τούτοις θέτομεν:

$$u=y-x \quad \text{καί} \quad v=y+\frac{1}{3}x. \quad (1)$$

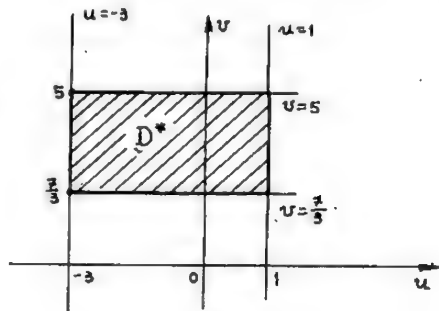
Δί ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (1) λαμβάνομεν:

$$x=-\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}v \quad \text{καί} \quad y=\frac{1}{4}u+\frac{3}{4}v \quad (2)$$

$$\text{Εἶναι δὲ } J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Ἄρυει νά εϋρωμεν τό σύνορον τοῦ χωρίου D^* . Πρός τούτοις αἱ εϋθεῖαι $y=x+1$ καί $y=x-3$ μετασχηματίζονται διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (1) εἰς τὰς εϋθείας $u=1$ καί $u=-3$ τοῦ συστήματος (βλ. Σχ.1). Ὀμοίως αἱ εϋθεῖαι $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ καί $y=-\frac{1}{3}x+5$ ἔχουν ὡς ἐξ ὧν τὰς εϋθείας $v=\frac{7}{3}$, $v=5$.

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τό ἀρχικόν χωρίον D ἔχει μετασχηματισθῇ εἰς ἓν ὀρθογώνιον χωρίον D^* εἰς τό ὁποῖον ἡ ὀλουληρώσις εἶναι εϋυολος.



Σχ.1

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\begin{aligned} \iint_D (y-x) dx dy &= \iint_{D^*} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \cdot |J| du dv \\ &= \iint_{D^*} u \cdot \frac{3}{4} \cdot du dv = \frac{3}{4} \int_{\frac{7}{3}}^5 dv \left(\int_{-3}^1 u du \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{u^2}{2} \right)_{-3}^1 dv = -8. \end{aligned}$$

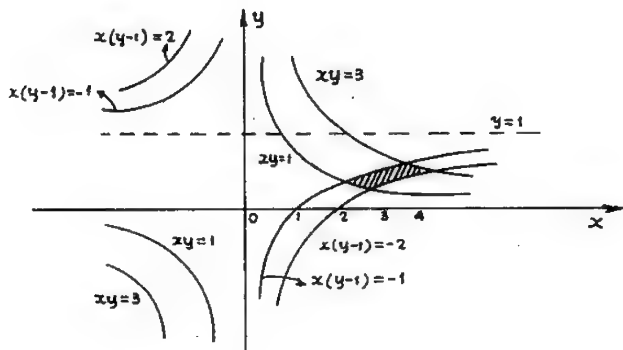
25/ Να υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_D x dx dy$, ὅπου τὸ χωρίον D περιλαμβάνεται ὑπὸ τῶν καμπύλων $x(1-y)=1$, $x(1-y)=2$, $xy=1$ καὶ $xy=3$.

Λύσις: θέτομεν $u=x(1-y)$ καὶ $v=xy$. (1) Ἐν τῶν (1) λαμβάνομεν:

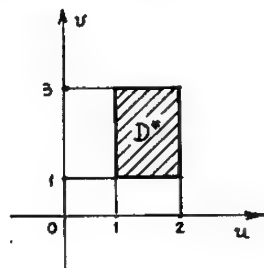
$$x=u+v, \quad y=\frac{v}{u+v} \quad (2)$$

$$\text{Εἶναι δὲ } J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{u+v}.$$

Τὸ χωρίον D τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω καμπύλων δίδεται ὑπὸ τοῦ Σχ. 2(α). Τοῦτο δὲ μετασχηματίζεται ὑπὸ τῶν (2) εἰς τὸ ὀρθογώνιον χωρίον D^* τὸ περιοριζόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν $u=1$, $u=2$, $v=1$, $v=3$ (βλ. Σχ. 2(β)).



Σχ. 2(α)



Σχ. 2(β)

$$\text{Ἔχομεν λοιπόν: } \iint_D x dx dy = \iint_{D^*} (u+v) \cdot |J| du dv =$$

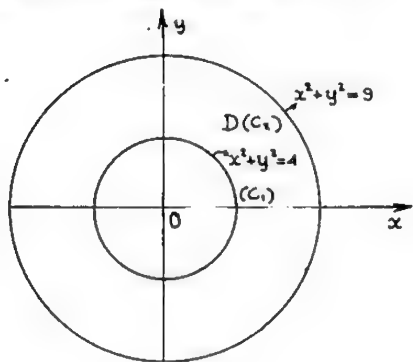
$$= \iint_{D^*} (u+v) \cdot \frac{1}{u+v} du dv = \int_1^2 du \int_1^3 dv = 2.$$

35/ Να υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, ὅπου τὸ χωρίον D περιλαμβάνεται ὑπὸ τῶν περιφερειῶν: $x^2+y^2=4$ καὶ $x^2+y^2=9$.

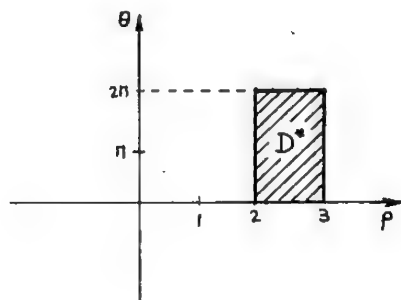
Λύσις: Ἐυτεροῦμεν ἀλλοτρίαν τῶν μεταβλητῶν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς πολικῶν συντεταγμένων. Πρὸς τούτοις θέτομεν:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \quad r>0, \quad 0\leq\theta<2\pi.$$

Είναι δὲ ὡς γνωστόν, $\left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| = \rho > 0$. Τὸ χωρίον D (βλ. Σχ. 3_α) μετασχηματίζεται εἰς τὸ χωρίον D^* (βλ. Σχ. 3_β).



Σχ. 3_α



Σχ. 3_β

Πράγματι, δι' ἀντιμεταστάσεως εἰς τὰς ἐξισώσεις τῶν περιφερειῶν (C_1) καὶ (C_2) τῶν πολικῶν συντεταγμένων λαμβάνομεν $\rho^2 = 4$, ἔξ ἧς $\rho = 2$ καὶ $\rho^2 = 9$, ἔξ ἧς $\rho = 3$. Τὸ δὲ θ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 2π . Ὅθεν, ὁ κυκλικὸς δακτύλιος D μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον D^* τοῦ Σχήματος 3_β.

$$\text{Ὅθεν ἔχομεν: } \iint_D \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = \iint_{D^*} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} \right| \, d\rho \, d\theta$$

$$= \iint_{D^*} \rho \cdot \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^3 \rho^2 \, d\rho = 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_2^3 = 2\pi \cdot \frac{19}{3} = \frac{38\pi}{3}.$$

4^ο/ Νὰ υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ Poisson: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$.¹⁾

Λύσις: Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος θὰ γίνη μὲ τὴν βοήθειαν τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων, καθότι δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν διὰ στοιχειωδῶν συναρτήσεων τὸ ἀόριστον ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως e^{-x^2} .

1) Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ Poisson παίζει ἀπουδαιότατον ρόλον εἰς τὴν θεωρίαν τῶν πιθανοτήτων καὶ τὴν Στατιστικὴν.

Πρός τούτοις θέτουμε:

$$I_R = \iint_{K_R} e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad (1) \quad \text{όπου } K_R \text{ είναι ο κύκλος } x^2+y^2 \leq R^2.$$

Με την βοήθειαν τῶν πολικῶν συντεταγμένων τὸ I_R μετασχηματίζεται εἰς τὸ:

$$I_R = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-R^2} \right) d\theta = \pi (1 - e^{-R^2}) \quad (2)$$

Τὸ τετράγωνον $T_R = \{(x, y) : -R \leq x \leq R \text{ καὶ } -R \leq y \leq R\}$ περιέχει τὸν κύκλον $\{(x, y) : 0 \leq \rho \leq R\}$ καὶ περιέχεται εἰς τὸν κύκλον $\{(x, y) : 0 \leq \rho \leq 2R\}$.

Ἐξ ἄλλου ἡ ἀβουλήρη πηλὴ συνάρτησις $e^{-x^2-y^2}$ εἶναι > 0 .

Ὅθεν, λόγῳ τῆς (2), θὰ ἔχωμεν:

$$\pi (1 - e^{-R^2}) = I_R \leq \iint_{-R}^{+R} \left\{ \int_{-R}^{+R} e^{-x^2-y^2} dy \right\} dx \leq I_{2R} = \pi (1 - e^{-4R^2})$$

$$\text{Εἶναι ὅμως: } \int_{-R}^{+R} \left\{ \int_{-R}^{+R} e^{-x^2-y^2} dy \right\} dx = \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} \left\{ \int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy \right\} dx = \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\text{Ἔχομεν λοιπόν: } \pi (1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi (1 - e^{-4R^2}) \quad (3)$$

ὑποθέτομεν ὅτι τὸ $R \rightarrow +\infty$, τότε ἐκ τῆς διπλῆς ἀνισότητος (3) προκύπτει ὅτι:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi, \quad \text{διότι } \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R^2} = 0.$$

$$\text{Ἀρα: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

§ 10. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

I. Ὑπολογισμὸς ἐπιπέδων Ἐμβαδῶν. Ὡς γνωστόν, τὸ ἔμβασόν S τοῦ ἐπιπέδου χωρίου D ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου oxy , τοῦ ὁποίου τὸ σύνορον εἶναι ἡ τμηματικῶς λεία καμπύλη L , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$S = \iint_D dx dy \quad (1)$$

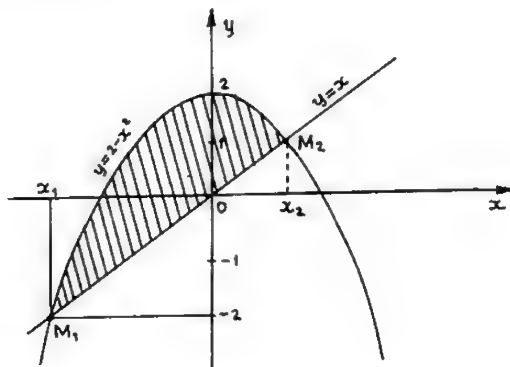
Ἐὰν τὸ χωρίον D φράσσεται ὑπὸ τῶν καμπυλῶν $y = \varphi_1(x)$ καὶ $y = \varphi_2(x)$, ὅπου $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ διὰ πάσας $x \in [a, b]$ καὶ τῶν εὐθειῶν $x = a$ καὶ $x = b$ καὶ ἐπὶ πλέον τὸ σύνορόν του τέμνεται ὑπὸ πάσης εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν

Άξονα oxy εἰς δύο τό ποσὴ σημεία, τότε ὁ τύπος (1) καθίσταται (βλ. § 6, II).

$$S = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx.$$

Παράδειγμα: Νά υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον περιυφίεται ὑπὸ τῶν καμπύλων: $y=2-x^2$, $y=x$.

Λύσις: Προσδιορίζομεν τὰ σημεία τομῆς τῶν δοθεισῶν καμπύλων (βλ. Σχ. 1). Πρὸς τοῦτοις θέτομεν $x=2-x^2$, ἐξ ἧς $x_1=-2$ καὶ $x_2=1$. Ὅθεν τὰ σημεία τομῆς εἶναι $M_1(-2,-2)$ καὶ $M_2(1,1)$.



Σχ. 1

Τὸ ζητούμενον ἔμβαδὸν θὰ εἶναι λοιπὸν:

$$S = \int_{-2}^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2-x^2-x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{27}{6}.$$

II. Υπολογισμὸς ὀγκῶν: Εἰς τὴν § 5 εἶδομεν ὅτι ὁ ὀγκὸς V ἑνὸς στερεοῦ τὸ ὁποῖον περιυφίεται ὑπὸ ἑνὸς τμήματος ἐπιφανείας E μὲ ἐξίσωσιν $z=f(x,y)$, ὅπου $f(x,y) \geq 0$, τοῦ ἐπιπέδου oxy , τὴν προβολὴν D αὐτοῦ τοῦ τμήματος ἐπὶ τῷ oxy καὶ ἀπὸ τὴν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν πού προβάλλει τὸ περίγραμμα τοῦ τμήματος E εἰς τὸ σύνορον τοῦ D , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$V = \iint_D f(x,y) dx dy \quad (1)$$

Εάν ήδη το στερεόν, του οποίου ζητούμεν τον όγκον, περιορίζεται άνω υπό της επιφανείας $z = \phi_2(x,y) \geq 0$ και κάτω υπό της επιφανείας $z = \phi_1(x,y) \geq 0$ και αι προβολαί αύτων των δύο επιφανειών επί του οαυ είναι το αυτό χωρίον D , τότε ο όγκος του στερεού δά ισούται προς την διαφοράν των όγκων των δύο «υλινδριδίων» στερεών.

$$\text{Ὅθεν: } V = \iint_D \phi_2(x,y) dx dy - \iint_D \phi_1(x,y) dx dy = \iint_D [\phi_2(x,y) - \phi_1(x,y)] dx dy.$$

Ὁ άνωτέρω τύπος ευλόως διαπιστοῦται ὅτι, ισχύει και ὅταν αι συναρτήσεις $\phi_2(x,y)$ και $\phi_1(x,y)$ είναι συνεχείς ικανοποιούσαι την σχέσηιν $\phi_2(x,y) \geq \phi_1(x,y)$.

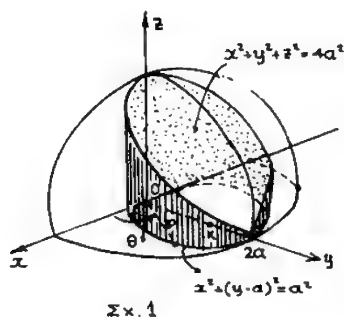
Παρατήρησις: Εάν η $f(x,y)$ αλλάσῃ σημείον επί του D , τότε χωρίσωμεν τὸ D εἰς δύο χωρία D_1 και D_2 εἰς τρόπον, ὥστε $f(x,y) \geq 0$ ἐπὶ τοῦ D_1 και $f(x,y) \leq 0$ ἐπὶ τοῦ D_2 . Ἐν συνεχείᾳ υπολογίσωμεν τὸ διπλοῦν ὁλοκληρώμα $J_1 = \iint_{D_1} f(x,y) dx dy$, ὅπου $f(x,y) \geq 0$ και τὸ ὅποιον παριστᾷ τὸν ὅγκον τοῦ στερεοῦ ὑπεράνω τοῦ οαυ. Ὁμοίως τὸ $J_2 = \left| \iint_{D_2} f(x,y) dx dy \right|$ παριστᾷ τὸν ὅγκον τοῦ στερεοῦ τὸ ὅποιον εὐρίσκεται κάτωθεν τοῦ οαυ.

Ὅθεν, τὸ $J_1 + J_2$ παριστᾷ τὸν ὅγκον τοῦ στερεοῦ ποῦ περιλαμβάνεται ὑπὸ της ἐν λόγω επιφανείας.

Παράδειγμα: Νά υπολογισθῇ ὁ ὅγκος V τοῦ στερεοῦ τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ και τοῦ υλινδρου $x^2 + y^2 - 2ay = 0$.

Λύσις: Δυνάμεθα νά λάβωμεν ὡς χωρίον της ὁλοκληρώσεως τὴν βάση τοῦ υλινδρου $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, δηλ. τὸν κύκλον κέντρου $(0,a)$ και ἀκτίνος a . Ἡ δὲ εἰσώσις τοῦ ἐν λόγω κύκλου γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν: $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ (βλ. Σκ. 1).

Υπολογίσωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ζητουμένου ὅγκου V (τὸ ἥμισυ τούτου παρίσταται



Σκ. 1

εις τό Σχ. 1). Θά λάβωμεν λοιπόν ως χωρίον ολοκληρώσεως τό ημικύβλιον τό ὀρι-
ζόμενον ἀπό τὰς ἐξισώσεις:

$$x = \varphi_1(y) = 0, \quad x = \varphi_2(y) = \sqrt{2ay - y^2}$$

$$y = 0 \quad \text{καὶ} \quad y = 2a.$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἄνω μέρους τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι:

$$z = f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}.$$

Ὅθεν, τό τέταρτον τοῦ ὅρου τοῦ στερεοῦ εἶναι:

$$\frac{1}{4} V = \int_0^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} \sqrt{4a^2-x^2-y^2} dx \right) dy.$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ ἄνωτέρω ολοκληρώματος χρησιμοποιοῦμεν πολικὰς
συντεταγμένας: $x = \rho \sin \theta, y = \rho \eta \mu \theta, \rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐν λόγῳ ἡμιπεριφερείας εὐρί-
σκεται ὡς ἀκολούθως:

$$\text{Εἶναι } x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{καὶ} \quad y = \rho \eta \mu \theta.$$

Δι' ἀντιδιαστάσεως εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς περι-
φερείας εὐρίσκειμεν $\rho = 2a \eta \mu \theta$. Ἄρα εἶ νά προσ-
διορίσωμεν τὰ χωρία μεταβολῆς τῶν ρ καὶ θ .

Ὡς ἐμφαίνεται καὶ ἐκ τοῦ Σχ. 2 τό $0 \leq \rho \leq 2a$

καὶ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ἡ ολοκληρωτέα συνάρτησις εἰς πολικὰς συντεταγμένας γίνεται:

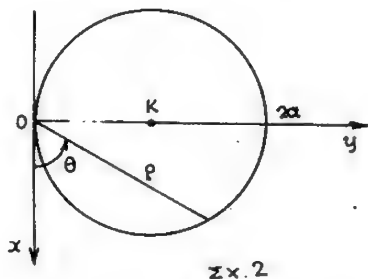
$$\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

Εἶναι ὅτι:

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \right| = \rho \geq 0.$$

Συνεπῶς ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \eta \mu \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(4a^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{2a \eta \mu \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(4a^2 - 4a^2 \eta \mu^3 \theta)^{3/2} - (4a^2)^{3/2} \right] d\theta = \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{4}{9} a^3 (3\pi - 4). \end{aligned}$$



II. Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας.

Ας θεωρήσωμεν μίαν επιφάνειαν τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας εἶναι $z=f(x,y)$, ὅπου ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι συνεχὴς καὶ ἔχει μερικὰς παραγώγους αἱ τὰς ὧς συνεχεῖς θεωροῦμεν ἓνα τμήμα S τῆς ἐν λόγῳ επιφάνειας περιυψιζόμενον ὑπὸ μιᾶς υἱειστῆς καμπύλης γραμμῆς Γ , τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy εἶναι ἡ λεία καμπύλη L . Ἡ καμπύλη αὕτη εἶναι τὸ σύνορον τοῦ χωρίου D τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ θεωρηθέντος τμήματος τῆς επιφάνειας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Oxy .

Διαμερίζομεν τὸ χωρίον D διὰ μιᾶς τυχούσης διαμερίσεως Φ εἰς n -τὼ πλῆθος ὑποχωρία D_1, D_2, \dots, D_n με ἀντίστοιχα ἐμβαδὰ $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Ἐστω $P_r (x_r, y_r)$ ἓν τυχόν σημεῖον ἀνῆιον εἰς τὸ πεδῖον $D_r, 1 \leq r \leq n$. Τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σημείου $M_r (x_r, y_r, f(x_r, y_r) = z_r)$ τῆς επιφάνειας (βλ. Σχ. 1).

Ὡς πρῶτον, ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς επιφάνειας εἰς τὸ σημεῖον M_r εἶναι:

$$z - z_r = f'_x(x_r, y_r)(x - x_r) + f'_y(x_r, y_r)(y - y_r) \quad (1)$$

Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν τὸ ἐμβαδὸν $\Delta \sigma_r$ ἐμείου τοῦ τμήματος σ_r τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τὸ ὁποῖον ἔχει προβολὴν ἐπὶ τοῦ oxy τὸ χωρίον $D_r, 1 \leq r \leq n$.

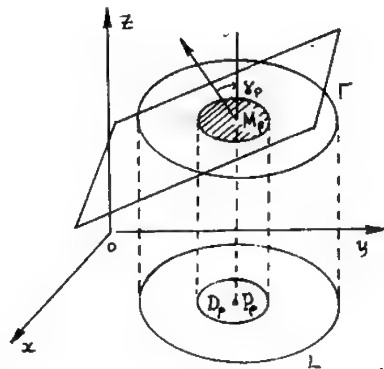
Θεωροῦμεν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀντι στοιχείων ἐμβαδῶν $\Delta \sigma_r$, ἥτοι:

$$\sum_{r=1}^n \Delta \sigma_r$$

Τὸ ὅριον τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος τοῦ $n \rightarrow \infty$ καὶ μέ $\max_{1 \leq r \leq n} \delta(\sigma_r) \rightarrow 0$ καλεῖται ἐξ ὀρίσμου ἐμβαδὸν τῆς επιφάνειας καὶ ἄς συμβολίσωμεν τοῦτο μέ:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \Delta \sigma_r \quad (2)$$

$\max_{1 \leq r \leq n} \delta(\sigma_r) \rightarrow 0$



Σχ. 1

Ἐν συνεχείᾳ ἄς καλέσωμεν γ_r τὴν ὀρθάν γωνίαν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου

της επιφάνειας εις τό M_p μετά του επιπέδου οαγ· αὕτη δέ ἰσοῦται μέ τήν ὀφείαν γωνίαν τήν ὁποίαν σχηματίζει τό κάθετον ἐπὶ τήν ἐπιφάνειαν διάνυσμα εἰς τό σημεῖον M_p μέ τόν ἄξονα OZ .

Ὡς γνωστόν ἐν τῇς Ἀναλυτικῇς Γεωμετρίας τό κάθετον διάνυσμα ἔχει προβολάς $(-f'_x(E_p, n_p), -f'_y(E_p, n_p), +1)$, συνεπῶς ἡ γωνία γ_p πού σχηματίζει τοῦτο μέ τόν ἄξονα OZ εἶναι :

$$\text{συν} \gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2_x(E_p, n_p) + f'^2_y(E_p, n_p)}} \quad (3)$$

$$\text{ἘΕ ἄλλου } \Delta S_p = \Delta S_p \cdot \text{συν} \gamma_p \quad \text{ἢ}$$

$$\Delta S_p = \frac{\Delta S_p}{\text{συν} \gamma_p} = \sqrt{1 + f'^2_x(E_p, n_p) + f'^2_y(E_p, n_p)} \cdot \Delta S_p \quad (4)$$

θεωροῦμεν τό ἄθροισμα :

$$\sum_{p=1}^n \Delta S_p = \sum_{p=1}^n \sqrt{1 + f'^2_x(E_p, n_p) + f'^2_y(E_p, n_p)} \cdot \Delta S_p \quad (5)$$

Ἐάν ἥδη θεωρήσωμεν μίαν ἀπολλουδιαν διαμερίσεων ἐπὶ τοῦ χωρίου D τοιαύτην, ὥστε τοῦ $n \uparrow$ τό $\max_{1 \leq p \leq n} \delta(D_p) \rightarrow 0$, τότε τό δεξιόν μέλος τῆς ἰσότητος (5)

θά τείνῃ πρὸς τόν ἀριθμόν $\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$. ἘΕ ἄλλου καί τό

$\max_{1 \leq p \leq n} \delta(\sigma_p) \rightarrow 0$, ἥτοι, λόγῳ τῆς (2), τό ἀριστερόν μέλος τῆς (5) θά τείνῃ πρὸς τό ἐμβαδόν σ τῆς ἐπιφάνειας.

Ὅθεν,

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Παρατήρησις : Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια ἔχη ὡς εἰσῶσιν τήν $y=f_1(x, z)$ ἢ $x=f_2(y, z)$, τότε θά ἔχωμεν ἀναλόγους τύπους

Παράδειγμα: Νά υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας.

Λύσις: Ὡς γνωστὸν ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὅταν τὸ κέντρον αὐτῆς συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων εἶναι: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ἔνθα R ἡ αὐτὴς αὐτῆς.

Υπολογίζομεν τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἄνω ἡμισφαρίου. Ἡ ἐξίσωσις αὐτοῦ εἶναι:

$$z = + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Εἶναι δε': } \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\text{Ὅθεν: } \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Τὸ ἡμισφαίριον τοῦτο προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου οὗ εἰς τὸν κύκλον ποὺ πῆραϊ τὴν συνθήκην:

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Συμφάνως πρὸς τὰ εὐτεθέντα ἀνωτέρω, τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἡμισφαρίου δά εἶναι:

$$\frac{1}{2} \sigma = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dy \right) dx \quad (1)$$

Διὰ νὰ υπολογίσωμεν αὐτὸ τὸ διπλοῦν ὀλοκληρῶμα χρῆσιμοποιοῦμεν πολυιάς συντεταγμένας. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συνόρου τοῦ χωρίου τῆς ὀλοκληρώσεως εἶναι $\rho = R$ καὶ ἐπὶ πλέον $\left| \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \right| = \rho$, ὅτε ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2} \sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho \right) d\theta = R \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^R d\theta = R \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R^2.$$

§ II. ΣΥΝΟΛΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ γνῶσις τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ θεμελιῖον τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως. Ἐως ἐδῶ ἐγνωρίσαμεν συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἐκ μιᾶς, δύο ἢ καὶ περισσότερων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Δίδοντες μίαν γεωμετρικὴν θεώρησιν τῶν

μέχρι τούδε γνωστών συναρτήσεων δυνάμεθα νά εἰπωμεν ὅτι τοιαῦται συναρτήσεις εἶναι μεταβληταὶ ποσότητες ἑξαρτώμεναι ἀπὸ ἓνα σημεῖον τῆς εὐθείας (συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς) ἢ ἀπὸ ἓνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν) κ.τ.λ. Ταύτας δὲ εἰς τὸ ἑξῆς τὰς καλοῦμεν σημειοσυναρτήσεις.

Ἡ μαθηματικὴ Ἀνάλυσις καὶ αἱ φυσικαὶ ἐφαρμογαὶ τῆς θεωροῦν καὶ ἄλλους τύπους συναρτήσεων αἱ τιμαὶ τῶν ὁποίων δὲν ἑξαρτῶνται ἀπὸ ἓνα σημεῖον τοῦ χώρου, ἀλλὰ ἑξαρτῶνται ἐκαστοτε ἀπὸ ὠρισμένον σύνολον πού λαμβάνεται εἰς τὸν χώρον.

Θεωροῦμεν γενικῶς ἓνα σύνολον Ω καὶ μίαν κλάσιν \mathcal{A} ἑξ ὑποσυνόλων αὐτοῦ τοιαύτην, ὥστε ἡ ἔνωσις δύο τυχόντων συνόλων τοῦ Ω νά ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν \mathcal{A} .

ὑπὸ τὸν ὅρον συνολοσυνάρτησιν ἐννοοῦμεν μίαν πραγματικὴν συνάρτησιν F ὠρισμένην ἐπὶ τῆς κλάσεως \mathcal{A} , ἥτοι: $\mathcal{A} \ni A \rightarrow F(A) \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα τοιούτων συνολοσυναρτήσεων εἶναι τὰ κατωθ: α). Τὸ ἔμβαδόν $F(G) = S$ ἑνὸς χωρίου G τὸ ὁποῖον ὠρίσθη κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον.

β) Ἡ μᾶζα ἑνὸς σώματος, ἥτις εἶναι κατανεμημένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου oxy , δηλ. εἰς ἕκαστον χωρίον G τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦμεν ἓνα ὠρισμένον ἀριθμὸν $m(G)$ τὴν μᾶζαν αὐτοῦ.

γ) Τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος πού εἶναι κατανεμημένον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ἐπιπέδου πλαυός.

Ὁρισμός VII-11-1. Μία συνολοσυνάρτησις F ὠρισμένη ἐπὶ τῆς κλάσεως \mathcal{A} θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι πεπερασμένως προσδετικὴ, ἐάν οἰωνδῇποτε ὄντων τῶν ἑξῶν συνόλων A_1 καὶ A_2 τῆς κλάσεως \mathcal{A} ἔχωμεν:

$$F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) + F(A_2).$$

Ἐνα χαρακτηριστικὸν παράδειγμα πεπερασμένης προσδετικῆς συνολοσυναρτήσεως δύναται νά κατασκευασθῇ μέσω τῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἐστω $f(x,y)$ μία συνάρτησις ὠρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ὀρίσμεν μίαν συνολοσυνάρτησιν F ἐπὶ τῆς κλάσεως \mathcal{A} τῶν ὑποσυνόλων τοῦ ἐπιπέδου ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F(G) = \iint_G f(x,y) dx dy \quad (1)$$

πράγματι ή πεπερασμένη προσθετιμότης τής άνωτέρω συναρτήσεως εξαγεται έκ τών ιδιοτήτων του διηλου όλουδηρώματος.

Ήδη εισάγομεν μίαν νέαν έννοιαν συγυλίσσεως.

όρισμός VII - 11-2. Έστω F μία αύθαίρετος συνολοσυνάρτησις ώρισμένη τουλάχιστον διά τήν υλάσιν \mathcal{A} όλων τών υλειστών χωρίων A του έπιπέδου. θα λέρωμεν ότι αύτη τείνει προς τόν άριθμόν ℓ καθώς τό σύνολον A τείνει προς τό σημείον P_0 του έπιπέδου καί γράφομεν: $\lim_{A \downarrow P_0} F(A) = \ell$, εάν καί μόνον εάν, διά υάδε $\epsilon > 0$ ύπάρχη άριθμός $\eta(\epsilon) > 0$ τοιοϋτος, ώστε όταν τό A είναι ένα σύνολον περιέχον τό P_0 μέ διάμετρον $\delta(A) < \eta(\epsilon)$ καί $A \in \mathcal{A}$ νά έχωμεν: $|F(A) - \ell| < \epsilon$.

Είς αύτήν τήν περίπτωση θα λέρωμεν ότι ή οίμορρένεια τών συνόλων A « φράσσεται έκ τών υάτω » από τό σημείον P_0 .

Παριστάντες μέ τό $F(S)$ τήν συνολοσυνάρτησιν ήτις δίδει τό έμβαδόν ενός χωρίου S , τότε θα έχωμεν: $\lim_{S \downarrow P_0} F(S) = 0$.

Εάν τό $\lim_{A \downarrow P_0} F(A)$ ύπάρχη διά υάδε $P_0 \in D$, τότε αύτη όρίζει μίαν σημειοσυνάρτησιν g επί του D τοιαύτην, ώστε:

$$g(P) = \lim_{A \downarrow P} F(A) \text{ διά υάδε } P \in D.$$

όρισμός VII - 11-3. θα λέρωμεν ότι, ή συνολοσυνάρτησις $F(A)$ τείνει όμαλώς προς τήν σημειοσυνάρτησιν $g(P)$ καθώς τό $A \downarrow P$ καί γράφομεν:

$\lim_{A \downarrow P} F(A) = g(P)$ όμαλώς διά υάδε $P \in D$, εάν, καί μόνον εάν, διά υάδε $\epsilon > 0$ ύπάρχη $\eta(\epsilon) > 0$ τοιοϋτον, ώστε: $|F(A) - g(P)| < \epsilon$ οίονδ ήποτε όντος του $P \in D$ καί A είναι ένα σύνολον είς τό όποιον άνήκει τό P μέ $\delta(A) < \eta(\epsilon)$.

Μέ τήν βοήθειαν τής έννοίας του όριου μιάς συνολοσυναρτήσεως εισάγομεν μίαν δύο-διαστάσεων παράγωρον διά τήν συνολοσυνάρτησιν F , ήτις όρίζεται επί τής υλάσεως \mathcal{A} . Άνάλογοι όρισμοί δύνανται νά εισαχθούν διά παραγώρους άνωτέρας διαστάσεως.

Έστω $F(A)$ μία προσθετιμή συνολοσυνάρτησις ώρισμένη είς τά τετραγωνίσιμα ύποσύνολα του χωρίου D καί έστω έν σημείον $P_0 \in A$. Άς παραστήσω-

μεν διά $S(A)$ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ χωρίου A . Θὰ πὲρῳμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς ℓ εἶναι τὸ ὄριον τοῦ λόγου $\frac{F(A)}{S(A)}$ καθὼς τὸ χωρίον A «τείνει» πρὸς τὸ σημεῖον $P \in D$, ἂν διά υἷαδε $\epsilon > 0$ ὑπάρχη $\eta(\epsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε $|\frac{F(A)}{S(A)} - \ell| < \epsilon$ διά υἷαδε χωρίον A εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει τὸ P , μέ $\delta(A) < \eta(\epsilon)$.

Αὐτὸ τὸ ὄριον θὰ συμβολίζωμεν διά τοῦ συμβόλου $\lim_{A \downarrow P_0} \frac{F(A)}{S(A)} = \ell$ ἢ $\frac{dF}{dS} \Big|_{P=P_0}$ καὶ καλεῖται παράγωγος τῆς προσθετικῆς συνολοσυναρτήσεως $F(A)$ ὡς πρὸς τὸ ἔμβαδόν.

Ἡ παράγωγος δὲν εἶναι συνολοσυνάρτησις, ἀλλὰ μία συνήθης συνάρτησις, δηλ. μία μεταβλητὴ ποσότης ἐξαρτωμένη ἀπὸ ἓνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Πᾶσαι αἱ συνολοσυναρτήσεις δὲν ἔχουν παραγώγους

Θὰ πὲρῳμεν δὲ ὅτι, ἡ F εἶναι ὁμαλῶς διαφορίσιμος ὡς πρὸς τὸ ἔμβαδόν, ἂν ἡ σύμμελισις τοῦ $\frac{F(A)}{S(A)}$ τοῦ $A \downarrow P$ εἶναι ὁμαλὴ.

Θεώρημα VII-11-1. Ἐστω D εἶναι ἓνα ἀνοιχτὸν σύνολον τοῦ ὁποῖου τὸ σύνολον ἔχει μηδενιμὸν ἔμβαδόν καὶ $f(P), P=(x,y)$ μία σημειοσυνάρτησις, ἥτις εἶναι συνεχὴς καὶ φραγμένη ἐπὶ τοῦ D καὶ μηδενιμὴ ἐντὸς τοῦ D . Ὀρίσωμεν μίαν συνολοσυνάρτησιν F ἐπὶ τῆς υἷάσεως \mathcal{A} ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F(G) = \iint_G f(x,y) dx dy, G \in \mathcal{A}$$

Τότε ἡ F εἶναι ὁμαλῶς διαφορίσιμος εἰς υἷαδε υἷλειστὸν ὁρθογώνιον κείμενον ἐντὸς τοῦ D καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει: $\frac{dF(G)}{dS(G)} \Big|_{P=P_0} = f(P_0)$.

Ἀπόδειξις: Ἐστω R εἶναι ἓνα υἷλειστὸν ὁρθογώνιον κείμενον ἐντὸς τοῦ D . Ἐπειδὴ τὸ D εἶναι ἀνοιχτὸν δύναμεθα νὰ ἐπευτεῖνομεν τὸ R εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐπιτύχωμεν ἓνα ὁρθογώνιον R_1 τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ R καὶ ἐπίσης κείμενον ἐντὸς τοῦ D . Ἡ f εἶναι συνεχὴς εἰς τὸ R_1 συνεπῶς καὶ ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ. Δοθέντος λοιπὸν ἑνὸς $\epsilon > 0$ ὑπάρχει ἓν $\eta(\epsilon) > 0$ τοιοῦτον, ὥστε $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$ ὁῦανδήποτε ὄντων τῶν P καὶ Q κειμένων εἰς τὸ R_1 καὶ μέ $\|P-Q\| < \eta(\epsilon)$. Ἐπειδὴ τὸ R_1 κεῖται ἐσωτερικῶς τοῦ R , δύναμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ $\eta(\epsilon)$ ἂν τοῦτο εἶναι ἀναγκαῖον,

είναι τρόπον ὥστε $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ οἰουδήποτε ὄντος τοῦ $P \in R$ καὶ μὲ $\|P - Q\| < \eta(\varepsilon)$.
 Ἐστω G ἓνα σύνολον τῆς μετρήσεως R τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημεῖον $P_0 \in R$ καὶ τοῦ ὁποῖου $\delta(G) < \eta(\varepsilon)$. Ἐστω $M = \sup_{Q \in G} f(Q)$ καὶ $m = \inf_{Q \in G} f(Q)$. Τότε $|M - f(P_0)| < \varepsilon$ καὶ $|m - f(P_0)| < \varepsilon$.

Ἐπειδὴ $F(G) = \iint_G f(x,y) dx dy$, ἡ $F(G)$ κεῖται μεταξὺ τῶν τιμῶν $m \cdot S(G)$ καὶ $M \cdot S(G)$, ὅπου $S(G)$ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ G . Συνεπῶς ἔχομεν:

$$\left| \frac{F(G)}{S(G)} - f(P_0) \right| < \varepsilon.$$

Ἡ τελευταία σχέσηις ἰσχύει διὰ καὶδε σύνολον G περιέχον τὸ σημεῖον P_0 μὲ $\delta(G) < \eta(\varepsilon)$ καὶ διὰ καὶδε $P_0 \in R$. Ἀρα ἡ F εἶναι ὁμαλῶς διαφορίσιμος ἐντὸς τοῦ R ὡς πρὸς τὸ ἐμβαδὸν καὶ μὲ παράγωγον τὴν συνάρτησιν f .

§ 12. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

Ι. Επιφανειαυὴ πυκνότης. θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον πλάνα G κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy . Ἐστω ὅτι τὸ χωρίον G εἶναι τετραγωνίσιμον καὶ $S(G)$ τὸ ἐμβαδὸν του. Ἄς μαθεύσωμεν δὲ $\mu(G)$ τὴν μᾶσιν, ἥτις εἶναι κατανεμημένη ἐπ' αὐτῆς τῆς πλάτους. Ὁ λόγος $\frac{\mu(G)}{S(G)}$ μαλεῖται μέση ἐπιφανειαυὴ πυκνότης τῆς μᾶσιν κατανεμημένης εἰς τὸ πεδίου G .

ὑποθέτομεν ἥδη ὅτι, ἔλαττοῦται συνεχῶς τὸ μέγεθος τοῦ πεδίου G «περιορίζοντες» αὐτὸ εἰς ἓνα σταθερὸν σημεῖον P_0 . Ἐὰν κατ' αὐτὴν τὴν διαδοχασίαν ὁ ἀνωτέρω λόγος τείνη πρὸς ἓναν ἀριθμὸν, ἔστω $\delta(P_0)$, αὐτὸ τὸ ὅριον μαλεῖται ἐπιφανειαυὴ πυκνότης τῆς μᾶσιν κατανεμημένης εἰς τὸ σημεῖον P_0 .

$$\text{Ὅθεν: } \delta(P_0) = \lim_{G \downarrow P_0} \frac{\mu(G)}{S(G)}.$$

II. ὑπολογισμὸς τῆς μᾶσιν. θεωροῦμεν μίαν ἐπίπεδον ὑδριν πλάνα G κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy καὶ τῆς ὁποίας ἡ κατανομή τῆς μᾶσιν ἐπ' αὐτῆς εἶναι ἐπιφανειαυὴ πυκνότης $\delta(P) = \delta(x,y)$.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς μᾶσιν τῆς πλάτους δοθέντος ὅτι ἡ $\delta(x,y)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῶν x καὶ y ἐργασόμεθα ὡς ἀπολούδως. χωρίσωμεν τὸ πεδίου G

εἰς τὴν τὸ πλῆθος μέρη G_p κατὰ ἓνα αὐθαίρετον τρόπον καὶ εἰς καθὲν τμήμα G_p λαμβάνομεν καὶ ἀπὸ ἑνὸς τυχόν σημείου (ξ_p, η_p) . Ἡ μᾶσα τοῦ στοιχείου G_p τοῦ ὁποῖου τὸ ἔμβασόν ἐστὶν ΔS_p εἶναι προσεγγιστικῶς $\delta(\xi_p, \eta_p) \cdot \Delta S_p$. Ἡ δὲ ὅλη καὶ μᾶσα $\mu(G)$ τῆς πλάυος θὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν τὸ ἄθροισμα $\sum_{p=1}^n \delta(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p$ (1) λαμβανόμενον τοῦτο ἐφ' ὅλων τῶν στοιχείων τῆς διαμερίσεως. Ἦδη ὑποθέτομεν ὅτι ἡ μεγίστη τῶν διαμέτρων τῆς διαμερίσεως καθὼς τὸ $n \uparrow \infty$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ ἄθροισμα (1) θὰ τείνῃ πρὸς τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_G \delta(x, y) dx dy$, τὸ ὁποῖον θὰ δίδῃ συγχρόνως τὴν ὅλην μᾶσαν τὴν κατανεμημένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας G .

Ὅθεν,
$$\mu(G) = \iint_G \delta(x, y) dx dy$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, $\left. \frac{d\mu}{ds} \right|_{P=P_0} = \delta(P_0)$, ὅπου $P_0 = (x_0, y_0)$.

III. Προσδιορισμός τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς ἐπιπέδου πλάυος.

Ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ κέντρου βάρους (μ. β.) μιᾶς ἐπιπέδου ὀβελίου πλάυος G κατεμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy καὶ ἔχουσης ἐπιφανειακὴν πυκνότητα $\delta(x, y)$, ἥτις εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῶν x καὶ y . Πρὸς ταύτας χωρίζομεν τὴν πλάυα G εἰς τὴν τὸ πλῆθος τμήματα G_p διὰ μιᾶς τυχούσης διαμερίσεως καὶ ἐφ' ἑκάστου τμήματος G_p λαμβάνομεν καὶ ἀπὸ ἑνὸς τυχόν σημείου (ξ_p, η_p) . Ἐν συνεχείᾳ θεωροῦμεν προσεγγιστικῶς τὴν μᾶσαν ἑκάστου τούτων τῶν G_p , ἥτις ὡς γνωστὸν εἶναι $\delta(\xi_p, \eta_p) \cdot \Delta S_p$, ὅπου ΔS_p τὸ ἔμβασόν τοῦ χωρίου G_p . Ἐνδεῶς τῶν ἀνωτέρω μαζῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι συρμεντροῦται εἰς ἓνα σημεῖον, ἔστω τὸ (ξ_p, η_p) . Τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸν γνωστὸν ἐν τῇ Μηχανικῇ τύπον, ὁστις δίδει τὰς συντεταγμένας (x_k, y_k) τοῦ μ. β. τοῦ ἀνωτέρω συστήματος τῶν n ὀβελίων σημείων, ἥτοι:

$$x_k = \frac{\sum_{p=1}^n \xi_p \cdot \delta(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p}{\sum_{p=1}^n \delta(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p} \quad \text{καὶ} \quad y_k = \frac{\sum_{p=1}^n \eta_p \cdot \delta(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p}{\sum_{p=1}^n \delta(\xi_p, \eta_p) \Delta S_p} \quad (1)$$

Οἱ τύποι (1) δίδουν προσεγγιστικῶς τὰς συντεταγμένας τοῦ μ. β. τῆς ἐπιπέδου ὀβελίου πλάυος. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διαμερίσις γίνεται συνεχῶς λεπτοτέρα καὶ ἡ μεγίστη τῶν διαμέτρων τῶν G_p τείνει πρὸς τὸ μηδέν καθὼς τὸ $n \uparrow \infty$.

Τότε ἐκ τῶν (1) λαμβάνομεν :

$$\left. \begin{aligned} x_k \cdot \iint_G \delta(x,y) dx dy &= \iint_G x \delta(x,y) dx dy \\ y_k \cdot \iint_G \delta(x,y) dx dy &= \iint_G y \delta(x,y) dx dy \end{aligned} \right\} \quad \eta$$

$$x_k = \frac{\iint_G x \delta(x,y) dx dy}{\iint_G \delta(x,y) dx dy}, \quad y_k = \frac{\iint_G y \delta(x,y) dx dy}{\iint_G \delta(x,y) dx dy} \quad (2)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $\delta(x,y) = \text{σταθ.}$ οἱ ἀνωτέρω τύποι (2) γίνονται :

$$x_k = \frac{\iint_G x dx dy}{\iint_G dx dy}, \quad y_k = \frac{\iint_G y dx dy}{\iint_G dx dy} \quad (3)$$

IV. Ροπή ἀδρανείας ἐπιπέδου πλάτους.

Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς Μηχανικῆς ὅτι ἡ ροπή ἀδρανείας ἑνὸς ὕλινου σημείου Μ ἀπέχοντος ἀπόστασιν τ ἀπὸ μίαν εὐθείαν ἢ ἓνα σημεῖον εἶναι $m \cdot \tau^2$, ὅπου m ἡ μᾶσα τοῦ ὕλινου σημείου.

Ἐστω ἡ ἐπίπεδος ὕλινη πλάτα G ἔχουσα μίαν ἐπιφανειακὴν πυκνότητα $\delta(x,y)$. Χωρίζομεν τὸ πεδίου G διὰ μιᾶς διαμερίσεως εἰς τμήματα G_p εὐαστον τῶν ὁποίων ἔχει ἓνα ἑμβαδὸν ΔS_p καὶ ἐφ' ἐκαστοῦ τούτων λαμβάνομεν ἓν τυχόν σημεῖον (E_p, η_p) καὶ εἰς τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν συγκεντρωμένην τὴν μᾶσαν τοῦ G_p . Αὕτη η μᾶσα προσεγγιστικῶς εἶναι $\delta(E_p, \eta_p) \Delta S_p$ καὶ ἡ ροπή ἀδρανείας ταύτης ὡς πρὸς τὸν ἄξονα oy εἶναι $E_p^2 \cdot \delta(E_p, \eta_p) \Delta S_p$.

Συνεπῶς τῷ ἀνωτέρω ὕλινου συστήματος ἡ ροπή ἀδρανείας ὡς πρὸς τὸν oy προσεγγιστικῶς εἶναι :

$$\sum_{p=1}^n E_p^2 \cdot \delta(E_p, \eta_p) \Delta S_p \quad (1)$$

Ἐάν ᾗδη ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦ $n \rightarrow \infty$ ἡ μερίστη διάμετρος τῆς διαμερίσε-

ως τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τότε τὸ ἄθροισμα (1) τείνει πρὸς τὸ διπλασθὲν ὁλοκληρώμα:

$$\iint_G x^2 \delta(x,y) dx dy.$$

Ὅθεν, ἂν υαλῆσωμεν I_y τὴν ροπήν ἀδραναίας τῆς ἀνωτέρω πλαυὸς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y , τότε θὰ ἔχαμεν: $I_y = \iint_G y^2 \delta(x,y) dx dy$.

Ἀναλόγως εὐρίσκουμεν: $I_x = \iint_G x^2 \delta(x,y) dx dy$.

Ἡ δὲ ροπή ἀδραναίας I_0 ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O (πολιυή ροπή ἀδραναίας) εἶναι: $I_0 = \iint_G (x^2 + y^2) \delta(x,y) dx dy = I_x + I_y$.

Ἐφαρμογαί 1%. Ἡὰ εὐρεθῇ τὸ υ.β. κυυηιουὺ τομέως ἀυτῖνος R καὶ γωνίας ϕ τοῦ ὁποῖου ἡ πυυνότης εἶναι $\delta(x,y) = C$.

Λύσις: Λαμβάνομεν ὡς ἄξονα τῶν x τὴν διχοτόμον τῆς ἐπιυέντρου γωνίας (βλ. Σχ. 1), θὰ ἔχαμεν:

$$m = C \cdot \iint_D dx dy \text{ καὶ } x_c = \frac{1}{m} \iint_D x dx dy$$

Ἐνεα τῆς συυμετρίας εἶναι $y_c = 0$.

Διὰ τὸν ὑποδορισμὸν τῶν ἀνωτέρω ὁλοκληρωμῶν τῶν χρῆσιμοποιοῦμεν πολιυὰς συυτεταγμένας ὅτε:

$$m = C \iint_{D^*} \rho d\rho d\theta = C \cdot \int_{-\phi/2}^{\phi/2} d\theta \int_0^R \rho d\rho = C \cdot \phi \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Σχ. 1

$$\text{καὶ } x_c = \frac{2}{C \cdot \phi \cdot R^2} \iint_{D^*} \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta = \frac{2}{C \cdot \phi \cdot R^2} \cdot \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{4R}{3C \cdot \phi} \eta \mu \frac{\phi}{2}.$$

2%. Ἡὰ εὐρεθῇ ἡ πολιυή ροπή ἀδραναίας τοῦ χωρίου τοῦ υειυένου εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy καὶ φρασσομένου ὑπὸ τῶν καμπύλων $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = 4$, ἔχοντος δὲ πυυνότητα $\delta = 1$.

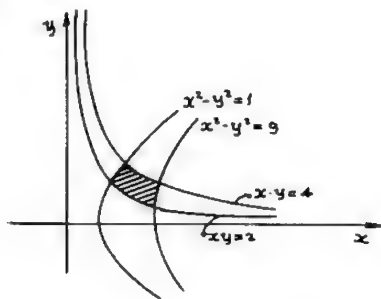
Λύσις: Ὡς γνωστὸν ἡ πολιυή ροπή ἀδραναίας θὰ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad (1).$$

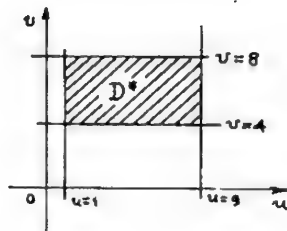
Διά τόν υπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος (1) ἐυτελοῦμεν τόν μετασχηματισμόν:

$$x^2 - y^2 = u \quad \text{καί} \quad 2xy = v \quad (2)$$

ὥστε τό χωρίον D μετασχηματίζεται εἰς τό ὀρθογώνιον χωρίον D^* (βλ. Σχ. 1α καί Σχ. 1β).



Σχ. 1 (α)



Σχ. 1 (β)

Ἐχομεν:
$$I_0 = \iint_{D^*} (x^2 + y^2) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv \quad (3)$$

Ἐκ τῶν τύπων (2) δι' ὑπόθεσιν αὐτῶν εἰς τό τετράγωνον καί προσθέσεως συνάγομεν ὅτι: $x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν:
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1.$$

Εἶναι δέ:
$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2 = 4\sqrt{u^2 + v^2}.$$

Ἐντεπῶς:
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad \text{Ὁ (3) γίνεται:}$$

$$I_0 = \iint_{D^*} \sqrt{u^2 + v^2} \cdot \frac{du dv}{4\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{4} \int_{u=1}^9 du \cdot \int_{v=4}^8 dv = 8.$$

§ 19. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΝ

Εἰς τό πρῶτον Τόμον σελ. 658 ἐδώσαμεν τόν ὅρισμόν τῆς ὁμαλῆς συγγυλίσεως τοῦ γενικευμένου ὁλοκληρώματος $\varphi(\lambda) = \int_a^\infty f(x, \lambda) dx$ (1) ὡς πρὸς τὴν παράμε-

τρον λ , ήτοι: τὸ ὅλουλήρωμα (1) συρρικνώνει ὁμαλῶς διὰ τὰ $\lambda \in I$ (I: ἓνα διάστημα τῆς \mathbb{R}) ἐὰν διὰ πᾶδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχη ἓν $\delta(\varepsilon)$ ἑξαρτώμενον μόνον ἐκ τοῦ ε καὶ οὐχὶ ἐκ τοῦ λ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $|\varphi(\lambda) - \int_a^u f(x, \lambda) dx| = \left| \int_u^\infty f(x, \lambda) dx \right| < \varepsilon$ διὰ πᾶδε $u > \delta(\varepsilon)$ καὶ $\lambda \in I$ (ἔξυπαυσέεται $u \geq a$).

Παραπέμπομεν τὸν ἀναγνώστην εἰς τὸν πρῶτον Τόμον σελ. 658-659 διὰ τὰ κριτήρια συγκλίσεως τοῦ Cauchy καὶ τοῦ Weierstrass.

Θεώρημα VII-13-1. Ἐστω τὸ γεννηευμένον ὅλουλήρωμα:

$\varphi(\lambda) = \int_a^\infty f(x, \lambda) dx$, ὅπου ἡ $f(x, \lambda)$ συνεχὴς συνάρτησις ὡς πρὸς λ καὶ τὸ ὁποῖον συρρικνώνει ὁμαλῶς διὰ πᾶδε $\lambda \in I$. Τότε ἡ $\varphi(\lambda)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις. Ἦτοι: $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \varphi(\lambda) = \int_a^\infty \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(x, \lambda) dx = \int_a^\infty f(x, \lambda_0) dx = \varphi(\lambda_0)$.

Ἀπόδειξις: Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda+h) - \varphi(\lambda) &= \int_a^\infty [f(x, \lambda+h) - f(x, \lambda)] dx \\ &= \int_a^u [f(x, \lambda+h) - f(x, \lambda)] dx + \int_u^\infty f(x, \lambda+h) dx - \int_u^\infty f(x, \lambda) dx \end{aligned}$$

$$\text{καὶ } |\varphi(\lambda+h) - \varphi(\lambda)| \leq \int_a^u |f(x, \lambda+h) - f(x, \lambda)| dx + \left| \int_u^\infty f(x, \lambda+h) dx \right| + \left| \int_u^\infty f(x, \lambda) dx \right|. \quad (1)$$

Λόγω τῆς ὁμαλῆς συρρικλίσεως τοῦ ὅλουληρώματος διὰ πᾶδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἓν $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε ὅταν $u > \delta(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν:

$$\left| \int_u^\infty f(x, \lambda) dx \right| < \varepsilon \quad (2)$$

$$\text{Ὁμοίως θὰ εἶναι: } \left| \int_u^\infty f(x, \lambda+h) dx \right| < \varepsilon \quad (3)$$

Τὸ u εἶναι μία σταθερὰ τιμὴ ἀνεξάρτητος τοῦ h , ὁδὲν δυνάμεθα νὰ ἐπιλέξωμεν τὸ h ἀρμετὰ μὴν ὥστε νὰ ἔχωμεν: $\int_a^u |f(x, \lambda+h) - f(x, \lambda)| dx < \varepsilon$ (4)

Ἡ (1), λόγω τῶν (2), (3) καὶ (4), καθίσταται:

$$|\varphi(\lambda+h) - \varphi(\lambda)| < 3\varepsilon.$$

Ἡ τελευταία σχέση ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς συναρτήσεως $\varphi(\lambda)$ διὰ $\lambda \in I$.

Θεώρημα VII-13-2. Μὲ τὰς ὑποθέσεις τῆς προηγουμένης προτάσεως καὶ εἰὰν
 $\gamma, \delta \in I$, τότε δά ἔχωμεν:

$$1^\circ/ \quad \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(\lambda) d\lambda = \int_a^{\infty} dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, \lambda) d\lambda \quad (1)$$

2^ο/ Ἐὰν ὑπάρχῃ ἡ $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ καὶ εἶναι μιὰ συνάρτησις συνεχὴς ὡς πρὸς x
καὶ λ διὰ τὰς $x > a$ καὶ διὰ τὰς $\lambda \in I$ καὶ ἔὰν τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\varphi_1(\lambda) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx \quad (2)$$

ὑπάρχῃ καὶ συμπίπτῃ ὁμαλῶς διὰ $\lambda \in I$, τὸ δὲ ὁλοκλήρωμα:

$$\int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx \quad (3)$$

ὑπάρχει διὰ μιὰν τιμὴν $\lambda_0 \in I$, τότε τὸ ἄνωτέρω ὁλοκλήρωμα (3) ὀρίζει διὰ
τὰς $\lambda \in I$ μιὰν συνάρτησιν $\varphi(\lambda)$ τῆς ὁποίας ἡ παράγωγος $\varphi'(\lambda) = \varphi_1(\lambda)$, ἥτοι:

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx \quad (\text{τύπος τοῦ Leibnitz}).$$

Ἀπόδειξις: 1^ο/ Ἐχομεν:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma}^{\delta} \varphi(\lambda) d\lambda &= \int_{\gamma}^{\delta} d\lambda \int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx = \int_{\gamma}^{\delta} d\lambda \left[\int_a^u f(x, \lambda) dx + \int_u^{\infty} f(x, \lambda) dx \right] \\ &= \int_{\gamma}^{\delta} d\lambda \int_a^u f(x, \lambda) dx + \int_{\gamma}^{\delta} d\lambda \int_u^{\infty} f(x, \lambda) dx. \end{aligned}$$

Εἰς τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα τῆς τελευταίας ἰσότητος τὸ ὁποῖον εἶναι μὴ γενι-
ευμένον δύναμεθα νὰ ἐκμνησκωμεν ἐναλλακτὴν τῶν ὁρίων τοῦ ὁλοκληρώματος, ἥτοι:

$$\int_a^u dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, \lambda) d\lambda.$$

Ἀρκεῖ νὰ δειξωμεν τώρα ὅτι τοῦ $u \uparrow \infty$ τὸ $\int_{\gamma}^{\delta} d\lambda \int_u^{\infty} f(x, \lambda) dx$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

Πράγματι, δοθέντος του $\varepsilon > 0$ υπάρχει έν $\delta(\varepsilon) > 0$ ανεξάρτητον του λ του οποίου, ώστε :

$$\left| \int_a^\infty f(x, \lambda) dx \right| < \varepsilon, \text{ δια } \lambda > \delta(\varepsilon)$$

“Οθεν, $\left| \int_Y^\delta d\lambda \int_a^\infty f(x, \lambda) dx \right| \leq \int_Y^\delta d\lambda \left| \int_a^\infty f(x, \lambda) dx \right| < \varepsilon \cdot (\delta - \gamma).$

“Οθεν, $\int_Y^\delta \varphi(\lambda) d\lambda = \int_a^\infty dx \int_Y^\delta f(x, \lambda) d\lambda.$

2^{ος}/ θεωρούμεν τό ολοκληρώμα :

$$\varphi_1(\lambda) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx$$

τό όποϊον υπάρχει έξ ύποθέσεως καί συμπίπτει όμαλώς ως πρός λ . Συμφώνως λοιπόν πρός τό 1^{ον} μέρος του θεωρήματος έχομεν :

$$\int_{\lambda_0}^\xi \varphi_1(\lambda) d\lambda = \int_a^\infty dx \int_{\lambda_0}^\xi \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} d\lambda = \int_a^\infty [f(x, \xi) - f(x, \lambda_0)] dx.$$

Έξ ύποθέσεως υπάρχει τό $\int_a^\infty f(x, \lambda_0) dx$, συνεπώς υπάρχει καί τό $\int_a^\infty f(x, \xi) dx$ διά πάθε ξ τό όποϊον ανήκει εις ένα κατάλληλον υποδιάστημα του I (διαιτί;) Έχομεν λοιπόν έν της άνωτέρω σχέσεως :

$$\int_{\lambda_0}^\xi \varphi_1(\lambda) d\lambda = \int_a^\infty f(x, \xi) dx - \int_a^\infty f(x, \lambda_0) dx.$$

Η συνάρτησις $\varphi_1(\lambda)$ είναι συνεχής, τό πρώτον μέρος της άνωτέρω ισότητος είναι μία συνάρτησις παραγωγίσιμος ως πρός ξ καί της όποιας ή παράγωγος είναι $\varphi_1(\xi)$.

παραγωγίζοντες λοιπόν την άνωτέρω ισότητα ως πρός ξ λαμβάνομεν :

$$\varphi_1(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int_a^\infty f(x, \xi) dx \quad \eta$$

επειδή έξ ύποθέσεως $\varphi_1(\xi) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} dx$, έχομεν τελικώς: $\frac{\partial}{\partial \xi} \int_a^\infty f(x, \xi) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} dx.$

Θεώρημα VII-13-3 'Εάν αἱ συναρτήσεις $f(x, \lambda)$ καὶ $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ εἶναι συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ χωρίου $J = [a, b] \times [\gamma, \delta]$ καὶ αἱ συναρτήσεις $u(\lambda)$, $v(\lambda)$ εἶναι ὁρισμένες καὶ ἔχουν συνεχεῖς παραγώγους ἐπὶ τοῦ διαστήματος $[\gamma, \delta]$, τότε ἡ συνάρτησις

$\varphi(\lambda) = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x, \lambda) dx$ εἶναι παραγωγίσιμος ἐπὶ τοῦ $[\gamma, \delta]$ καὶ ἰσχύει ὁ τύπος:

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x, \lambda) dx = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx + v'(\lambda) \cdot f(v(\lambda), \lambda) - u'(\lambda) \cdot f(u(\lambda), \lambda)$$

Ἀπόδειξις 'Εάν $u(\lambda) = a$, $v(\lambda) = b$, $u(\lambda_0) = a_0$ καὶ $v(\lambda_0) = b_0$, ὅπου λ_0 τυχόν σημείον τοῦ $[\gamma, \delta]$, ἔχομεν:

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx = \int_{a_0}^{b_0} f(x, \lambda) dx + \int_{b_0}^b f(x, \lambda) dx - \int_{a_0}^a f(x, \lambda) dx \quad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad \varphi(\lambda_0) = \int_{a_0}^{b_0} f(x, \lambda_0) dx \quad (2)$$

'Εκ τῆς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\frac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \int_{a_0}^{b_0} \frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} dx + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{b_0}^b f(x, \lambda) dx - \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{a_0}^a f(x, \lambda) dx \quad (3)$$

'Εξετάζομεν ἥδη ἕναστον προσδετέον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (3).

i) Ἡ $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ ὡς συνεχὴς συνάρτησις ἐπὶ τοῦ συμπαχοῦς χωρίου J εἶναι καὶ ὁμαλῶς συνεχὴς ἐπ' αὐτοῦ, ἄρα:

Διὰ πᾶθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμὸς $\eta(\varepsilon) > 0$ (ἐξαρτῶμενος μόνον ἐκ τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε διὰ πᾶθε $\lambda \in [\gamma, \delta]$ μὲ $|\lambda - \lambda_0| < \eta(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν:

$$\left| \frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{\partial f(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right| < \varepsilon \quad (4)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα μέσης τιμῆς (βλ. Τόμος Α, Θεώρ. XI-3-28) ἰσχύει:

$$f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) \cdot f'_\lambda(x, \lambda_0 + \theta(\lambda - \lambda_0)) \quad (5), \quad 0 < \theta < 1.$$

'Εκ τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν:

$$\left| \frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{\partial f(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right| = \left| \frac{f(x, \lambda_0 + \theta(\lambda - \lambda_0)) - \partial f(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right| < \varepsilon$$

Ὅθεν τὸ πηλίτιον:

$$\frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \rightarrow \frac{\partial f(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} \quad \text{ὁμαλῶς ὡς } \lambda \rightarrow \lambda_0, \text{ ὁπότε, κατὰ τὸ θεώρ.}$$

ρημα VII-13-1 έχουμε: (Θ ερ. IV 10-1

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_{a_0}^{\lambda} \frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} dx = \int_{a_0}^{\lambda_0} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f(x, \lambda) - f(x, \lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} dx = \int_{a_0}^{\lambda_0} \frac{\partial f(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} dx \quad (6)$$

ii) Το δεύτερον όλοκληρώμα, δι' εφαρμογής του θεωρήματος της μέσης τιμής του όλοκλητρ. λογισμού. (Τόμος Α', σελίς 505), γράφεται:

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(x, \lambda) dx = \frac{v(\lambda) - v(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \cdot f(v(\lambda_0) + \theta(v(\lambda) - v(\lambda_0)), \lambda_0)$$

$$\text{και } \text{όθεν: } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(x, \lambda) dx = v'(\lambda_0) \cdot f(v(\lambda_0), \lambda_0) \quad (7)$$

μαδόσον ή v είναι παραγωγίσιμος επί του [γ, δ] και ή f συνεχής επί του J.

iii) Όμοίως διά τό τρίτον όλοκληρώμα ισχύει.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(x, \lambda) dx = u'(\lambda_0) f(u(\lambda_0), \lambda_0) \quad (8)$$

Έυ των (3), (6), (7) και (8) έπεται ότι ή πρότασις ισχύει διά κάθε $\lambda_0 \in [\gamma, \delta]$.

Παρατήρησις. Παρατηρούμεν ότι ό τύπος του Leibniz, πού αντιστοιχεί σέ όλοκληρώμα μέ άυρα σταθερά είναι μεριυή περίπτωσης αυτού.

Θεώρημα VII-13-4. Υποθέτομεν ότι ή συνάρτησις $f(x, y)$ είναι συνεχής διά $a \leq x < +\infty$ και $\gamma \leq y < +\infty$ και ότι τά όλοκληρώματα:

$$\int_{\gamma}^{+\infty} f(x, y) dy \text{ και } \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (1)$$

συγκλίνουσιν όμαλώς επί έυάστου πεπερασμένου διαστήματος $a \leq x \leq A$ και $\gamma \leq y \leq \Gamma$ αντιστοιχώς. Έάν επί πλέον ένα τουλάχιστον των όλοκληρωμάτων:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\gamma}^{+\infty} |f(x, y)| dy \text{ και } \int_{\gamma}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \quad (2)$$

συγκλίνη, τότε και τά όλοκληρώματα:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\gamma}^{+\infty} f(x, y) dy, \int_{\gamma}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (3)$$

όμοίως συγκλίνουσιν και είναι ίσα μεταξύ των, δηλ. ισχύει ό τύπος:

$$\int_a^{+\infty} dx \int_{\gamma}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{\gamma}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

Απόδειξις: Υποθέτομεν ότι το δεύτερον ολοκλήρωμα των (2) συγχλίνει. Έπει-
 δη $f(x,y) \equiv |f(x,y)| \implies \int_a^{\infty} f(x,y) dx \equiv \int_a^{\infty} |f(x,y)| dx \implies \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y) dx \equiv \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x,y)| dx$
 (λόγω του κριτηρίου συχυρίσεως). Όθεν, και το δεύτερον των ολοκληρωμά-
 των (3) συγχλίνει. Άρα ει ήδη ν' αποδείξωμεν ότι:

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_a^{\ell} dx \int_{\gamma}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y) dx \quad (4)$$

Έπειδή εξ υποθέσεως το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma}^{\infty} f(x,y) dy$ συγχλίνει ομαλώς, τότε
 συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα VII-13-2 (ἐν προειμένῳ τὴν θέσιν τοῦ λ κατέχει τὸ λ)
 ἔχωμεν:

$$\int_a^{\ell} dx \int_{\gamma}^{\infty} f(x,y) dy = \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\ell} f(x,y) dx \quad (5)$$

διὰ τὰδε πεπερασμένον $\ell > a$.

Ἦδη ἄς υπολογίσωμεν τὴν διαφορὰν μεταξύ τῆς μεταβλητῆς ποσότητος

$$\int_a^{\ell} dx \int_{\gamma}^{\infty} f(x,y) dy \text{ καὶ τῆς σταθερᾶς ποσότητος } \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y) dx \text{ αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν}$$

χώρον εἰς τὴν σχέσιν (4). Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (5), διὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y) dx - \int_a^{\ell} dx \int_{\gamma}^{\infty} f(x,y) dy \right| = \left| \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\infty} f(x,y) dx - \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\ell} f(x,y) dx \right| \\ & = \left| \int_{\gamma}^{\infty} dy \int_{\ell}^{\infty} f(x,y) dx \right| = \left| \int_{\gamma}^{\gamma_1} dy \int_{\ell}^{\infty} f(x,y) dx + \int_{\gamma_1}^{\infty} dy \int_{\ell}^{\infty} f(x,y) dx \right| \\ & \leq \left| \int_{\gamma}^{\gamma_1} dy \int_{\ell}^{\infty} f(x,y) dx \right| + \int_{\gamma_1}^{\infty} dy \int_{\ell}^{\infty} |f(x,y)| dx \leq \left| \int_{\gamma}^{\gamma_1} dy \int_{\ell}^{\infty} f(x,y) dx \right| + \\ & + \int_{\gamma_1}^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x,y)| dx \quad (6), \text{ διὰ τὰδε } \gamma_1 > \gamma. \end{aligned}$$

Έπειδή εξ υποθέσεως το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma}^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x,y)| dx$ συγχλίνει, ἔπεται ὅτι
 διὰ τὰδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\gamma_1 > \gamma$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$\int_{\gamma_1}^{\infty} dy \int_a^{\infty} |f(x,y)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7)$$

Ἦδη σταθεροποιῶμεν μίαν τιμὴν τοῦ $\gamma_1 > \gamma$ διὰ τὴν ὁποῖαν νὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνι-
 σότης (7) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ ολοκλήρωμα $\int_a^{\infty} f(x,y) dx$ συγχλίνει ὁ-
 μαλῶς ἐκλέγομεν μίαν ποσότητα $L(\varepsilon)$ τοιαύτην, ὥστε νὰ πληροῦται ἡ ἀνι-

σότης $\left| \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(y_1-y)}$ δι' όλα τα $\ell > L(\varepsilon)$ και δι' όλα τα $y \in [y, y_1]$ (6).

σχετικώς όρισμόν σε λ. 201-202, έυτενέστερον δέ, Τόμον Α' σε λ. 657-658).

Ούτω θά έχωμεν:

$$\left| \int_y^{y_1} dy \int_{\ell}^{+\infty} f(x,y) dx \right| < \frac{\varepsilon(y_1-y)}{2(y_1-y)} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (8)$$

δι' όλα τα $\ell > L(\varepsilon)$.

Λαμβάνοντες υπό όψιν τας σχέσεις (6), (7), (8) θά έχωμεν τελιωώς την ανίσότητα:

$$\left| \int_y^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y) dx - \int_a^{\ell} dx \int_y^{+\infty} f(x,y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (9)$$

δι' όλα τα ℓ .

Έν τής σχέσεως (9) λαμβάνομεν τελιωώς:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_a^{\ell} dx \int_y^{+\infty} f(x,y) dy = \int_y^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y) dx \quad \eta$$

$$\int_a^{+\infty} dx \int_y^{+\infty} f(x,y) dy = \int_y^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y) dx. \quad \text{ό. έ. ό.}$$

Παρατήρησις: Πρέπει νά σημειωθῇ ιδιαιτέρως ότι παρόμοια θεωρήματα ισχύουν επίσης και διά γενικευμένα όλουλήρωματα μή φραγμένων συναρτήσεων.

Εφαρμογή. 1^η: Χρησιμοποιώντας τό όλουλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$, ($\lambda > 0$), δείξατε ότι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log\left(\frac{b}{a}\right), \quad (0 < a < b) \quad (\text{όλουλήρωμα τού Frullani})$$

Λύσις: Έστω $f(x, \lambda) \equiv e^{-\lambda x}$. Αυτή είναι συνεχής διά καθε $\lambda > 0$, τό δέ γενικευμένον όλουλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ συνηθίνει όμαλώς ως πρός $\lambda \in [y, +\infty]$, ($y > 0$) και ίσούται μέ:

$\varphi(\lambda) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$. Η $\varphi(\lambda)$ διά $\lambda > 0$, συμφώνως πρός τό θεώρημα VII-13-1, είναι συνεχής και εάν $0 < a \leq \lambda \leq b$ δι' εφαρμογής τού τύπου (1) τού θεωρήματος VII-13-2 έχομεν:

$$\int_a^b \varphi(\lambda) d\lambda = \int_a^b \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right\} d\lambda = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_a^b e^{-\lambda x} d\lambda \right\} dx \quad (1)$$

Άλλό: $\int_a^b \varphi(\lambda) d\lambda = \int_a^b \frac{1}{\lambda} d\lambda = \log b - \log a = \log\left(\frac{b}{a}\right)$ και $\int_a^b e^{-\lambda x} d\lambda = -\frac{e^{-\lambda x}}{x} \Big|_a^b = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$, όθεν

ή (1) δίδει:

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \int_a^b e^{-\lambda x} d\lambda \right\} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Εφαρμογή 2^η Να υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{\eta \mu x}{x} dx$

Λύσις: Πρὸς τοῦτοις θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν:

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\eta \mu x}{x} dx \quad (1)$$

αὐτὸ τὸ ὁλοκλήρωμα συνηθίζει ὁμαλῶς ἐὰν $\lambda \geq 0$, ἐνῶ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \eta \mu x dx \quad (2)$$

συνηθίζει ὁμαλῶς ἐὰν $\lambda \geq \delta > 0$, ὅπου δ εἶναι ἓνας ἀνθαίρετος μιμρὸς θετικὸς ἀριθμὸς.

Τᾶνωτέρω δὰ τὰ ἀποδείξωμεν κατωτέρω.

Ἡ $\varphi(\lambda)$ διὰ $\lambda \geq 0$, συμφῶνως πρὸς τὸ θεωρήμα VII-13-1, εἶναι συνεχὴς καὶ ἐὰν $\lambda \geq \delta$ δὰ ἔχωμεν:

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{-\lambda x} \frac{\eta \mu x}{x}) dx \quad \eta$$

$$\varphi'(\lambda) = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \eta \mu x dx \quad (3)$$

Τὸ τελευταῖον τοῦτο ὁλοκλήρωμα υπολογίζεται εὐκολῶς ἐφαρμόζοντες τὴν κατὰ παράγοντας ὁλοκλήρωσιν καὶ δὰ ἔχωμεν:

$$\varphi'(\lambda) = - \frac{1}{1+\lambda^2} \quad (4)$$

Ἐκ τῆς (4) δι' ὁλοκλήρωσεως λαμβάνομεν:

$$\varphi(\lambda) = \text{τοξ}_0 \sigma \varphi \lambda + C \quad (5)$$

ὅπου C εἶναι μῖα ἀνθαίρετος σταθερά.

ἘΕ ἄλλου ἐπειδὴ

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\eta \mu x}{x} dx \right| \leq \left| \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \quad (6)$$

τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἐὰν $\lambda \geq \delta$, παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi(\lambda) = 0$.

ἘΕ ἄλλου $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \text{τοξ}_0 \sigma \varphi \lambda = 0$.

Λαμβάνοντες λοιπὸν τὰ ὅρια τῆς (5) διὰ $\lambda \rightarrow \infty$, συνάγομεν ὅτι δὰ πρέπει $C = 0$.

Συνεπῶς:

$$\varphi(\lambda) = \text{τοξ}_0 \sigma \varphi \lambda \quad (7)$$

Λόγω της συνεχείας της $\varphi(\lambda)$ έχουμε έυ της (1)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) = \varphi(0) = \int_0^{\infty} \frac{\pi u x}{x} dx \quad (8)$$

Έυ της (7) λαμβάνομεν:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \text{το } \Sigma_0 \sigma \varphi \lambda = \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

Έυ των (8) και (9) λαμβάνομεν τελικώς:

$$\int_0^{\infty} \frac{\pi u x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

Ήδη δ' αποδείξαμεν τήν όμαλήν σύγκλισιν των όλουθηρωμάτων (1) και (2). Πράγματι, διά τό όλουθήρωμα (1) εάν u είναι ένας ανόδιαιρετος δετιυός αριθμός και $\kappa \Pi$ είναι τό έλάχιστον πόλλαπλάσιον του Π τό όποϊον υπερβαίνει τόν u , τότε δά έχωμεν:

$$\int_u^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\pi u x}{x} dx = \int_u^{\kappa \Pi} e^{-\lambda x} \frac{\pi u x}{x} dx + \sum_{n=\kappa}^{\infty} \int_{n\Pi}^{(n+1)\Pi} e^{-\lambda x} \frac{\pi u x}{x} dx.$$

Τό τελευταϊόν άθροισμα είναι μία έναλλιάσσουσα σειρά της όποιας οι όροι τείνουν απόλυτως πρός τό μηδέν. Όθεν, κατά τήν πρότασιν VIII-4-1 (κριτήριον του Leibniz) Τόμος I, σελ. 271 ή σειρά αύτη συγκλίνει και επί πλέον ή απόλυτος τιμή του άθροίσματος είναι μιμροτέρα από τόν πρώτον όρον της σειράς (όστις θεωρείται δετιυός). Έχομεν λοιπόν:

$$\begin{aligned} \left| \int_u^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\pi u x}{x} dx \right| &< \int_u^{\kappa \Pi} e^{-\lambda x} \frac{|\pi u x|}{x} dx + \int_{\kappa \Pi}^{(\kappa+1)\Pi} e^{-\lambda x} \frac{|\pi u x|}{x} dx \\ &= \int_u^{(\kappa+1)\Pi} e^{-\lambda x} \frac{|\pi u x|}{x} dx < \int_u^{(\kappa+1)\Pi} \frac{dx}{u} < \frac{2\Pi}{u} < \varepsilon. \end{aligned}$$

(διότι $e^{-\lambda x} < 1$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{u}$ και $|\pi u x| \leq 1$).

Όστε εάν $u > \frac{2\Pi}{\varepsilon} \equiv \delta(\varepsilon)$, τότε $\left| \int_u^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\pi u x}{x} dx \right| < \varepsilon$.

Επί πλέον τό όλουθήρωμα (1) διά $\lambda=0$ υπάρχει, βλ. Τόμος I, σελ. 544. Έυ των

ἀναπτέρω συνάγουμεν ὅτι τὸ ὁλοκληρώμα (1) συγκλίνει ὁμαλῶς διὰ καθε $\lambda \geq \alpha$.
(Διὰ τὴν ὁμαλήν σύγκλισιν τοῦ (1) παραπέμπομεν ἐπίσης εἰς τὸν Τόμον Α₁,
σελ. 573-574, ἀσκήσεις 4-5).

Ἡ ὁμαλή σύγκλισις τοῦ (2) συνάγεται ὡς ἀπολούδως. Ἐπειδὴ εἶναι, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\lambda x} = 0$,
διὰ $\lambda \geq \delta > 0$ ἔπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν: $e^{-\lambda x} < \frac{1}{x^2}$ διὰ x ἄρκεστως
μεγάλο, ἥτοι διὰ καθε $x > x_0$. Ἐάν λοιπὸν λάβωμεν $M(x) = \frac{1}{x^2}$ καὶ γνωστοῦ ὄν-
τως ὅτι τὸ $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ συγκλίνει, ἔπεται κατὰ τὸ κριτήριον τοῦ Weierstrass (βλ.
Τόμο Α₁ σελ. 572, Θεώρ. XV-9-1) καὶ τὸ $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \eta(x) dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς
διὰ καθε $\lambda \geq \delta > 0$.

§ 14. ΤΟ ΔΙΠΛΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΟΣΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ ΤΟΥ

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(x, y)$ ἡ ὁποία εἶναι φραγμένη καὶ ὁλοκληρώ-
σιμος ἐπὶ τοῦ χωρίου $D \subset \mathbb{R}^2$.

Ἐστω ἓνα τυχόν σημεῖον $(\alpha, \gamma) \in D$ καὶ θεωροῦμεν τὸ ὀρθογώνιον $T = [\alpha, x] \times [\gamma, y]$
περιεχόμενον ἐντὸς τοῦ D .

Τὸ διπλὸν ὁλοκληρώμα :

$$\iint_T f(u, v) du dv$$

ἐξαρτᾶται ἐνίστοτε ἐκ τῶν x καὶ y , ἥτοι εἶναι συνάρτησις τῶν $x, y \in D$. Ἐπομένως
δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$F(x, y) = \int_{\alpha}^x \left\{ \int_{\gamma}^y f(u, v) dv \right\} du.$$

Ἡ συνάρτησις $F(x, y)$ παρουσιάζει ὠρισμένας ιδιότητες συνεχείας καὶ δια-
φορισιμότητος τὰς ὁποίας καὶ θὰ ἐξετάσωμεν.

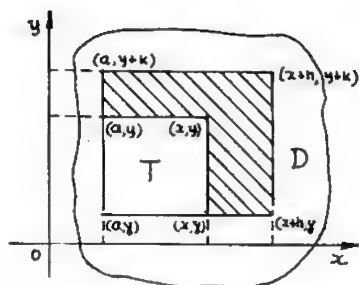
Πρότασις VIII-14-1. Ἐάν ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ εἶναι φραγμένη καὶ ὁλοκλη-
ρώσιμος ἐν D , τότε ἡ συνάρτησις $F(x, y) = \int_{\alpha}^x \int_{\gamma}^y f(u, v) dv du$ εἶναι συνεχὴς.

Ἀπόδειξις: Ἐστω τὸ σταθερὸν σημεῖον (α, γ) τοῦ D καὶ τὰ σημεία (x, y)
καὶ $(x+h, y+k)$ τοιαῦτα ὥστε τὰ ὀρθογώνια $[\alpha, x] \times [\gamma, y]$ καὶ $[\alpha, x+h] \times [\gamma, y+k]$

να εὐρίσκονται ἐντὸς τοῦ χώρου D .

(βλ. Σχ. 1).

$$\begin{aligned}
 F(x+h, y+k) - F(x, y) &= \\
 &= \int_a^{x+h} du \int_y^{y+k} f(u, v) dv - \int_a^x du \int_y^y f(u, v) dv \\
 &= \int_a^x du \int_y^{y+k} f(u, v) dv + \int_x^{x+h} du \int_y^{y+k} f(u, v) dv - \int_a^x du \int_y^y f(u, v) dv \\
 &= \int_a^x du \int_y^y f(u, v) dv + \int_a^x du \int_y^{y+k} f(u, v) dv + \int_x^{x+h} du \int_y^{y+k} f(u, v) dv - \int_a^x du \int_y^y f(u, v) dv \\
 &= \int_a^x du \int_y^{y+k} f(u, v) dv + \int_x^{x+h} du \int_y^{y+k} f(u, v) dv.
 \end{aligned}$$



Σχ. 1

Ἐπειδὴ ἡ $f(u, v)$ εἶναι φραγμένη ἐν D θὰ εἶναι $|f(u, v)| \leq M$ διὰ πάθε $(u, v) \in D$.

Ὅθεν ἔχομεν:

$$|F(x+h, y+k) - F(x, y)| \leq \left| \int_a^x du \int_y^{y+k} M dv \right| + \left| \int_x^{x+h} du \int_y^{y+k} M dv \right| = M \cdot |x-a| \cdot |k| + M \cdot |h| \cdot |y+k-y|.$$

Τὸ τελευταῖον ἀποδεικνύει τὴν συνέχειαν τῆς $F(x, y)$.

Πρόταση VII-14-2. Ἐὰν ἡ $f(x, y)$ εἶναι συνεχὴς ἐν D , τότε ἡ συνάρτησις

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_y^y f(u, v) dv$$

ἔχει περιβάς παραγώγους ὡς πρὸς x καὶ y συνεχεῖς δίδομενας ὑπὸ τῶν τύπων:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_y^y f(x, v) dv, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x f(u, y) du.$$

Ἐπὶ πλεόν ὑπάρχει καὶ ἡ $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, εἶναι συνεχὴς καὶ παρέχεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἔξ ὑποθέσεως ἡ $f(u, v)$ εἶναι συνεχὴς ἐν D , ἔπεται ὅτι ἡ συνάρτησις:

$$\phi(u, y) = \int_y^y f(u, v) dv$$

εἶναι συνεχὴς διὰ πάθε $(u, y) \in D$. Συνεπῶς ἡ $\phi(u, y)$ θὰ εἶναι καὶ ὁλοκλη-

ρήσιμος ως προς u . Όθεν,

$$\int_a^x \phi(u, y) du = \int_a^x du \int_y^y f(u, v) dv \equiv F(x, y)$$

$$\text{Είναι δε: } \left(\int_a^x \phi(u, y) du \right)'_x = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \phi(x, y) = \int_y^y f(x, v) dv.$$

$$\text{Έδειχθη ότι: } \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_y^y f(x, v) dv.$$

Όμοίως θέτουμεν: $\psi(x, y) = \int_a^x f(u, v) du$ και ως ανωτέρω, αποδεικνύομεν ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \psi(x, y) = \int_a^x f(u, y) du.$$

Τέλος διά να αποδείξωμεν την ύπαρξιν της $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ παρατηρούμεν ότι αἱ συναρτήσεις:

$$\phi(x, y) = \int_y^y f(x, v) dv \text{ καὶ } \psi(x, y) = \int_a^x f(u, y) du \text{ ἔχουν μεριμνάς πα-}$$

ραγώρους ως προς y καὶ x ἀντιστοίχως. Ἐχομεν λοιπόν:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_y^y f(x, v) dv \right) = f(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_a^x f(u, y) du \right) = f(x, y)$$

Ἐν τῶν δύο τελευταίων σχέσεων συνάγομεν:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y).$$

Ἐφαρμογή: Νά εὐρεθῇ μία συνάρτησις $F(x, y)$ τοιαύτη, ὥστε $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ (Διαφορικὴ ἑξίσωσις μετὰ μεριμνῶν παραγώγων).

Λύσις: Κατὰ τ' ἀνωτέρω ἡ $F(x, y)$ θά παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_y^y f(u, v) dv + \phi_1(x) + \phi_2(y)$$

ὅπου $\phi_1(x)$, $\phi_2(y)$ τυχοῦσαι συναρτήσεις παραγωγίσιμοι ως πρὸς x καὶ y ἀντιστοίχως.

Συμπληρώματα και άσκησεις:

1. Να υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\iint_D (x^2+y) dx dy$ ὅπου D εἶναι τὸ χωρίον πού περι-
υφείεταί ὑπὸ τῶν παραβολῶν: $y=x^2, x=y^2$.
2. Να υπολογισθῇ κατὰ δύο τρόπους τὸ ὅλουλήρωμα $\iint_D (x^2+y^2) dx dy$, ὅπου D εἶναι
τὸ χωρίον τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τῆς εὐθεΐας $x=2, y=1$ καὶ τὴν παραβολὴν $y=x^2$.
3. Να υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\iint_D x dx dy$, ὅπου τὸ χωρίον D φράσσεται ὑπὸ
τῶν καμπύλων: $x=y^2, x=2y-y^2, x=2-y^2-2y$.
4. Να υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\iint_D x dx dy$, ὅπου τὸ D φράσσεται ὑπὸ τῆς κα-
μπύλης $x^2+x^2-y^2=0$ καὶ τῆς εὐθείας $x=1$.

5. Δείξατε ὅτι: $\int_0^1 \left\{ \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right\} dx = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right\} dy = \frac{-1}{2}$.

6. Διαιολογίσατε διατί δὲν δυνάμεθα εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσηὶ νὰ ἐναλλὰξω-
μεν τὰ x καὶ y κατὰ τὴν ὁλουλήρωσιν.

6. Δείξατε ὅτι $\int_0^x \left\{ \int_0^t F(u) du \right\} dt = \int_0^x (x-u) F(u) du$.

7. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν πολυωνύμων συντεταγμένων νὰ υπολογισθοῦν τὰ ὅλο-
υλήρωματα: α) $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx$, β) $\int_0^{12} \int_0^{\sqrt{12x-x^2}} dy dx$

8. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς πολυωνύμων συντεταγμένων υπολογίσατε τὸ ὅλουλήρωμα
 $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, ὅπου D εἶναι τὸ τμήμα τοῦ ἀκτινίου $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)=0$ μὲ $x \geq 0$.

9. Να υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, ὅπου $D = \{(x,y): x^2+y^2=2x\}$.

10. Να υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιυλειόμενου ὑπὸ τῆς καμπύλης:

α) $\rho = a \sin 2\theta$, β) $\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$ (ἀκτινίος).

11. Υπολογίσατε τὸ ἔμβαδὸν τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐσωτερικῶς τοῦ κύβου $\rho = 4\pi\theta$ καὶ ἔξωτερικῶς τοῦ ῥημνίσκου $\rho^2 = 8\sin 2\theta$.
12. Νὰ εὕρεθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$ ποὺ περικύβηται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύβου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
13. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $y^2 + z^2 = a^2$ ποὺ ἀποκόπτεται ἀπ' αὐτὴν ὁ κύλινδρος $x^2 + y^2 = a^2$.
14. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $x^2 + y^2 = a^2$ τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων $z = \pi x$ καὶ $z = 0$.
15. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τμήματος τοῦ παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ περικυβημένου ἀνωθεν τοῦ ἐπιπέδου oxy καὶ τεμνόμενον ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z = 2$.
16. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας $z^2 = \frac{x^2 + y^2}{3}$, τὸ ὁποῖον περικύβηται ἀνωθεν τοῦ ἐπιπέδου oxy καὶ εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου $y = \frac{x^2 + y^2}{4}$.
17. Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον περιγράφεται ἀπὸ τὴν σφαῖραν $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ καὶ τὸν κύλινδρον $x^2 + y^2 = ax$.
18. Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος V τὸν ὁποῖον περιλαμβάνει τὸ ἐλλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$.
19. Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος τετραέδρου τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{\gamma} = 1$ καὶ τῶν τριῶν συντεταγμένων ἐπιπέδων.
20. Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ποὺ περιλαμβάνεται ἀπὸ τὰς δύο κυλινδρικὰς ἐπιφανείας $x^2 + y^2 = a^2$ καὶ $x^2 + z^2 = a^2$.
21. Νὰ υπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ποὺ περιλαμβάνεται ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $z = -1$ καὶ ἀπὸ τὰς δύο κυλινδρικὰς ἐπιφανείας $y - z = x^2 - 2$, $y + z = -x^2 + 6$.

22. Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού, το όποιον ορίζεται από τας επιφάνειας:

$$x^2 + y^2 = a^2, \pm \{ \sigma(x) + \sigma(y) \} = \theta \cdot \sigma(x) + \gamma \cdot \sigma(y),$$

ένθα: $a, \theta, \gamma > 0$ και $\sigma(x) > 0$, είναι ανεξάρτητος της συναρτήσεως σ .

23. Νά εύρεθούν αι συντεταγμέναι του υ.β. του όμογενοϋς ημικυλίου με εξίσω-
σιν: $x^2 + y^2 = a^2$ και $y \geq 0$.

24. Νά εύρεθούν οι συντεταγμέναι του υ.β. του όμογενοϋς χωρίου το όποιον εύρί-
σμεται έξωτεριωϋ του κύβου $\rho = 1$ και έξωτεριωϋ της καρδιοειδούϋ $\rho = 1 + \sin \theta$.

25. Νά υπολογισθῇ ἡ ροπή αδρανείας της όμογενοϋς ἑλληΐψεως $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

α) ὡς πρὸς τὸν ἄξονα οy, β) ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

26. Νά υπολογισθῇ ἡ ροπή αδρανείας του όμογενοϋς επιπέδου σχήματος το
όποιον περιυλίζεται υπό της παραβολῆϋ $y^2 = ax$ και της εϋθείας $x = a$ ὡς
πρὸς τὴν εϋθείαν $y = -a$.

27. Νά υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδόν το όποιον περιυλίζει ἡ ἑλληΐψις $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(Υπόδ: Ἐυτελέσατε τὸν μετασχηματισμόν $x = a \cdot \rho \sin \theta, y = b \cdot \rho \eta \theta$).

28. Υπολογίσατε τὸ όλουιτήριομα $\iint_D (x+y+y^2) dx dy$, όπου D είναι τὸ σύνολον πῶν
σημείων (x, y) με $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5 \leq 0$:

29. Ἐστω ότι D είναι τὸ χωρίον πού φράσσεται υπό τῶν $x+y=1, x=0, y=0$: Δείξατε ότι:

$$\iint_D \sin\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \frac{\pi \mu}{2} \quad (\text{Υπόδ. θέσατε } x-y=u, x+y=v)$$

30. Δείξατε ότι διά του μετασχηματισμοϋ $x = \frac{v}{1+u}, y = \frac{uv}{1+u}$ τὸ όλουιτήριομα:

$$\int_0^a \left\{ \int_0^x f(x, y) dy \right\} dx = \int_0^1 \int_0^{a(1+u)} f\left[\frac{v}{1+u}, \frac{uv}{1+u}\right] \frac{v}{(1+u)^2} du dv.$$

31. Νά υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἐπιπέδου χωρίου ποὺ περιυφίσταται ὑπὸ τῶν καμπύλων: $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$, $xy^3 = 15$.

(Υπόδ: θέσατε $xy = u$, $xy^3 = v$).

32. Νά υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\iint_D xy \, dx \, dy$, ὅπου ὁ τόπος D ὁρίζεται ὑπὸ τῶν καμπύλων:

$$y^2 = x, y^2 = 2x, x^2 = y, x^2 = 2y$$

(Υπόδ: χρησιμοποιήσατε τὸν μετασχηματισμὸν $u = \frac{y^2}{x}$, $v = \frac{x^2}{y} \Rightarrow u \cdot v = xy$ κ.τ.λ.).

33. Νά υπολογισθῇ τὸ $\iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, ὅπου τὸ χωρίον D εἶναι τὸ τετράγωνον: $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

34. Δείξατε ὅτι τὸ ὅλουλήρωμα $\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\eta \mu \beta x}{x} \, dx$ συγκλίνει ὁμαλῶς διὰ πάθε $0 \leq \lambda < +\infty$ καὶ σταθερὸν $\beta \neq 0$. Ἐν συνεχείᾳ δείξατε ὅτι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\eta \mu \beta x}{x} \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ἐὰν } \beta > 0 \\ 0 & \text{" } \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{" } \beta < 0 \end{cases}$$

35. Δείξατε ὅτι: $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Ei} \left(\frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \log(\lambda^2 + 1)$, $\lambda > 0$

36. Υπολογίσατε τὸ ὅλουλήρωμα: $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} \, dx \, dy$, ὅπου $D = \{(x, y) : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

37. Δείξατε ὅτι: $\frac{d}{d\lambda} \int_{\eta \mu \lambda}^{\sigma \nu \lambda} \log(x + \lambda) \, dx = \log \frac{\sigma \nu \lambda + \lambda}{\eta \mu \lambda + \lambda} - [\eta \mu \lambda \log(\sigma \nu \lambda + \lambda) + \sigma \nu \lambda \log(\eta \mu \lambda + \lambda)]$.

38. Ἐστω ὅτι ἡ $f(t)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $0 \leq t \leq 2\pi$ καὶ ἔστω

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} \, dt \quad (1)$$

διὰ $r < 1$, τὰ r καὶ θ εἶναι πολικαὶ συντεταγμέναι. Δείξατε ὅτι διὰ $r < 1$ εἶναι

$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$ δηλ. ἡ $u(r, \theta)$ εἶναι ἁρμονικὴ συνάρτησις. Ὁ (1) καλεῖται τύπος τοῦ Poisson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΤΡΙΠΛΑ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

§ 1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

I. Εἰσαγωγικαὶ γνώσεις. Οἱ ὅρισμοί ὅπου ἐδώσαμεν διὰ τὸν χώρον \mathbb{R}^2 τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων, τῆς ε-περιοχῆς, τοῦ ἔσωτεριου σημείου ἑνὸς συνόλου, τοῦ συνόρου, τῆς διαμέτρου ἑνὸς συνόλου καὶ τῆς ἀποστάσεως δύο συνόλων μεταφέρονται ἄνευ δυσκολίας καὶ διὰ τὰ σύνολα τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 .

Ὁμοίως τὸ θεώρημα τῆς διαχωρισιμότητος καὶ τὸ θεώρημα τῶν Hahn-Borel-Lebesgue ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ κλειστά καὶ φραγμένα σύνολα τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 . Τέλος τὸ θεώρημα τῆς ὁμαλῆς συνεχείας παραμένει καὶ αὐτὸ ἰσχύον.

II. Γενιὰ περί ὅρων τῶν χωρίων τοῦ \mathbb{R}^3 . Ὅταν ὀρίσαμεν τὸ διπλοῦν ὁλοκληρώμα ἰστηρίχθημεν εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπιπέδου σχήματος. Κατ'ἀναλογίαν ὁ ὀρισμός τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος στηρίζεται εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου, ἑνὸς στερεοῦ σώματος. Τὴν ἔννοιαν τοῦ ὅρου ἑνός πολυεδριουῦ στερεοῦ τὴν θεωροῦμεν ὡς ἀποσπασμένην ἀπὸ τὴν στοιχειώδη Γεωμετρίαν.

Ἄς θεωρήσωμεν ἓνα αὐθαίρετον χωρίον Φ τοῦ \mathbb{R}^3 καὶ πάντα τὰ πολυεδρικὰ σχήματα P τὰ ὅποια περιέχονται εἰς αὐτό. Οἱ ὅροι αὐτῶν τῶν πολυεδρικῶν στερεῶν προφανῶς φράσσονται ἐν τῶν ἄνω ὑπὸ τοῦ ὅρου ἑνός πολυεδριουῦ στερεοῦ τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ χωρίον Φ . Ὁμοίως ἐὰν θεωρήσωμεν πάντα τὰ πολυεδρικὰ σχήματα Q τὰ ὅποια περιέχουν τὸ Φ οἱ ὅροι τούτων φράσσονται ἐν τῶν κατω ὑπὸ τοῦ ὅρου ἑνός πολυεδριουῦ στερεοῦ τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ Φ . Ὅθεν, οἱ ὅροι τῶν P ἔχουν ἓν ἀνώτερον πέρασ καὶ οἱ ὅροι τῶν Q ἔχουν ἓνα κατώτερον πέρασ. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοὺς ἀριθμούς :

$$\left. \begin{aligned} V_* &= V_*(\Phi) = \sup_{P \subset \Phi} (\text{ὅρυ. } P) \\ V^* &= V^*(\Phi) = \inf_{Q \supset \Phi} (\text{ὅρυ. } Q) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (1a) \\ (1b) \end{aligned}$$

Προφανῶς $V_* \leq V^*$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου $V_* = V^* = V$ τότε τὴν κοινήν τιμὴν καλοῦμεν ὄγκον τοῦ χωρίου Φ , τὸ δὲ χωρίον Φ καλεῖται κυβίσιμον.

Σχετικῶς ἰσχύει ἡ κατωδί:

Πρότασις VIII-1-1. Ἐνα χωρίον Φ τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 εἶναι κυβίσιμον ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν, διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχουν δύο πολυεδρικά στερεά $P \subset \Phi$ καὶ $Q \supset \Phi$ τοιαῦτα ὥστε: $\text{ὄγκ. } Q - \text{ὄγκ. } P < \varepsilon$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἕνα σύνολον ἔχει ὄγκον μηδέν ἐὰν αὐτό δύναται νὰ ἐγκλεισθῇ εἰς ἕνα πολυεδρικόν στερεόν ἀνδιαφρέτως μικροῦ ὄγκου.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

→ Ἴνα ἕνα στερεόν ἔχει ὄγκον πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σύννορόν του νὰ ἔχῃ μηδενικόν ὄγκον.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἐὰν Φ_1, Φ_2 εἶναι δύο στερεά σχήματα ἔχοντα ὄγκους καὶ ἡ ἔνωσης αὐτῶν Φ ἔχει ὄγκον. Ἐὰν δὲ τὰ σχήματα δὲν ἔχουν κοινὰ ἐσώτερικὰ σημεῖα, ὁ ὄγκος τοῦ Φ ἴσουςται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν Φ_1 καὶ Φ_2 .

Ὁμοίως, ἡ τομὴ δύο σχημάτων ἔχόντων ὄγκον εἶναι ἕνα σχῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον.

Παρατήρησις:* Ὡς γνωστόν ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ στερεόν Φ τὸ ὁποῖον φράσσεται ὑπὸ μιᾶς καμπυλογράφου κυλινδρικοῦ ἐπιφανείας, καὶ τὴν δὲ ὑπὸ ἑνὸς τετραγωνισίου ἐπιπέδου χωρίου D τοῦ ἐπιπέδου oxy καὶ ἄνω ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας ἐκούσης ἐξίσωσιν τὴν $Z = f(x, y)$, τότε ὁ ὄγκος αὐτοῦ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy, (x, y) \in D \quad (2)$$

Ἐξ ἄλλου ὁ ὄγκος τοῦ προαναφερθέντος στερεοῦ παρέχεται, ἐξ ὁρισμοῦ, ὑπὸ τῶν τύπων (1a) ἢ (1b).

Ἀποδεικνύεται ὅτι, διὰ μίαν εὐρεῖαν καὶ ἄσιν στερεῶν σχημάτων ὅπως διὰ σχημάτων τὰ ὁποῖα φράσσονται ὑπὸ τμηματικῶς λείων¹⁾ ἐπιφανειῶν, οἱ δύο τύ-

1) Μία ἐπιφάνεια $z = f(x, y)$ καλεῖται λεία ἐὰν ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι f'_x, f'_y εἶναι δὲ καὶ συνεχεῖς.

ποι (1_α) ή (1_β) είναι ισοδύναμοι προς τόν (2).

III. Όρισμός του τριπλού όλουιτηρώματος.

Έστω $f(x, y, z)$ μία φραγμένη συνάρτησις: ώρισμένη εις ένα χωρίον V τό όποιον έχει όγκον. θεωρούμεν μίαν διαμέρισιν Φ του άνωτέρω χωρίου εις τά χωρία V_1, V_2, \dots, V_n και άς υποθέσωμεν ότι έυαστον τούτων έχει όγκον $\Delta U_1, \Delta U_2, \dots, \Delta U_n$. εις έυαστον των χωρίων $V_p, 1 \leq p \leq n$ λαμβάνομεν έν τυχόν σημείον (E_p, η_p, ζ_p) και άνολούδως σχηματίζομεν τό άθροισμα:

$$Z_n = \sum_{p=1}^n f(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta U_p \quad (3)$$

Τό άθροισμα (3) καλεϊται άθροισμα του Riemann ως προς τήν συνάρτησιν $f(x, y, z)$ και τήν διαμέρισιν Φ εις τό χωρίον V .

Έάν D παριστά τήν μεγίστην των διαμέτρων $\delta(V_p)$ των χωρίων V_p τό D καλεϊται διεπτότης της διαμερίσεως.

Όρισμός VIII-1-1. Ένας αριθμός T θα λέγωμεν ότι είναι τό όριον των άθροισμάτων του Riemann (3) καθώς τό $D \rightarrow 0$, εάν διά καάδε $\epsilon > 0$ υπάρχι ένας αριθμός $\delta(\epsilon) > 0$ τοιοούτος, ώστε διά καάδε διαμέρισιν Φ μέ $D < \delta(\epsilon)$ και διά καάδε έυλογή των σημείων $(E_p, \eta_p, \zeta_p) \in V_p$ κα έχωμεν:

$$\left| \sum_{p=1}^n f(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta U_p - T \right| < \epsilon.$$

Έάν υπάρχι ό αριθμός T ούτος είναι τό όριον:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ D \rightarrow 0}} \sum_{p=1}^n f(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta U_p$$

των άθροισμάτων του Riemann και καλεϊται τριπλό όλουιτηρώμα της συναρτήσεως $f(x, y, z)$ επί του χωρίου V και συμβολίζεται ούτω:

$$\iiint_V f(x, y, z) du \quad \eta \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

$$\text{ήτοι έξ όρισμού:} \quad \iiint_V f(x, y, z) du \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ D \rightarrow 0}} \sum_{p=1}^n f(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta U_p.$$

Εάν $f(x, y, z) = 1$ διά υάθε $(x, y, z) \in V$, τότε θα έχουμε:

$$\iiint_V 1 \cdot dx dy dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n \Delta V_p = \text{όγκο } V$$

Ήθεν,

$$\boxed{\text{όγκο } V = \iiint_V dx dy dz} \quad (4)$$

IV. Συνθήκαι υπάρξεως του τριπλού ολοκληρώματος.

Έστω $f(x, y, z)$ μία φραγμένη συνάρτησις ώρισμένη επί του υυβισίμου χωρίου V και έστω Φ μία διαμέρισις αυτού. Άς συμβολίσωμεν διά του M_p και m_p το άνωτερον και κατώτερον πέρας της $f(x, y, z)$ επί των υυβισίμων χωρίων V_p πού προκύπτουν έκ του V διά της διαμερίσεως Φ .

Διά την συνάρτησιν $f(x, y, z)$ σχηματίζομεν τά άθροίσματα:

$$T^*(\Phi) = \sum_{p=1}^n M_p \cdot \Delta V_p \quad (5a)$$

$$T_*(\Phi) = \sum_{p=1}^n m_p \Delta V_p \quad (5\beta)$$

όπου ΔV_p είναι ο όγκος του χωρίου V_p .

Τά άθροίσματα (5a) και (5β) καλοϋνται άνω και κάτω άθροισμα του Darboux της $f(x, y, z)$ αντιστοιχούντα εις την διαμέρισιν Φ .

Πάσαι αι ιδιότητες των άθροισμάτων του Darboux αι έξετασθεΐσαι εις τό κεφάλαιον VIII §3 μεταφέρονται και εδώ.

Η κατωδι έυανή και αναγκαία ~~επει~~ συνθήκη διά την ύπαρξιν ενός τριπλού ολοκληρώματος αποδείκνυεται άπολοιδυντες μιαν ανάλογον πορείαν μέ αυτήν του θεωρήματος VIII-3-1.

Θεώρημα VIII-1-1. Μία φραγμένη συνάρτησις $f(x, y, z)$ ώρισμένη επί ενός υυβισίμου χωρίου V είναι ολοκληρώσιμος επί του V εάν, και μόνον εάν, διά υάθε $\epsilon > 0$ ύπάρχη μία διαμέρισις Φ του V τοιαύτη, ώστε να έχουμε:

$$T^*(\Phi) - T_*(\Phi) < \epsilon.$$

Ἐξ αὐτοῦ τοῦ κριτηρίου ἔπονται τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα VIII - 1-2. Κάθε συνάρτησις $f(x, y, z)$ ὠρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ ἑνὸς κλειστοῦ καὶ φραγμένου χωρίου V εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ τοῦ χωρίου.

Θεώρημα VIII - 1-3. Ἐὰν μία συνάρτησις $f(x, y, z)$ εἶναι φραγμένη ἐπὶ ἑνὸς κλειστοῦ καὶ φραγμένου χωρίου V καὶ εἶναι συνεχὴς παντοῦ ἐπ' αὐτοῦ, δυνατόν ἐντὸς τῶν σημείων ἑνὸς συνόλου ἔχοντος μηδενικὸν ὄγκον, τότε ἡ $f(x, y, z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ V .

V. Ἰδιότητες τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος.

Αἱ βασικαὶ ἰδιότητες τοῦ τριπλοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι πλήρως ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἰδιότητας τοῦ διπλοῦ ὁλοκληρώματος.

1^η/ Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $f_1(x, y, z)$ καὶ $f_2(x, y, z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ χωρίου V , τότε καὶ ἡ συνάρτησις $C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ V καὶ ἰσχύει:

$$\iiint_V [C_1 f_1 + C_2 f_2] \, du = C_1 \iiint_V f_1 \, du + C_2 \iiint_V f_2 \, du.$$

2^η/ Ἐὰν διὰ τὴν ὁλοκληρώσιμον συνάρτησιν $f(x, y, z)$ ἐπὶ τοῦ V ἰσχύῃ $f(x, y, z) \geq 0$, τότε θά εἶναι καὶ:

$$\iiint_V f(x, y, z) \, du \geq 0$$

3^η/ Ἐὰν αἱ $f_1(x, y, z)$ καὶ $f_2(x, y, z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ V καὶ εἶναι $f_1(x, y, z) \leq f_2(x, y, z)$, τότε θά εἶναι:

$$\iiint_V f_1(x, y, z) \, du \leq \iiint_V f_2(x, y, z) \, du.$$

4^η/ Εἶναι: $\left| \iiint_V f(x, y, z) \, du \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| \, du.$

5^η/ Ἐὰν εἶναι $\iiint_V f(x, y, z) \, du = 0$ καὶ ἡ $f(x, y, z)$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ, τότε θά εἶναι $f(x, y, z) = 0$ διὰ πᾶν $(x, y, z) \in V$, ἐντὸς ἑνὸς συνόλου μηδενικοῦ ὁγκοῦ.

53/ Έστω V' είναι έν έσωτεριόν χωρίον του V . Εάν η $f(x, y, z)$ είναι συνεχής επί του V και εάν είναι $\iiint_{V'} f(x, y, z) du = 0$ διά κάθε χωρίον V' , τότε η $f(x, y, z)$ είναι μηδέν εις κάθε σημείον του V .

63/ Εάν V_1 και V_2 είναι δύο χωρία τοιαύτα ώστε $V_1 \cap V_2 = \tilde{V}$ όπου το \tilde{V} έχει μηδενικόν όγκον και έστω $V = V_1 \cup V_2$, τότε δά έχωμεν:

$$\iiint_V f(x, y, z) du = \iiint_{V_1} f(x, y, z) du + \iiint_{V_2} f(x, y, z) du.$$

73/ Εάν η $f(x, y, z)$ είναι ολοκληρώσιμος επί του V και έστω Ω ό όγκος αύτου και M, m τό ανώτερον και κατώτερον πέρας της $f(x, y, z)$ επί του V , τότε δά είναι

$$m \cdot \Omega \leq \iiint_V f(x, y, z) du \leq M \cdot \Omega$$

83/ (Θεώρημα μέσης Τιμής) Έστω η συνεχής συνάρτησις $f(x, y, z)$ επί του κλειστού και φραγμένου χωρίου V τό όποϊον υποθέτομεν συγκεντρικόν. τότε υπάρχει έν τουλάχιστον σημείον $(\xi, \eta, \zeta) \in V$ τοιοῦτον, ώστε να έχωμεν:

$$\iiint_V f(x, y, z) du = \Omega \cdot f(\xi, \eta, \zeta)$$

όπου Ω ό όγκος του V .

§ 2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΡΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Όπως εις την περίπτωση του διπλου ολοκληρώματος ούτω και εδώ η τεχνική υπολογισμού ενός τριπλου ολοκληρώματος ανάγεται εις διαδοχικάς ολοκληρώσεις μιας μεταβλητής δηλ. η ολοκλήρωσις εις ένα χωρίον V του \mathbb{R}^3 γίνεται διά διαδοχικών χωριστών ολοκληρώσεων ως πρός ευάστην των μεταβλητών μέ όρια ολοκληρώσεως έξαρτώμενα έυ των υπολοίπων μεταβλητών. Πρός τούτοις διαυρίνομεν τας κατωθι περιπτώσεις.

I. Τό χωρίον τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἓνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον θεωρούμεν τὸ τριπλοῦν ὁλοκληρώμα:

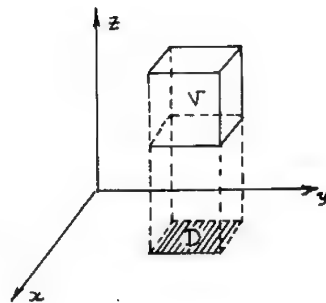
$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz$$

ὅπου τὸ χωρίον V εἶναι ἓνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ὀρισζόμενον ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων:

$$a \leq x \leq b, \gamma \leq y \leq \delta, \kappa \leq z \leq \lambda \quad (\text{βλ. Σχ. 1}).$$

ἡ δὲ προβολὴ αὐτοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy ἔστω ὅτι εἶναι τὸ ὀρθογώνιον D ὀρισζόμενον ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων $a \leq x \leq b, \gamma \leq y \leq \delta$

Σχετικῶς ἰσχύει τὸ κατωθι θεώρημα:



Σχ. 1

Θεώρημα VIII-2-1. Ἐάν διὰ τὴν συνάρτησιν $f(x,y,z)$ ὠρισμένην εἰς τὸ ὡς ἄνω χωρίον V τὸ τριπλοῦν ὁλοκληρώμα $\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz$ ὑπάρχῃ καὶ ἔάν τὸ ὁλοκληρώμα

$I(x,y) = \int_{\kappa}^{\lambda} f(x,y,z) dz$ ὑπάρχῃ διὰ καθε $(x,y) \in D$, τότε τὸ ὁλοκληρώμα

$\iint_D dx dy \int_{\kappa}^{\lambda} f(x,y,z) dz$ ὑπάρχει καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύει:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\kappa}^{\lambda} f(x,y,z) dz \quad (1)$$

Ἡ ἀπόδειξις αὐτοῦ εἶναι ἀνάλογος μετὰ αὐτὴν τοῦ θεωρήματος VIII-7-1 τῶν διπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

Ἐάν υποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει τὸ ὁλοκληρώμα $I(x) = \int_{\gamma}^{\delta} I(x,y) dy$ διὰ καθε ὠρισμένον x τοῦ $a \leq x \leq b$, τότε ἐκ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D I(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\gamma}^{\delta} I(x,y) dy = \int_a^b dx \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\kappa}^{\lambda} f(x,y,z) dz$$

Ὅθεν,

$$\iiint_V f(x,y,z) dv = \int_a^b dx \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_{\kappa}^{\lambda} f(x,y,z) dz \quad (2)$$

Κάμνοντας αναλόγους υποθέσεις έχουμε:

$$\iiint_V f(x,y,z) dv = \int_k^l dz \int_y^b dy \int_a^b f(x,y,z) dx \quad (2_1)$$

$$\iiint_V f(x,y,z) dv = \int_a^b dx \int_k^l dz \int_y^b f(x,y,z) dy \quad (2_2)$$

II. Το χωρίον της όλουληρώσεως είναι καμπυλόγραμμον.

Ἐς υποθέσωμεν ὅτι τὸ χωρίον V τῆς ὁλοκληρώσεως φράσσεται ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν:

$z = z_1(x,y)$ καὶ $z = z_2(x,y)$ καὶ ἔστω D ἡ προβολὴ τούτου εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy (βλ. Σχ. 1). Ἰσχυρῶς ἰσχύει τὸ ἀνόλουθον:

Θεώρημα VIII- 2-2. Ἐάν τὸ τριπλοῦν ὁλουλήρωμα $\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz$ ὑπάρχη καὶ τὸ ὁλο-

υλήρωμα $I(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$ ὑπάρχη διὰ κα-

θε σημείου $(x,y) \in D$, τότε καὶ τὸ ὁλουλήρωμα $\iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$ ὑπάρχει καὶ ἰσχύει:

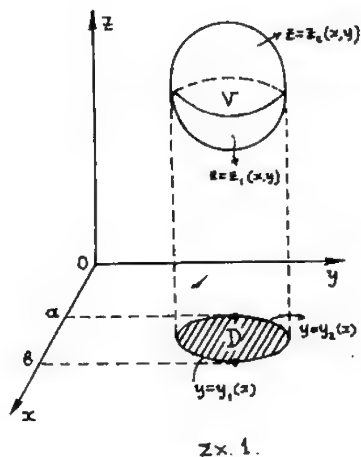
$$\iiint_V f(x,y,z) dv = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$$

• Ἡ ἔκφρασις $I(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$ εἶναι μία συνάρτησις δύο μεταβλητῶν. Ἐάν

διὰ τὴν συνάρτησιν $I(x,y)$ καὶ διὰ τὸ χωρίον D πληροῦνται αἱ συνθήκαι τοῦ θεωρήματος VIII- 7-2, τότε τὸ διπλοῦν ὁλουλήρωμα:

$$\iint_D I(x,y) dx dy$$

δύναται νὰ υπολογισθῇ διὰ διαδοχικῶν ὁλουληρώσεων ἐυτελοῦντες π.χ. πρῶτα τὴν ὁλουλήρωσιν ὡς πρὸς y καὶ ἐν συνεχείᾳ ὁλουληροῦντες τὸ ἀποτέ-



λεσμα αυτό ως προς x . Ούτως εάν το χωρίον D ἔχη ἓνα σύνορον περιυλειόμε-
νον ὑπὸ τῶν καμπύλων $y=y_1(x)$ καὶ $y=y_2(x)$ με $y_1(x) \leq y_2(x)$ (βλ. Σχ. 1) τότε ὁ
τύπος τοῦ θεωρήματος γράφεται:

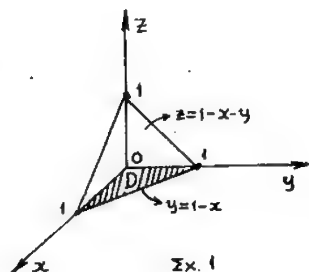
$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (3)$$

Ὁ τελευταῖος τύπος ἀνάρει ἓνα τριπλοῦν ὀλουλήρωμα εἰς τρία διαδοχικά ἀπλά ὀ-
λουλήρώματα με μεταβλητὰ ὅρια ὀλουλήρώσεως.

Ἐφαρμογή 12/. Νά ὑπολοισθῇ τὸ τριπλοῦν ὀλουλήρωμα $\iiint_V xyz dx dy dz$ ἐπὶ τοῦ
τοῦ χωρίου V , τὸ ὁποῖον ὀρίσεται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$.

Λύσις: Αὐτὸ τὸ χωρίον εἶναι κανονιὸν καὶ περι-
ορίσεται ἀνω ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z=1-y-x$ καὶ κατω
ὑπὸ τοῦ $z=0$. Ἡ δὲ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου
 oxy εἶναι τὸ χωρίον D , τὸ ὁποῖον ὀρίσεται ὑπὸ τῶν
ἐξισώσεων $x=0, y=0, y=1-x$, (βλ. Σχ. 1).

Θά ἔχωμεν λοιπὸν:



$$\begin{aligned} \iiint_V xyz dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} xyz dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{xyz^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy \\ &= \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

23/. Νά ὑπολοισθῇ τὸ τριπλοῦν ὀλουλήρωμα $\iiint_V z dx dy dz$, ὅπου τὸ χωρίον V εἶ-
ναι τὸ ὄρθον τῆς σφαίρας τὸ ὀριζόμενον ὑπὸ τῶν σχέσεων $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ καὶ $x \geq 0$,
 $y \geq 0, z \geq 0$.

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (3) θά ἔχωμεν:

$$\iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z \, dz \text{ και διαδοχικῶς λαμβάνομεν:}$$

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z \, dz = \frac{1}{2} (R^2 - x^2 - y^2)$$

$$\text{και } \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2 - x^2 - y^2) \, dy = \left[\frac{1}{2} (R^2 - x^2) y - \frac{1}{6} y^3 \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{3/2}$$

Οὕτω παραμένει νὰ υπολογίσωμεν τὸ ὅλουλήρωμα $\frac{1}{3} \int_0^R (R^2 - x^2)^{3/2} \, dx$. Τοῦτο δὲ διὰ τῆς ἀντιμεταστάσεως $x = R \sin \varphi$ γίνεται ἴσον πρὸς τὸ ὅλουλήρωμα

$$\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \sin^4 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi R^4}{16}$$

Ὅθεν, τὸ δοθέν ὅλουλήρωμα ἰσοῦται πρὸς $\frac{\pi R^4}{16}$.

§3. ΑΛΛΑΓΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΕΙΣ ΕΝΑ ΤΡΙΠΛΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ὅπως εἰς τὸ διπλὸν ὅλουλήρωμα οὕτω καὶ εἰς τὸ τριπλὸν πολλὰς φορές εἶναι ἀναγκαῖον πρὸς διευκόλυνσιν τοῦ υπολογισμοῦ αὐτοῦ νὰ ἀάμνωμεν ἀλλαγὰς τῶν μεταβλητῶν αὐτοῦ. Δὲν θὰ ἐπιμείνωμεν εἰς τὴν πλήρη ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας, καὶ ὅτι αὕτη εὐρίσκεται ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὴν ἀναπτυχθεῖσαν θεωρίαν εἰς τὸ διπλὸν ὅλουλήρωμα, ἀλλὰ θὰ ἀναφέρωμεν ἐν συντομίᾳ τινὰ περὶ τῶν συντεταγμένων ἐπιφανειῶν καὶ ἀμοιούδως ἓνα βασικόν θεώρημα μετασχηματισμοῦ ἐνὸς τριπλοῦ ὅλουληρώματος εἰς ἓν ἄλλο τριπλὸν ὅλουλήρωμα.

Καμπυλόγραμμοι συντεταγμένοι: θεωροῦμεν τὰ τρισσορδωνία συστήματα τῶν ἀξόνων oxy καὶ ouw καὶ ἔστωσαν τὰ χωρία V καὶ V^* ἀντιστοιχῶς ἐπ' αὐτῶν. Ἄς ὑποθέσωμεν μεταξὺ τῶν σημείων τῶν δύο ἀνωτέρω χωρίων ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἐμφραδομένη ὑπὸ τῶν σχέσεων:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = f(u, v, w), \quad z = \sigma(u, v, w) \quad (1) \quad (u, v, w) \in V^*$$

ἢ ὑπὸ τῶν ἀντιστροφῶν τῶν συναρτήσεων (1), ἥτοι:

$$u = \tilde{\varphi}(x, y, z), \quad v = \tilde{f}(x, y, z), \quad w = \tilde{\sigma}(x, y, z) \quad (2) \quad (x, y, z) \in V.$$

Δεχόμεθα ὅτι αἱ φ, f, σ ἔχουν μερικὰς παραγώγους ὡς πρὸς

u, v, w α³ τάξεως συνεχείς με' λαμβαναν $\frac{D(\varphi, f, \sigma)}{D(u, v, w)} \neq 0$
 Προφανώς έχομεν:

$$\frac{D(\varphi, f, \sigma)}{D(u, v, w)} \cdot \frac{D(\tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{\sigma})}{D(x, y, z)} = 1$$

Ἡ ἀπειριόσις (1) μετασχηματίζει τὸ χωρίον V^* εἰς τὸ χωρίον V , συνεπῶς ἓνα σημεῖον $(u, v, w) \in V^*$ προσδιορίζει πλήρως τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον $(x, y, z) \in V$. Μὲ ἄλλους λόγους αἱ ποσότητες (u, v, w) δύνανται νὰ θεωρηθῶν ὡς αἱ συντεταγμέναι (διάφοροι τῶν καρτεσιανῶν τοιούτων) τῶν σημείων τοῦ χωρίου V , δι' ὅ καὶ καλοῦνται καμπυλόγραμμαι συντεταγμέναι.

Ἐάν π.χ. δώσωμεν εἰς τὸ u μίαν σταθερὰν τιμὴν u_0 , δηλ. μὲ ἄλλους λόγους θεωρήσωμεν εἰς τὸ σύστημα συνω ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ συνω, τότε αἱ ὑπὸ τῶν τύπων (1) καθορίζεται μὲ αὐτὸ τὸ u_0 μία ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις εἶναι:

$$x = \varphi(u_0, v, w), \quad y = f(u_0, v, w), \quad z = \sigma(u_0, v, w) \quad (3)$$

Δίδοντες εἰς τὸ u_0 πάσας τὰς δυνατὰς τιμὰς δημιουργοῦμεν οὕτω μίαν μονοπαραμετρίαν οἰομένην ἐπιφανείαν. Κατ' ἀναλογία μὲ $v = \text{σταθ.}$ ἢ $w = \text{σταθ.}$ δημιουργοῦμεν δύο οἰομένης ἐπιφανείων κειμένων εἰς τὸ χωρίον V . Αἱ τρεῖς ἀνωτέρω οἰομένηαι σχηματίζουν τὸ σύνολον τὸ καλούμενον συντεταγμέναι ἐπιφάνειαι. Οὕτω, κάθε σημεῖον τοῦ V θεωρεῖται ὡς ἡ τομὴ τριῶν ἐπιφανείων ἐν τῇ οἰοσχευῇ τῶν συντεταγμένων ἐπιφανείων.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν τὸ κατωθι βασίον:

Θεώρημα VIII-3-1. Ἐστω τὸ τριπλὸν ὀλομήρωμα $\iiint F(x, y, z) dx dy dz$ ἑπεκτείνωμενον ἐπὶ τοῦ χωρίου V , τὸ ὁποῖον περιυλίζεται ὑπὸ μιᾶς τμηματικῆς θέας ἐπιφανείας. Ἐστω ὁ ἀμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός $x = \varphi(u, v, w)$, $y = f(u, v, w)$, $z = \sigma(u, v, w)$ ὅπου $(u, v, w) \in V^*$ καὶ ὅτι αἱ συναρτήσεις φ, f, σ ἔχουν μεριῶς παραγώμους ὡς πρὸς u, v, w α³ τάξεως συνεχείς με' λαμβαναν $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$, τότε ἰσχύει:

$$\iiint_V F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} F(\varphi(u, v, w), f(u, v, w), \sigma(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$$

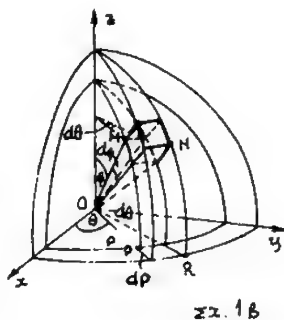
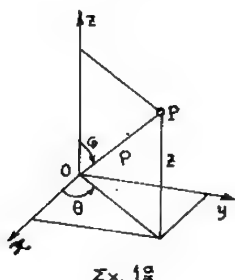
I. Περίπτωσης σφαιρικών συντεταγμένων

Ο τύπος του ανωτέρω θεωρήματος εις την περίπτωσιν των σφαιρικών συντεταγμένων (βλ. Σχ. 1) ήτοι: $x = \rho \sin \theta \mu\phi$, $y = \rho \mu\theta \mu\phi$, $z = \rho \sin \theta$ όπου $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi < \pi$ γίνεται:

$$\iiint_V F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} F(\rho \sin \theta \mu\phi, \rho \mu\theta \mu\phi, \rho \sin \theta) \cdot \rho^2 \mu\phi d\rho d\theta d\phi \quad (1)$$

$$\text{διότι, } \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \mu\phi & \rho \sin \theta \mu\phi & -\rho \mu\theta \mu\phi \\ \mu\theta \mu\phi & \rho \mu\theta \sin \phi & \rho \sin \theta \mu\phi \\ \sin \phi & -\rho \mu\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \mu\phi.$$

Θεωρούμεν ένα στοιχειώδες χωρίον όγκου dv περιεχόμενον μεταξύ τριών στεγμών συντεταγμένων επιφανειών άπειρας πλησίον ή μία της άλλης ήτοι: τό χωρίον νά φράσσεται υπό των δύο σφαιρών μέ άυτίνας ρ , $\rho + d\rho$ των δύο κυνικών επιφανειών σχηματίζόντων μέ τόν άξονα OZ γωνίαν ϕ καί $\phi + d\phi$ καί υπό των δύο επιπέδων σχηματίζόντων μετά του άξονος OX γωνίαν θ καί $\theta + d\theta$. Προσεγγιστικώς τό στοιχείον τούτο δύναται νά θεωρηθή ως ένα « όρθογώνιον παραλληληπίπεδον » του όποιου αι πλευραί ως ευόλως διαπιστούται έχουν αντιστοιχως μήκη $d\rho$, $\rho d\phi$, $\rho \mu\phi d\theta$ (βλ. Σχ. 1). Οθεν ό όγκος αύτου είναι: $dv = d\rho \cdot \rho d\phi \cdot \rho \mu\phi d\theta = \rho^2 \mu\phi d\rho d\phi d\theta$.



Ός έμ τούτου διά τόν ύπολογισμόν, μέσω των σφαιρικών συντεταγμένων του όγκου ενός στερεού περιορισόμενου υπό μίας υλειστης επιφανείας S , ήτις τέμνεται εις δύο τό πολύ σημεία υπό πάσης ευθείας διερχομένης διά της άρχης

τῶν ἀξόνων καὶ ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν $\rho = \sigma(\varphi, \theta)$, ἀρκεῖ νὰ λαβῶμεν

$$dv = \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

Ἐν συνεχείᾳ δι' ὁλοκληρώσεως εὐρίσκομεν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ προσδιορίζοντες κατὰλλήλως τὰ ὅρια ὁλοκληρώσεως τῶν θ, φ, ρ .

II. Περίπτωσης κυλινδρικῶν συντεταγμένων.

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν κυλινδρικὰς συντεταγμένας ἦτοι:

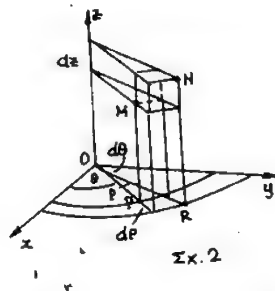
$x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$, ὅπου $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$ τότε θὰ εἶναι

$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho$ καὶ ὁ τύπος τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος γίνεται:

$$\iiint_V F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V^*} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \quad (2)$$

Ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν σφαιρικῶν συντεταγμένων θεωροῦμεν οὕτω

καὶ ἐδῶ ἓνα στοιχειῶδες χωρίον ὄγκου dv περιχόμενον μετὰ τῶν τριῶν θεωρῶν συντεταγμένων ἐπιφανειῶν ἀπειρώς πλησίον ἢ μία τῆς ἄλλης ἦτοι: τὸ χωρίον νὰ φράσσεται ὑπὸ τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν μὲ ἀκτῖνας ρ καὶ $\rho + d\rho$, τῶν δύο ὀριζοντιῶν ἐπιπέδων ἀντιστοιχοῦντων εἰς τὰς τιμὰς z καὶ $z + dz$ τῆς συντεταγμένης z καὶ ὑπὸ τῶν δύο ἡμι-



πιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ ἀξονος τῶν z καὶ σχηματίζοντων μετὰ τοῦ ἀξονος τῶν x γωνίαν θ καὶ $\theta + d\theta$ (βλ. Σκ. 2). Οὕτω ἔχομεν δημιουργηθῆσαι ὡς στοιχειῶδες χωρίον ἓνα στοιχειῶδες «πρίσμα» τοῦ ὁποῖου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $\rho \, d\rho \, d\theta$ καὶ τὸ ὕψος του εἶναι dz . Συνεπῶς ὁ στοιχειῶδης ὄγκος αὐτοῦ εἶναι: $dv = \rho \, d\theta \, d\rho \, dz$.

Ἐφαρμογαὶ 1^η. Νὰ εὐρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τοῦ φρασσομένου ἄνω ὑπὸ τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ καὶ κατω ὑπὸ τοῦ κώνου $z^2 \sin^2 \alpha = (x^2 + y^2) \sin^2 \alpha$, ὅπου α εἶναι μία σταθερὰ γωνία τοιαύτη ὥστε $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Λύσις: ὁ ζητούμενος ὄγκος ὡς γνωστόν εἶναι:

$$\Omega = 4 \iiint_V dx dy dz \quad (1)$$

ὅπου τὸ χωρίον V εὐρίσκεται μεταξύ τῶν δετρυῶν ἡμιαξόνων Ox, Oy, Oz .

Πρὸς ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω ὀλουδήρωματος χρησιμοποιοῦμεν σφαιρικὰς συντεταγμένας, ἄρκει πρὸς τοῦτοις νὰ προσδιορίσωμεν τὰ ὅρια μεταβολῆς τῶν ρ, θ, φ .

Ἡ ἐξίσωσις τῆς σφαίρας εἰς σφαιρικὰς συντεταγμένας εἶναι $\rho = R$ ἢ δὲ ἐξίσωσις τῆς κυλινδρῆς ἐπιφανείας ἐὰν ἀντιταστασθῶμεν $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$, γίνεται μετὰ τὰς πράξεις

$$\rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \quad \text{ἢ}$$

$$\cos \varphi = \pm \sin \varphi \quad \text{ἢ} \quad \varphi = \alpha \quad \text{ἢ} \quad \varphi = \pi - \alpha$$

Ἄρκει νὰ θεωρήσωμεν τὴν μίαν γωνίαν ἐξ αὐτῶν, ἔστω τὴν $\varphi = \alpha$. Ἐυτελοῦντες λοιπὸν τὸν μετασχηματισμὸν τὸ ὀλουδήρωμα (1) γίνεται:

$$\Omega = 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \int_{\varphi=0}^{\alpha} \sin \theta d\varphi \int_{\rho=0}^R \rho^2 d\rho = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - \sin \alpha) \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} (1 - \sin \alpha).$$

29. Νὰ εὐρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τοῦ κειμένου ἄνω τοῦ ἐπιπέδου Oxy καὶ φρασσομένου ὑπὸ τοῦ παραβολοειδοῦς $z = x^2 + y^2$ καὶ τῆς κυλινδρῆς ἐπιφανείας $x^2 + y^2 = a^2$.

Λύσις: ὡς γνωστόν ὁ ὄγκος τοῦ ἐν λόγῳ χωρίου θὰ εἶναι:

$$\Omega = \iiint_V dx dy dz \quad (1)$$

ὁ τύπος (1) διὰ χρησιμοποίησεως κυλινδρικών συντεταγμένων δηλ. $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \cos \theta$, $z = z$ γίνεται:

$$\Omega = \iiint_{V^*} \rho d\rho d\theta dz \quad (2)$$

Ἄρκει νὰ εὕρωμεν τὸ χωρίον V^* μεταβολῆς τῶν ρ, θ, z . Ἡ ἐξίσωσις τοῦ παραβολοειδοῦς εἰς κυλινδρικὰς συντεταγμένας εἶναι: $z = \rho^2$ καὶ τοῦ κυλινδρου εἶναι $\rho = a$.

Ἐάν ἡ γωνία $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, τότε ὁ περιυλειόμενος εἰς αὐτό τὸ διάστημα μεταβολῆς τῆς θ ὄγκος εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ζητουμένου. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν ὡς (2).

$$\frac{1}{4} \Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho d\rho \int_0^{\rho^2} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ὡθεν, } \Omega = \frac{\pi a^4}{2}.$$

§ 4. ΤΟ ΤΡΙΠΛΟΥΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΩΣ ΜΙΑ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΟΛΟΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ

Κάτ' ἀναλογίαν πρὸς τὰς συνολοσυναρτήσεις τὰς ὁρισθεῖσας διὰ τὰ ἐπίπεδα σχήματα δυνάμεθα νὰ εἰσαγάγωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς συνολοσυναρτήσεως ὠρισμένης εἰς τὰ ὑποσύνολα (ἐν γένει στερεὰ σώματα) τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 . Ἐνα χαρακτηριστικὸν παράδειγμα μιᾶς τοιοῦτης συνολοσυναρτήσεως ὠρισμένης διὰ τὰδε στερεὸν σῶμα εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ τοῦ σώματος. Ὁμοίως ἐὰν θεωρήσωμεν ἐν ὕλιν στερεὸν τὸ ὁποῖον κατέχει ἕνα ὁρισμένον ὄγκον, εἰς αὐτό δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὴν περιεχομένην μᾶζαν τοῦ καὶ οὕτω ἐπιτυχάνομεν μίαν συνολοσυνάρτησιν ὠρισμένην εἰς τὸ πεδῖον αὐτοῦ τοῦ χώρου.

Ὁ ὄγκος καὶ ἡ μᾶζα ἔχουν τὴν ιδιότητα τῆς προσθετιμότητος, ἥτις διατυπώνεται μετὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ἥτοι: Ἐάν $F(V)$ εἶναι μία συνολοσυνάρτησις αὕτη θὰ καλεῖται προσθετιμή, ἐὰν διὰ τὰθε δευτέρω χωρίων V_1 καὶ V_2 μὴ ἐχόντων κοινὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα καὶ ἐπὶ τῶν ὁποίων ἡ $F(V)$ εἶναι ὠρισμένη, ἡ τιμὴ $F(V_1 \cup V_2)$ εἶναι ἐπίσης ὠρισμένη καὶ ἰσχύει:

$$F(V_1 \cup V_2) = F(V_1) + F(V_2).$$

Ἐάν ἡ $f(x, y, z)$ εἶναι ὀλουθηρώσιμος ἐπὶ τοῦ χωρίου V , τότε τὸ τριπλουν ὀλουπρήρωμα $\iiint_V f(x, y, z) dv$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία προσθετιμή συνολοσυνάρτησις $F(V)$ ὠρισμένη ἐν ἑκάστοτε ἐπὶ τοῦ χωρίου τῆς ὀλουθηρώσεως V τῆς $f(x, y, z)$.

Ἡ γνώσις τῆς παραγώγου μιᾶς προσθετιμῆς συνολοσυναρτήσεως ὡς πρὸς τὸν ὄγκον εἰσάγεται κατ' ἀναλογίαν ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ χώρου τῶν δύο διαστάσεων.

Όρισμός VIII-4-1. Ένας αριθμός ℓ θα λέγουμε ότι είναι το όριο του πηλίκου $\frac{F(V)}{V}$ (όπου v είναι ο όγκος του χωρίου V και $F(V)$ μία προσδετική συνολοσυνάρτηση) καθώς το χωρίον V τείνει προς το σημείον M_0 , εάν διά υάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τοιούτον ώστε να έχωμεν: $\left| \frac{F(V)}{V} - \ell \right| < \varepsilon$, διά υάθε χωρίον V έξ ολολήρου περιεχόμενον εις μίαν σφαίραν αυτίνος δ και κέντρου M_0 .

Τό ανωτέρω όριον έξ όρισμού καλείται παράγωγος της συνολοσυναρτήσεως $F(V)$ ως προς τον όγκον v εις τό σημείον M_0 και συμβολίζεται ούτω:

$$\lim_{v \rightarrow M_0} \frac{F(V)}{v} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{dF(V)}{dv} \right|_{M_0}$$

Εάν $F(V)$ παριστά την μάζαν την περιεχομένην εις τό χωρίον V , τότε ή παράγωγος της $F(V)$ ως προς τον όγκον εις τό σημείον $M(x, y, z)$ καλείται έξ όρισμού πυκνότης της μάζης εις τό σημείον M και συμβολίζεται μέ $\delta(x, y, z)$.

Ευ του θεωρήματος της μέσης τιμής προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{dv} \iiint_V f(x, y, z) dv = f(x, y, z).$$

§ 5. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

I. Υπολογισμός της μάζης στερεού εκ της πυκνότητος αυτού.

Εάν ή κατανομή της πυκνότητος επί του χωρίου V είναι $\delta(x, y, z)$ τότε ή μάζα αυτού παρέχεται υπό του τύπου:

$$m = \iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz \quad (1)$$

II. Ροπή αδράνειας. Κατ' αναλογία προς τά ευτεθέντα διά την ροπήν αδράνειας επιπέδου υδλιγής πλαιός ως προς τους άξονας των συντεταγμένων, ούτω και εις την περίπτωσιν ενός υδλικού στερεού V του όποιου ή κατανομή της πυκνότητος είναι $\delta(x, y, z)$ ή ροπή αδράνειας αυτού ως προς τους άξονας ox, oy, oz θα παρέχεται αντίστοιχως υπό των τύπων:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz \\ I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz \\ I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Και ἡ ροπή ἀδραναίας ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν ὀ θα εἶναι:

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz.$$

III. Συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους ὑλικοῦ στερεοῦ V με κατανομὴν πυκνότητος $\delta(x, y, z)$ παρέχονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$x_k = \frac{\iiint_V x \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz}, \quad y_k = \frac{\iiint_V y \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz}, \quad z_k = \frac{\iiint_V z \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz} \quad (3)$$

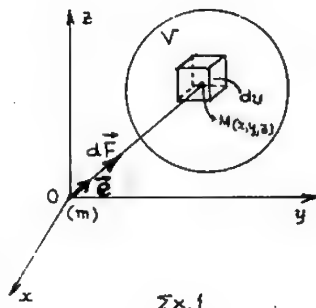
Ἐὰν τὸ στερεὸν εἶναι ὁμογενές, τότε ἔχομεν:

$$x_k = \frac{\iiint_V x dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}, \quad y_k = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}, \quad z_k = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz} \quad (4)$$

IV. ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΣ ἔΡΞΙΣ: Ἐστω ὑλικοὺν σημεῖον μάζης m , τὸ ὁποῖον λαμβάνεται εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἓνα στερεὸν V με κατανομὴν πυκνότητος μάζης $\delta(x, y, z)$ (βλ. Σχ. 1). Τὸ στοιχειῶδες χωρίον δu ὑπετινόμενον περὶ τοῦ σημείου $M(x, y, z)$ ἔχει μάζαν $\delta(x, y, z) du$ καὶ ἀσμεῖ ἐπὶ τῆς ὑλικοῦς μάζης m μίαν δύναμιν $d\vec{F}$ ἥτις παρέχεται ὑπὸ τοῦ γνωστοῦ τύπου τῆς Παρμωσμοῦ ἐλξέως ἥτοι:

$$d\vec{F} = k \frac{m \cdot \delta(x, y, z) du}{r^2} \vec{e} \quad (1), \quad \text{ὅπου } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Ἐστῶσαν dF_x, dF_y, dF_z τὰ μέτρα τῶν προβολῶν τῆς $d\vec{F}$ ἐπὶ τοὺς τρεῖς ἀξονας. Θὰ ἔχωμεν τότε:



Σχ. 1

$$dF_x = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x, y, z)}{r^3} \cdot \frac{x}{r} dv = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x, y, z) \cdot x dv}{r^3}$$

$$dF_y = \dots \dots \dots = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x, y, z) \cdot y dv}{r^3}$$

$$dF_z = \dots \dots \dots = k \cdot \frac{m \cdot \delta(x, y, z) \cdot z dv}{r^3}$$

Ὅθεν τὰ μέτρα τῶν προβολῶν τῆς δυνάμεως \vec{F} πού ἀσμεῖται ὑφ' ὁλοκληρίου τοῦ στερεοῦ ἐπὶ τῆς μάζης m εἶναι:

$$F_x = km \iiint_V \frac{\delta(x, y, z) x dx dy dz}{r^3}, F_y = km \iiint_V \frac{\delta(x, y, z) y dx dy dz}{r^3}, F_z = km \iiint_V \frac{\delta(x, y, z) z dx dy dz}{r^3}$$

§6. ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

I Ἔως τῶρα ἐδώσαμεν τοὺς ὁρίσμούς καὶ ἐξετάσαμεν τὰς βασικὰς ιδιότητες τῶν ἀπλῶν, διπλῶν καὶ τριπλῶν ὁλοκληρωμάτων.

Τὴν ἀνωτέρω θεωρίαν δυνάμεθα νὰ τὴν γενικεύσωμεν καὶ ὅταν ἔχωμεν μίαν συνάρτησιν $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -μεταβλητῶν. Ὡς γνωστόν ἐκ τῆς Ἀνάλυτικῆς Γεωμετρίας τὸ ἔμβασμόν ἑνὸς παραλληλογράμμου ἢ ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ἐμφράζεται ὑπὸ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς ὀριζούσης τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι τὰ μέτρα τῶν προβολῶν τῶν διανυσμάτων εἰς τοὺς συντεταγμένους ἄξονας. Ἀναχωροῦντες ἐξ αὐτοῦ τοῦ ἀποτελέσματος ὀρίζομεν ὡς ὄγκον ἑνὸς n -διαστάσεως παραλληλεπιπέδου τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς ὀριζούσης μέ γραμμάς (ἢ στήλας) σχηματιζόμενας ἀπὸ τὰς συντεταγμένας τῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὰς αἰμάς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Κατὰ συνέπειαν στηριζόμενοι εἰς αὐτὸν τὸν ὀρισμόν τοῦ ὄγκου δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εἰσάγωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ ὄγκου ἑνὸς πολυέδρου διὰ σχήματα τοῦ Εὐκλείδειου χώρου τῶν n -διαστάσεων καὶ κατ' ἀμοιβαίαν νὰ ὀρίσωμεν τὸν ὄγκον διὰ εὐρυτέρας μετὰσεις σχημάτων υειμένων εἰς τὸν Εὐκλείδειον χώρον τῶν n -διαστάσεων.

II Ἐστω ἤδη $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μία συνάρτησις n -ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν ὠρισμένη καὶ φραγμένη εἰς ἓνα χωρίον G τοῦ Εὐκλείδειου χώρου τῶν n -διαστάσεων. Θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν \mathfrak{D} ἐπὶ τοῦ G χωρίζοντες τοῦτο εἰς τὰ ὑποχωρία G_1, G_2, \dots, G_n καὶ τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι ἔστωσαν $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Ἐστω

σαν ἐπὶ πλέον $\delta(G_1), \delta(G_2) \dots \delta(G_n)$ αἱ διάμετροι τούτων καὶ D ἡ μερίστη ἐξ αὐτῶν.

Ἐφ' ἐκάστου χωρίου $G_p, 1 \leq p \leq n$ λαμβάνομεν ἓνα τυχόν σημεῖον $M_p (E_1^{(p)}, E_2^{(p)}, \dots, E_n^{(p)})$ καὶ ἀπολούδως σχηματίζομεν τὰ ἀδροίσματα:

$$W_n = \sum_{p=1}^n f(E_1^{(p)}, E_2^{(p)}, \dots, E_n^{(p)}) \Delta U_p \quad (1)$$

Ἐάν ὑπάρχῃ τὸ $\lim_{\substack{\Delta U \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n f(E_1^{(p)}, E_2^{(p)}, \dots, E_n^{(p)}) \Delta U_p$ τοῦτο καλοῦμεν *n-τάξεως πολληλαποῦν ὁδοιμήρωμα* καὶ τὸ συμβολίζομεν οὕτω:

$$I = \iiint_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Πρὸς ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω ὁδοιμήρωματος θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ διὰ τὰ ὅποια ἡ συντεταγμένη x_n ἔχει μίαν σκαθεράν τιμὴν. Τὸ σημεῖον $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ διαγράφει εἰς τὸν Εὐκλείδειον κῶρον τῶν $n-1$ διαστάσεων ἓνα χωρίον Q καὶ διὰπιστοῦμεν εὐνόλως ὅτι, τὸ *n-τάξεως πολληλαποῦν ὁδοιμήρωμα* I ἰσοῦται πρὸς τὴν ἔκφρασιν: $I = \int_{x_n^{(u)}}^{x_n^{(v)}} \theta(x_n) dx_n$, (2) ὅπου $\theta(x_n)$ εἶναι τὸ $(n-1)$ -τάξεως πολληλαποῦν ὁδοιμήρωμα

$$\iiint_Q \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}$$

ἐπυτευνόμενον ἐπὶ τοῦ χωρίου Q καὶ $x_n^{(u)}, x_n^{(v)}$ (εἶναι τὸ ἀνώτερον καὶ κατώτερον πέρασ τῆς x_n εἰς τὸ χωρίον G).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ χωρίον G εἶναι ἓνα παραλληλεπίπεδον ὁρισμένον ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n$$

τὸ πολληλαποῦν ὁδοιμήρωμα εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ρίσκεται:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \quad (3)$$

ὁ τύπος τῆς ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν ἐπυτείνεται καὶ εἰς τὰ *n-τάξεως πολληλα ὁδοιμήρωμα*.

Έστω $x_p = q_p(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $p=1, 2, \dots, n$

οι τύποι του μετασχηματισμού, διά των οποίων δημιουργείται μία αμφιμονοσήμαντος αντιστοιχία μεταξύ των πεδίων G και G' , όπου $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in G'$. Θα έχουμε τότε:

$$\begin{aligned} & \iiint_G \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n = \\ & = \iiint_{G'} \dots \int f(q_1(u_1, \dots, u_n), \dots, q_n(u_1, \dots, u_n)) \left| \frac{D(q_1, \dots, q_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} \right| du_1 \dots du_n \end{aligned}$$

III. Τα πολλαπλά ολοκληρώματα εύρισκουν πλείστας εφαρμογές κυρίως δὲ εἰς τὴν φυσικὴν.

Ἐφαρμογαὶ 1^η Νὰ εὑρεθῇ τὴ Νευτώνειος δύναμις ἑλξέως μεταξύ δύο ὑλινῶν στερεῶν V_1, V_2 με ἀντιστοίχους κατανομὰς πυκνότητος $\delta_1(x_1, y_1, z_1), \delta_2(x_2, y_2, z_2)$.

Λύσις: Πρὸς τοῦτοις θεωροῦμεν ἐπὶ ἐυκλείδειου τῶν στερεῶν V_1 καὶ V_2 ἀπὸ ἑνα στοιχειώδες ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον με ἀντιστοίχους ὅγκους $du_1 = dx_1, dy_1, dz_1$ καὶ $du_2 = dx_2, dy_2, dz_2$.

Μεταξύ αὐτῶν τῶν στερεῶν ὑφίσταται μία στοιχειώδης Νευτώνειος δύναμις dF τῆς ὁποίας τὸ μέτρον τῆς προβολῆς εἰς τὸν ἄξονα τῶν x ἰσοῦται πρὸς:

$$dF_x = k \cdot \frac{\delta_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \delta_2(x_2, y_2, z_2)}{r^2} \cdot (x_1 - x_2) dx_1, dy_1, dz_1, dx_2, dy_2, dz_2 \quad (1)$$

$$\text{ὅπου } r = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ὁλικὴν τιμὴν τοῦ μέτρου τῆς προβολῆς ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὅλουδῆρωμα:

$$F_x = k \iiint_{V_1 \times V_2} \frac{\delta_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \delta_2(x_2, y_2, z_2) (x_1 - x_2)}{r^3} dx_1, dy_1, dz_1, dx_2, dy_2, dz_2 \quad (2)$$

Αἱ ὑπόλοιποι προβολαὶ ὑπολογίζονται ἀναλόγως. Ἐδῶ τὸ σημεῖον (x_1, y_1, z_1) μινεῖται ἐπὶ τοῦ χώρου V_1 καὶ τὸ (x_2, y_2, z_2) μινεῖται ἐπὶ τοῦ V_2 . Ἐντεῦθεν τὸ ὅλουδῆρωμα (2) λαμβάνεται ἐπὶ τοῦ πεδίου τοῦ χώρου τῶν 6-διαστάσεων τῶν μεταβλητῶν $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Αὐτὸ τὸ χωρίον καλεῖται *Καρτεσιανόν μινόμενον τῶν χωρίων* V_1 καὶ V_2 καὶ συμβολίζεται με $V_1 \times V_2$.

28/ Νά υπολογισθῇ τὸ ὀλουλήρωμα:

$$\iiint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ἐπευτεινόμενον εἰς τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ Εὐκλείδειου χώρου τῶν n -διαστάσεων, τὰ ὁποῖα πληροῦν τὴν ἀνισότητα $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$.

Λύσις: Ὡς καλέσωμεν W_n τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας αὐτίνος $R=1$ εἰς τὸν χώρον τῶν n -διαστάσεων. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας αὐτίνος R εἰς τὸν χώρον τῶν n -διαστάσεων ἰσοῦται πρὸς $W_n \cdot R^n$. Πράγματι ὁ ὄγκος αὐτῆς παρέχεται ὑπὸ τοῦ ὀλουλήρωματος:

$$Q_n = \iiint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1)$$

ἐπευτεινόμενον εἰς τὸ χωρίον:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < R^2$$

Ἐὰν εἰς τὸ ὀλουλήρωμα (1) ἐπιτεθῶμεν τὸν μετασχηματισμόν:

$$x_1 = R u_1, x_2 = R u_2, \dots, x_n = R u_n$$

τότε:

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 < 1.$$

Ἡ Ἰακωβιανὴ τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ ἰσοῦται πρὸς R^n . Ὅθεν τὸ ὀλουλήρωμα (1) γίνεται:

$$Q_n = R^n \cdot \iiint \dots \int du_1 du_2 \dots du_n \quad \text{ἢ}$$

$$Q_n = R^n \cdot W_n. \quad (2)$$

Διὰ νὰ υπολογίσωμεν τὸ W_n ὀλουληρώνομεν ἐν πρώτοις ὡς πρὸς x_3, x_4, \dots, x_n εἰς τὸ πεδίον ὀριζόμενον ὑπὸ τῆς ἀνισότητος:

$$x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2 < 1 - x_1^2 - x_2^2.$$

Τὸ ἀποτέλεσμα δὲ εἶναι μία συνάρτησις τῶν x_1, x_2 καὶ τὸ ὅποιον ὀλουληρώνομεν ἐν συνεχείᾳ ἐντὸς τοῦ κύβου:

$$x_1^2 + x_2^2 < 1.$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πρώτης ὀλουληρώσεως εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας αὐτίνος $\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ εἰς τὸν χώρον τῶν $(n-2)$ -διαστάσεων καὶ συμφώνως πρὸς τὸν τύ-

πον (2) ὁ ὄγκος αὐτῆς τῆς σφαίρας θὰ πρέπει νὰ ἰσοῦται πρὸς

$$W_{n-2} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

θά ἔχωμεν λοιπόν, μετὰ τὴν δευτέραν ὁλοκληρώσιν :

$$W_n = W_{n-2} \cdot \iint_{\Omega} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 dx_2 \quad (3)$$

ὅπου τό χαρμόν τῆς ὀλοσυνηρώσεως εἶναι ὁ ὑψὺς $x_1^2 + x_2^2 < 1$.

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος (3) χρησιμοποιοῦμεν πολλαπλὰ συντεταγμένα ἥτοι: $x_1 = \rho \sin \theta$, $x_2 = \rho \eta \mu \theta$, ὅτε ὁ τύπος (3) γίνεται:

$$\frac{W_n}{W_{n-2}} = \iint_{\Omega} (1-\rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \int_0^1 (1-\rho^2)^{\frac{n-3}{2}} \rho \, d\rho = \frac{2\pi}{n}$$

$$W_n = \frac{2\pi}{n} \cdot W_{n-2} \quad (4)$$

ἮΞ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι:

$$w_i = 2, (\text{μήκος του τμήματος } -1, 1)$$

$$w_2 = \pi, \text{ (ἐμβαδόν τοῦ κύκλου αὐτίνου 1)}$$

Εὐνόμως εὐρίσκουμεν ἐν τοῦ τύπου (4) ὅτι :

$$W_{2p} = \frac{\pi^p}{p!} \text{ and } W_{2p+1} = \frac{2^{2p+1} \cdot p!}{(2p+1)!} \pi^p$$

Παράδειγμα :

$$w_3 = \frac{4}{3} \pi, \quad w_4 = \frac{\pi^2}{2}, \quad w_5 = \frac{8}{15} \pi^2, \dots$$

Εὐνόμως διαπιστώνεται ὅτι, τοῦ η τοῦ δ ὁμοιομορφίας τῆς σφαίρας αὐτῆς R εἰς τὸν χ ὡρον τῶν n -διαστάσεων τείνει πρὸς τὸ μηδέν οἰομένηποτε ὄντος τοῦ R .

§ 7. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

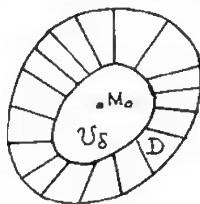
Ι. Διά συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς ἔχομεν θεωρήσει γενικευμένα ὁλοκληρώμα-
τα: i) Αὐτά εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις γίνεται ἄπειρος εἰς ἓνα ση-
μεῖον καὶ ii) Αὐτά εἰς τὰ ὁποῖα τὸ διάστημα τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἄπειρον. Ἐπὶ
πλεόν ἔθεωρήσαμεν καὶ ἕναν μωτὸν τύπον τῶν δύο ἀνωτέρω περιπτώσεων.

Διηδᾶ καὶ τριηδᾶ ὁλοκληρώματα ἔχομεν θεωρήσει μόνον διὰ φραγμένas συναρτή-
σεις καὶ διὰ φραγμένα χωρία ὁλοκληρώσεως.

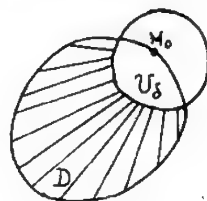
Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $f(M) = f(x, y)$ ὠρισμένην εἰς ἓνα φραγμένον χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου oxy . ὑποθέτομεν ὅτι ἡ $f(M)$ δὲν εἶναι φραγμένη εἰς καὶ περικύκλον τοῦ σημείου $M_0(x_0, y_0) \in \bar{D}$ (\bar{D} : ἡ θήκη τοῦ χωρίου D) καὶ ἐπὶ πλέον διὰ καὶ τοῦ χωρίου $D \setminus U_\delta$, ὅπου τὸ U_δ περιέχει τὸ σημεῖον M_0 εἰς τὸ ἑσωτερικόν του, ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ εἶναι φραγμένη καὶ ὁλοκληρώσιμος ὑπὸ τὴν συνήθη ἔννοιαν. (βλ. Σχ. 1(α) καὶ 1(β)).

Ὁ δεικτὴς δ τοῦ U_δ παριστᾷ τὴν διάμετρον τοῦ χωρίου U_δ .

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{U_n\}$ τῶν χωρίων τείνει πρὸς τὸ σημεῖον M_0 καὶ γράφομεν $U_n \rightarrow \{M_0\}, n \uparrow \infty$, ἂν



Σχ. 1 (α)



Σχ. 1 (β)

διὰ καὶ $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ $N(\varepsilon)$ τοιοῦτον ὥστε νὰ ἔχωμεν $\delta(U_n) < \varepsilon$ διὰ $n \geq N(\varepsilon)$.

Ἐὰν $\delta \rightarrow 0$, τότε τὸ χωρίον U_δ τείνει νὰ περιορισθῇ εἰς τὸ σημεῖον M_0 .

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_{D \setminus U_\delta} f(x, y) dx dy$ ἢ συντόμως $\iint_{D \setminus U_\delta} f(M) d\sigma$. Θὰ λέγωμεν ὅτι τοῦτο τείνει πρὸς ἓνα ὅριον ℓ καθὼς τὸ $\delta \rightarrow 0$ καὶ τὸ ὁποῖον (ὅριον) εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον τὰ χωρία U_δ τείνουσι πρὸς τὸ σημεῖον M_0 , ἂν διὰ καὶ ἀκολουθίαν χωρίων $\{U_{\delta_n}\}, n \geq 1$ (1) ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει τὸ σημεῖον M_0 εἰς τὸ ἑσωτερικόν του καὶ τῶν ὁποίων ἡ διάμετρος ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην $\delta_n \rightarrow 0$ τοῦ $n \uparrow \infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητικὴ ἀκολουθία $\left\{ \iint_{D \setminus U_{\delta_n}} f(M) d\sigma \right\}, n \geq 1$ συχυνεῖ πρὸς ἓνα καὶ τὸ αὐτὸ ὅριον ℓ , τὸ ὁποῖον εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐπιλογῆς τῶν περιοχῶν $\{U_{\delta_n}\}, n \geq 1$.

Ἐν προκειμένῳ δὲ γράφομεν:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{D \setminus U_\delta} f(M) d\sigma = \ell \quad (2)$$

Καλοῦμεν, ἔξ ὁρισμοῦ, γενικευμένον ὁλοκλήρωμα τῆς $f(x, y) = f(M)$ ἐπὶ τοῦ χωρίου D καὶ τὸ συμβολίζομεν οὕτω: $\iint_D f(M) d\sigma$ ἢ $\iint_D f(x, y) dx dy$, τὸ ὅριον:

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{D \setminus U_\delta} f(M) d\sigma$, ἂν αὐτὸ ὑπάρχῃ, εἶναι πεπερασμένον καὶ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ

τρόπου κατά το οποίοιόν τά U_δ τείνουν πρὸς τὸ σημεῖον M_0 . Ἐν προκειμένῳ δὲ λέ-
 γωμεν ὅτι τὸ γεννιευμένον ὁλοκληρώμα συγκλίνει, ἐν ἑναντία δὲ περιπτώσει ὅτι
ἀποκλίνει.

Κατωτέρω ἀναφέρομεν δύο βασικά θεωρήματα ἀφορῶντα τὴν σύγκλισιν ἑνὸς
 γεννιευμένου ὁλοκληρώματος μιᾶς μὴ ἀρνητικῆς συναρτήσεως.

Θεώρημα VII-7-1 Ἐστω ἡ μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησις $f(x,y)=f(M)$ ἡ ὁποία ὅθεν εἶναι φραγ-
 μένη εἰς καθεπεριοχὴν U_δ τοῦ $M_0 \in D$ ἐνῶ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ $D \setminus U_\delta$.
 Θεωροῦμεν μίαν μονότονον ἀμολουνδιαν ὁμοιέντρων κύκλων μὲ κέντρον τὸ M_0
 τοῦ τύπου (1). Παριστῶμεν ἕναν κύκλον μὲ κέντρον τὸ σημεῖον M_0 καὶ αὐτὸν
 νῶς δὲ διὰ K_δ καὶ σὺν δυνάμει νὰ χράσωμεν αὐτὴν τὴν ἀμολουνδιαν ὑπὸ τὴν
 μορφήν:

$$K_{\delta'_1} \supset K_{\delta'_2} \supset \dots \supset K_{\delta'_n} \supset \dots \quad (3), \quad \delta'_n \rightarrow 0 \text{ τοῦ } n \uparrow \infty.$$

ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἡ ἀναγκασία καὶ ἰσχυρὴ συνθήκη ἵνα τὸ ὁλοκληρώ-
 μα $\iint_D f(M) d\sigma$ συγκλίνει εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ ἀμολουνδία $\left\{ \iint_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \right\}, n \geq 1$ (4) νὰ εἶ-
ναι φραγμένη.

Ἀπόδειξις: (Ἀναγκασίον). Τοῦτο ἔπεται ἄμεσα ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γεννιευμένου ὁλο-
 κληρώματος.

(Ἰσχυρὸν) Ἐστω ὅτι ἡ ἀμολουνδία (4) εἶναι φραγμένη. Λόγῳ τῆς ἀμολουνδίας (3) ἔχομεν:

$$D \setminus K_{\delta'_1} \subset D \setminus K_{\delta'_2} \subset \dots \subset D \setminus K_{\delta'_n} \subset \dots \quad (5).$$

Ἐπειδὴ ἡ $f(M)$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ καὶ ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τῶν συνόλων τῆς ἀμο-
 λουνδίας $\{D \setminus K_{\delta'_n}\}, n \geq 1$ συνάγεται, ὅτι ἡ ἀμολουνδία $\left\{ \iint_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \right\}, n \geq 1$ εἶναι μὴ φθί-
 νουσα, εἶναι δὲ ἑξ' ὑποθέσεως καὶ φραγμένη, ἄρα συγκλίνει. Ἐστω δὲ $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma = \ell$,
 ὅτε $\iint_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \rightarrow \ell$ διὰ καθε n .

Ἐστω ἡδὴ ἕνα χωρίον U_{δ_n} περιεχόμενον μεταξὺ τῶν κύκλων $K_{\delta'_p}$ καὶ $K_{\delta'_q}$ τῶν
 ὁποίων αἱ αὐτὲς $\delta'_p, \delta'_q \rightarrow 0$ καθὼς τὸ $\delta_n \rightarrow 0$, θὰ ἔχωμεν λοιπὸν:

$$K_{\delta'_p} \supset U_{\delta_n} \supset K_{\delta'_q} \quad (6)$$

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν:

$$D \setminus K_{\delta'_p} \subset D \setminus U_{\delta_n} \subset D \setminus K_{\delta'_q} \quad (7)$$

Λόγω τῆς (7) ἔχομεν:
$$\int_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \leq \int_{D \setminus U_{\delta_n}} f(M) d\sigma \leq \int_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \quad (8)$$

Εἶναι ὁμως:
$$\lim_{\delta'_n \rightarrow 0} \int_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma = \lim_{\delta'_n \rightarrow 0} \int_{D \setminus U_{\delta_n}} f(M) d\sigma = \ell. \quad \text{Ὁθεν, } \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \int_{D \setminus U_{\delta_n}} f(M) d\sigma = \ell.$$

Τὸ ἀνολοῦδον θεώρημα ἀποτελεῖ μίαν γενίκευσιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Θεώρημα VIII-7-2: Ἐστω ἡ μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησις $f(x,y)=f(M)$ πλη-
ροῦσα τὰς ὑποθέσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος. Θεωροῦμεν μίαν αὖ-
δαίρετον ἀνολοῦδιαν χωρίων περιέχουσα τὸ σημεῖον M_0 τοῦ τύπου (1),
δηλ. τὴν $\{U_{\delta_n}\}, n \geq 1$. Τότε τὸ ὅλουθρημα $\int_D f(M) d\sigma$ συγχλίνει ἐάν, καὶ μόνον ἐάν,
ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητικὴ ἀνολοῦδια $\{\int_{D \setminus U_{\delta_n}} f(M) d\sigma\}, n \geq 1$ εἶναι φραγμένη.

Ἀποδείξεις: (Ἀναγκαῖον) Ἀποδείχθη εἰς τὸ προηγουμένον θεώρημα.

(Ἰκανόν), Θεωροῦμεν μίαν μονότονον ἀνολοῦδιαν κούλων τοῦ τύπου (3) περιυλ-
οῦσα τὸ M_0 καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ ἀνολοῦδια (4) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς
τὴν ἀνολοῦδια τῶν κούλων εἶναι φραγμένη. Τότε δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προηγουμένου
θεωρήματος ἔχομεν τὸ ἀποδεικτέον.

Πράγματι, τὸ ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ ἀνολοῦδια (4) εἶναι φραγμένη ἀποδεικνύεται ὡς
ἀνολοῦδως:

Ὑποθέτομεν ὅτι:
$$\int_{D \setminus U_{\delta_n}} f(M) d\sigma \leq C < +\infty, \text{ διὰ τὰς } n \geq 1.$$

Ἐπειδὴ τὸ $\delta_n \rightarrow 0$ τοῦ $n \uparrow \infty$ δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι διὰ τὰς n ὑπάρχει
 m τοιοῦτον ὥστε νὰ ἔχωμεν: $K_{\delta'_n} \supset U_{\delta_m}$. Ἐν τῆς τελευταίας σχέσεως ἔπεται ὅτι
 $D \setminus K_{\delta'_n} \subset D \setminus U_{\delta_m}$ καὶ ἐπειδὴ ἡ $f(M)$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ὁλοκληρώσιμος συνάρ-
τησις δὲ ἔχομεν:
$$\int_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \leq \int_{D \setminus U_{\delta_m}} f(M) d\sigma$$

Ὁθεν,
$$\int_{D \setminus K_{\delta'_n}} f(M) d\sigma \leq C \quad (C: \text{σταθερά}).$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἔπεται ὅτι τὸ $\int_D f(M) d\sigma$ συγχλίνει.

Παρατηρήσεις: 1^η Τὰ ἀνωτέρω θεώρηματα ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὰ n -πλά ὁλοκληρώματα.

28: 'Η μέθοδος ἀλλαγῆς τῶν μεταβλητῶν ἐφαρμόζεται καί εἰς τὰ γεννηεμένα πολυ-
 λαπλά ὀλοκληρώματα οἵονδήποτε εἶδους ἀρκεῖ τοῦτο νά συγχυλῖνῃ.

Παράδειγμα 1^{ον} Νά υπολογισθῇ τὸ ὀλοκληρώμα $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^q}}$, ὅπου D εἶναι ὁ δίσκος
 $x^2+y^2 \leq 1$ καί νά δειχθῇ ὅτι τοῦτο συγχυλῖναι διὰ $q < 2$ καί ἀπουλῖναι διὰ $q \geq 2$.

Ἀπόδειξις: 'Η ὀλοκληρωτέα συνάρτησις δέν εἶναι φραγμένη εἰς αὐτὴν περιοχὴν τοῦ ση-
 μείου $M_0(0,0)$ καί ὡς ἐν τούτῳ προέμεται περὶ ἑνὸς γεννηεμένου ὀλοκληρώματος. Ἐπι-
 πλέον ἡ ὀλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι δετιυή διὰ καθε $(x,y) \in D \setminus \{M_0\}$ καί κατὰ συ-
 νέπειαν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα VIII-7-1. Πρὸς τούτοις λαμβάνομεν τὴν μο-
 νότονον ἀμολοῦδιαν τῶν ὁμοκέντρων κύκλων, κέντρου M_0 καί αὐτίνος $\frac{1}{n}$, ἥτοι τὴν ἀμο-
 λοῦδιαν $\{K_n\}$, $n \geq 1$. Ἡ ἀμολοῦδια αὕτη τείνει πρὸς τὸ σημεῖον $M_0(0,0)$. Ἐν συνεχείᾳ θεω-
 ροῦμεν τὴν ἀντίστοιχον ἀμολοῦδιαν τῶν ὀλοκληρωμάτων:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^q}} \quad (1), \quad \text{ὅπου } D_n \text{ ὁ δαυτύλιος } D \setminus K_n.$$

Ἐάν ἐυτελεθῶμεν τὸν μετασχηματισμὸν $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \cos \theta$ τὸ ὀλοκληρώμα (1)
 γίνεταί:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{1}{\rho^q} \cdot \rho \cdot d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{n}}^1 \rho^{1-q} d\rho = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-q} (1 - \frac{1}{n^{2-q}}), & \text{ἐάν } q < 2 \\ 2\pi \log n, & \text{» } q = 2 \\ \frac{2\pi}{q-2} (n^{q-2} - 1), & \text{» } q > 2. \end{cases}$$

Ἐάν $q < 2$ καί $n \uparrow \infty$, ὅτε καί $K_n \rightarrow \{M_0\}$, τὸ ὅριον τῆς ἀνωτέρω ἀμολοῦδιας τῶν
 ὀλοκληρωμάτων θά εἶναι:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{2\pi}{2-q}.$$

Ἐάν $q \geq 2$ τὸ δοθέν ὀλοκληρώμα ἀπουλῖναι.

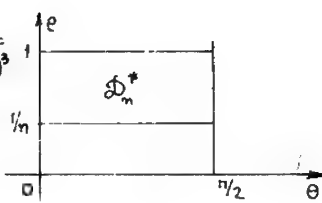
Παράδειγμα 2^{ον} Νά υπολογισθῇ τὸ ὀλοκληρώμα $\iint_D \frac{|xy| dx dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, ὅπου D εἶναι ὁ δίσκος
 ὁ ὁρίζομενος ὑπὸ τῆς ἐλλείψεως $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Λύσις: 'Η ὀλοκληρωτέα συνάρτησις δέν εἶναι φραγμένη εἰς αὐτὴν περιοχὴν τοῦ σημείου
 $M_0(0,0)$, ἐπὶ πλέον δὲ αὕτη εἶναι δετιυή. Ὅθεν δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρη-
 μα VIII-7-2. Πρὸς τούτοις λαμβάνομεν τὴν μονότονον ἀμολοῦδιαν τῶν ὁμοκέντρων ἐλ-
 λείψεων κέντρου M_0 , ἥτοι τὴν ἀμολοῦδιαν $\{E_n\}$, $n \geq 1$, ὅπου ἡ ἐξίσωσις τῆς E_n εἶναι:
 $\frac{x^2}{(\frac{a}{n})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{n})^2} = 1$. Ἡ δὲ θεωροῦμεν τὸν δαυτύλιον D_n ποῦ περιέχεται μεταξὺ τῆς δο-
 θείας ἐλλείψεως καί τῆς E_n καί ἄς θεωρήσωμεν ἐν συνεχείᾳ τὸ ὀλοκληρώμα:

$$I_n = \iint_{D_n} \frac{|xy| dx dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \quad (1) \quad \text{ἢ} \quad \frac{I_n}{4} = \iint_{\Phi_n} \frac{xy dx dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad x > 0, y > 0$$

ὅπου Φ_n τὸ τέταρτον τοῦ ἀνωτέρω δαυτύλιου.

Ἐυτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $x = a \rho \sin \theta$, $y = b \rho \eta \mu \theta$ εἰς τὸ τελευταῖον ὁλοκλήρωμα, ὅτε ὁ ἑλλειπτικὸς τεταρτοδαυτύλιος Φ_n^* μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον χωρίον Φ_n^* (βλ. Σχ.1) καὶ τὸ ὀλοκλήρωμα I_n γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{4} &= a^2 b^2 \iint_{\Phi_n^*} \frac{\eta \mu \theta \sin \theta d\rho d\theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \eta \mu^2 \theta)^3}} = \frac{a^2 b^2}{2} \int_{1/\eta}^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\eta \mu \theta d\theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \eta \mu^2 \theta)^3}} \\ &= \frac{a^2 b^2}{6} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2\theta\right)^{3/2} d(\sin 2\theta) \\ &= \frac{a^2 b^2}{2(b+a)} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \end{aligned}$$


Σχ.1

καὶ ἐπομένως: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{2ab}{a+b}$.

• Ὑπάρχουν καὶ περιπτώσεις ὅπου ἡ θεωρηθεῖσα συνάρτησις δὲν ὀρίζεται εἰς ἓνα ἢ περισσότερα σημεῖα. Ἐάν π.χ. ἡ ὀλοκληρωτέα συνάρτησις γίνεταί ἄπειρος κατὰ μῆκος μιᾶς καμπύλης (γ), εἶναι τότε ἀναγκαῖον νὰ ὀρίσωμεν μιάν ἀμολογιδίαν πεδίων ὀλοκληρώσεως περιυψεύουσα τὴν καμπύλην (γ) καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ εὗρωμεν τὴν ἀντίστοιχον ἀμολογιδίαν τῶν ὀλοκληρωμάτων, ὡς δεικνύεται εἰς τὸ ἐπόμενον παράδειγμα.

Παράδειγμα 3^{ον} Νὰ εὗρεθῶν αἱ τιμαὶ τοῦ $q > 0$ διὰ τὰς ὁποίας τὸ ὀλοκλήρωμα: $\iint_D \left(\frac{x}{y}\right)^q dx dy$ συγκλίνει, ὅπου D τὸ χωρίον $\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ὀλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι θετικὴ, ἐντὸς τῶν σημείων τοῦ ἄξονος τῶν x τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ὑπὸ τῶν σχέσεων: $y=0, 0 \leq x \leq 1$, ὅπου αὕτη δὲν ὀρίζεται. Πρόκειται λοιπὸν περὶ ἑνὸς γενικευμένου ὀλοκληρώματος καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ἀνώμαλα σημεῖα εἶναι τὸ ἀνωτέρω εὐθύγραμμον τμήμα, δηλ. τὸ $y=0, 0 \leq x \leq 1$. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τοῦτο δυνάμεθα καὶ ἐν προκειμένῳ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα VIII-7-2 καὶ τὸ ὁποῖον παραμένει ἰσχύον καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἀντὶ σημείου ἔχομεν εὐθύγραμμον τμήμα, ὅπου ἡ συνάρτησις δὲν ὀρίζεται. Θὰ θεωρήσωμεν λοιπὸν τὴν ἀμολογιδίαν τῶν ὀρθογωνιαίων τῶπων $D_n = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{n} \leq y \leq 1\}$, $n \geq 2$ καὶ τὴν ἀντίστοιχον ἀμολογιδίαν τῶν ὀλοκληρωμάτων,

ήτοι την :

$$I_n = \iint_{D_n} \left(\frac{x}{y}\right)^q dx dy = \int_0^1 x^q dx \cdot \int_{y_n}^1 \frac{dy}{y^{q+1}}. \text{ Είναι γνωστόν ότι του } n \uparrow \infty \text{ το}$$

$$\int_{y_n}^1 \frac{dy}{y^{q+1}} \text{ συγχλίνει διά } 0 < q < 1. \text{ Οθεν, και το όλομήρωμα συγχλίνει διά } 0 < q < 1.$$

Παράδειγμα 4^ο Να υπολογισθῇ τὸ ὅλομήρωμα $\iint_D yx^{-\frac{1}{2}} dx dy$, ὅπου D εἶναι τὸ τετράγωνον μέσορυσας τὰ σημεῖα $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

Λύσις: Ἡ θεωρηθεῖσα συνάρτησις δὲν εἶναι ὠρισμένη ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου πού ὀρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $(0,0), (0,1)$. Ἐπὶ πλεον δὲ εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον τοῦ θεωρηθέντος τετραγώνου εἶναι συνεχὴς καὶ θετιτὴ καὶ ὥς ἐν τούτῳ δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸ θεώρημα VIII-7-2. Ἐστω D_ϵ εἶναι τὸ ὀρθογώνιον πού ὀρίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας $x=\epsilon, x=\tau, y=0$ καὶ $y=1$. Ἐπειδὴ ἡ $f(x,y)=yx^{-\frac{1}{2}}$ εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ D_ϵ δὲ εἶναι ὁλομηρώσιμος ἐπ' αὐτοῦ καὶ βάσει τοῦ προαναφερθέντος θεωρήματος δὲ ἔκωμεν:

$$\iint_{D_\epsilon} yx^{-\frac{1}{2}} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\epsilon} yx^{-\frac{1}{2}} dx dy.$$

$$\text{Ἐχομεν ὁμως: } \iint_{D_\epsilon} yx^{-\frac{1}{2}} dx dy = \int_\epsilon^1 dx \int_0^1 yx^{-\frac{1}{2}} dy = \int_\epsilon^1 dx \left[\frac{y^2}{2\sqrt{x}} \right]_0^1 = \int_\epsilon^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{\epsilon}.$$

$$\text{Ὅθεν, } \iint_D yx^{-\frac{1}{2}} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{1 - \sqrt{\epsilon}\} = 1.$$

Πρότασις VIII-7-1. Ἡ σύγκλισις τοῦ ὁλομηρώματος $\iint_D |f(x,y)| dx dy$ (ἀπόλυτος σύγκλισις) συνεπάγεται τὴν σύγκλισιν τοῦ ὁλομηρώματος $\iint_D f(x,y) dx dy$.

Ἀπόδειξις: Κατ' ἀρχὰς ἀναχωροῦμεν ἐν τῇ παρατηρήσει ὅτι εἰάν $f_1(x,y)$ καὶ $f_2(x,y)$ εἶναι δύο θετικαὶ συναρτήσεις τοιαῦται, ὥστε $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$ διὰ πᾶσα $(x,y) \in D \setminus \{P\}$ καὶ τὸ ὁλομήρωμα $\iint_D f_2(x,y) dx dy$ συγχλίνει, τότε καὶ τὸ ὁλομήρωμα $\iint_D f_1(x,y) dx dy$ συγχλίνει. Ἐξ ἄλλου $0 \leq |f(x,y)| - f(x,y) \leq 2|f(x,y)|$ καὶ ἐπει-

δὴ τὸ ὁλομήρωμα $\iint_D |f(x,y)| dx dy$ συγχλίνει, ἐξ αὐτοῦ ἔπεται καὶ τὸ $\iint_D \{|f(x,y)| - f(x,y)\} dx dy$

συγκλίνει. Ὅθεν ὑπάρχει τὸ:
$$\iint_D [|f(x,y)| - \{ |f(x,y)| - f(x,y) \}] dx dy =$$

$$= \iint_D f(x,y) dx dy$$
 ἥτοι τὸ $\iint_D f(x,y) dx dy$ συγκλίνει.

Ἐνα ἀξιοσημείωτον κριτήριο συνιδήσεως γενικευμένου ὁλοκληρώματος εἶναι τὸ κατωθί:

Πρόταση VIII - 7-2. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ χωρίου D ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ εἶναι συνεχής, ἔξαιρέσει τοῦ σημείου $P(0,0) \in D$, ὅπου ἡ $f(x,y)$ εἰς αὐτὸ γίνεται ἀπειρος καὶ ἔαν ὑπάρχῃ ἓνας σταθερὸς ἀριθμὸς $M > 0$ καὶ ἓνας θετικὸς ἀριθμὸς $q < 2$ τοιοῦτος, ὥστε: $|f(x,y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2})^q}$ διὰ καθε $(x,y) \in D \setminus P$, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα $\iint_D f(x,y) dx dy$ συγκλίνει.

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν ὡς γνωστόν:

$$\left| \iint_{D_n} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{D_n} |f(x,y)| dx dy \leq M \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^q} \quad (1),$$

ὅπου τὸ $D_n = D \setminus U_n$ καὶ ἡ U_n εἶναι ἕνα κύκλος κέντρου $P(0,0)$ καὶ αὐτίνος $R_n = \frac{1}{n}$. Λαμβάνοντες τὰ ὅρια τῆς ἀνωτέρω σχέσεως διὰ $n \uparrow \infty$ καὶ ἐπειδὴ $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^q}$ ὑπάρχει (βλ. προηγούμενον παράδειγμα 19') ἔπεται ὅτι καὶ τὸ ὁλοκληρῶμα $\iint_D f(x,y) dx dy$ συγκλίνει.

Ἀναλόγους ὁρισμοὺς δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ διὰ τὰ τριπλᾶ ὁλοκληρώματα.

Παράδειγμα 59/ Νὰ υπολογισθῇ τὸ ὁλοκληρῶμα:

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^q}$$

ὅπου τὸ χωρίον D ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνίσωτης $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Λύσις: Ὀρίζομεν τὸ χωρίον D_n τοιοῦτον ὥστε: $\frac{1}{n} \leq \rho \leq 1$, ὅπου $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Εἰσάγωμεν σφαιρικὰς συντεταγμένας, ἥτοι: $x = \rho \sin \theta \cos \phi$, $y = \rho \sin \theta \sin \phi$, $z = \rho \cos \theta$, ὅτε εὐρίσκομεν:

$$\iiint_{D_n} \frac{dx dy dz}{\rho^q} = \int_0^{2\pi} \int_0^n \int_{1/n}^1 \frac{1}{\rho^{q+2}} n \rho^2 d\rho d\varphi d\theta = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-q} \left(1 - \frac{1}{n^{3-q}}\right), & \text{εάν } 0 \leq q < 3 \\ 4 \log n & \text{" } q = 3 \\ \frac{4\pi}{q-3} (n^{q-3} - 1) & \text{" } q > 3 \end{cases}$$

Συμπεραίνομεν ότι, τὸ ὁλοκλήρωμα συρρίννει διὰ $q < 3$ καὶ ἀπουλίνει διὰ $q \geq 3$.

Ἐνα ἀνάλογον κριτήριον διὰ τὰ τριπλᾶ ὁλοκληρώματα πρὸς τὴν Πρότασιν VIII-7-2 εἶναι ἡ κατωθί:

Πρότασις VIII-7-3. Ἐάν ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ χωρίου V ἡ συνάρτησις $f(x, y, z)$ εἴναι συνεχὴς, ἐξαιρέσει τοῦ σημείου $P(0, 0, 0) \in V$, ὅπου ἡ $f(x, y, z)$ εἰς αὐτὸ χίνεται ἀπειρος καὶ ἐάν ὑπάρχῃ ἓνας σταθερὸς ἀριθμὸς $M > 0$ καὶ ἓνας θετικὸς ἀριθμὸς $q < 3$ τοιοῦτος ὥστε: $|f(x, y, z)| \leq \frac{M}{(Vx^2 + y^2 + z^2)^q}$ διὰ καθε $(x, y, z) \in V \setminus P$, τότε τὸ ὁλοκληρώμα $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ συρρίννει.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω συμπερασμάτων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ὁλοκληρώματα:

$$\iint_D \frac{f(x, y) dx dy}{(V(x-a)^2 + (y-b)^2)^q}, \quad q < 2$$

$$\iiint_V \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{(V(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2)^q}, \quad q < 3$$

ὅπου (a, b) ἢ (a, b, γ) εἶναι σταθερά ἐσωτερικὰ σημεία τῶν χωρίων D ἢ V ἀντιστοίχως καὶ ἡ συνάρτησις f εἶναι συνεχὴς ἐπὶ τοῦ D ἢ V ἀντιστοίχως.

Πρὸς τοῦτοις ἐπιτελοῦμεν ἓναν γραμμικὸν μετασχηματισμόν, ὥστε τὸ σημείον (a, b) ἢ (a, b, γ) νὰ ἔλθῃ εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἐν συνεχείᾳ ἔρμαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω. Ἀναλόγως εἰς τὴν περίπτωσιν N ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τὸ N -πλοῦν γενικευμένον ὁλοκληρώμα $\iiint \dots \int \frac{C}{r^q} dx_1 dx_2 \dots dx_n$, C : σταθερά, ὅπου $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}$ συρρίννει διὰ $q < n$ καὶ ἀπουλίνει διὰ $q \geq n$, ἐάν τὸ σημείον $M \equiv (x_1^0, \dots, x_n^0)$ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ χωρίου Ω .

II. Έστω ότι το χωρίον D δεν είναι φραγμένον. Προσεγγίσομεν αυτό διά μιᾶς ἀμοιουθίας ὑπο-χωρίων $D_1, D_2, \dots, D_n \dots$ τὰ ὅποια εἶναι πάντα φραγμένα καὶ ἔχουν τὴν ιδιότητα ὅτι καθε αὐθαίρετον φραγμένον ὑπο-χωρίον τοῦ D περιέχεται εἰς καθε D_n ὅπου $n \geq$ ἑνὸς ἀκεραίου m . Π.χ. ἔάν τὸ D εἴναι τὸ ἐπίπεδον ὡς D_n δυνάμεθα νὰ ἐυλόξωμεν τὰ κυκλικὰ χωρία με κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ αὐτὰ n .

Ὁρισμός VIII - 7-2. Έστω ότι τὸ χωρίον D δεν εἶναι φραγμένον καὶ ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ συνεχὴς ἐν D . Έστω $\{D_n\}$ μία ἀμοιουθία φραγμένων χωρίων ὡς ὤρισθη ἀνωτέρω. θεωροῦμεν τὴν ἀμοιουθίαν τῶν ὁλοκληρωμάτων:

$$I_n = \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

Ἐάν τοῦ $n \uparrow \infty$ ἡ ἀμοιουθία (1) συγκλίνη καὶ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐυλογείας ἀμοιουθίας $\{D_n\}$, τότε τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται γενικευμένον ὁλοκληρώμα τῆς f ἐπὶ τοῦ μὴ φραγμένου χωρίου D καὶ συμβολίζεται οὕτω: $\iint_D f(x, y) dx dy$. Συμφώνως πρὸς τὸν ὅρισμόν ἔχομεν:

$$\iint_D f(x, y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

Θὰ λέωμεν ἐν προκειμένῳ ὅτι τὸ ὁλοκληρώμα $\iint_D f(x, y) dx dy$ συγκλίνει ἐν D .

Ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει θὰ λέωμεν ὅτι τὸ ὁλοκληρώμα ἀπομυλίνει ἐν D .

Ἀνάλογος ὅρισμος δίδεται καὶ διὰ τὰ τριπλᾶ ὁλοκληρώματα καὶ γενικῶς πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα.

Σημείωσις: Τὰ συμπεράσματα τῶν θεωρημάτων VIII-7-1 καὶ VIII-7-2 μεταφέρονται κατ' ἀναλογίαν καὶ εἰς τὰ γενικευμένα ὁλοκληρώματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους διὰ τὰς μὴ ἀρνητικὰς συναρτήσεις.

Παράδειγμα 6^{ον} Νὰ ἐξετασθῇ ἔάν συγκλίνη τὸ ὁλοκληρώμα $I = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$, ὅπου D εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν x, y .

Λύσις: Ἐπειδὴ ἡ ὁλοκληρωτέα συνάρτησις εἶναι θετικὴ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν τὴν σύγκλισιν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος διὰ τὴν αὐξουσαν ἀκολουθίαν τῶν χωρίων ὁλοκληρώσεως ἥτοι τὴν $D_n: x^2 + y^2 \leq n^2, n=1, 2, 3, \dots$

$$\text{Ἐστω } I_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad (1) \quad \text{ὅπου } D_n = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

Μετασχηματίζοντες τὸ (1) εἰς πολικὰς συντεταγμένας ἔχομεν:

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

καὶ $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi.$

Παρατήρησις: Ἐὰν λάβωμεν ὡς $D_n = \{(x, y): |x| \leq n, |y| \leq n\}$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$I_n = \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(2 \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Ἐπειδὴ $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, (βλ. σελ. 186) ἔπεται ὅτι:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \left(2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 = \pi.$$

Πρότασις VIII - 7-4. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μὴ φραγμένου χωρίου D τὸ ὁλοκληρώμα $\iint_D |f(x, y)| dx dy$ συγκλίνει (ἀπόλυτος σύγκλισις), τότε καὶ τὸ ὁλοκληρώμα $\iint_D f(x, y) dx dy$ συγκλίνει.

Πρότασις VIII - 7-5 Ἐὰν ἐπὶ τοῦ μὴ φραγμένου χωρίου D ἡ συνάρτησις $f(x, y)$ εἶναι συνεχὴς καὶ ὑπάρχῃ ἓνας σταθερὸς ἀριθμὸς $M > 0$ καὶ ἓνας θετικὸς ἀριθμὸς $q > 2$ εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν: $|f(x, y)| \leq \frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2})^q}$ διὰ καθε $(x, y) \in D$, τότε τὸ ὁλοκληρώμα $\iint_D f(x, y) dx dy$ συγκλίνει.

Ἀπόδειξις: θεωροῦμεν μίαν αὐξουσαν ἀκολουθίαν φραγμένων χωρίων D_n καὶ

Έστω δέ ότι τό D_n περιέχεται εἰς τόν δαυτύλιον μέ αὐτίνα $\rho = \rho_0$ καί $\rho = R_n$, ὅπου τοῦ $n \uparrow \infty$ τό $R_n \uparrow \infty$. Ὁλοκληρώνομεν τήν $f(x, y)$ ἐπὶ τοῦ χωρίου D_n καί εἰσάγοντες ποδὺν συντεταγμένας ἔχομεν:

$$\left| \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{D_n} |f(x, y)| dx dy \leq M \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\rho_0}^{R_n} \rho^{\frac{2\pi M}{q-2}} \left(\frac{1}{\rho^{q-2}} - \frac{1}{R_n^{q-2}} \right)$$

καί $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{2\pi M}{(q-2)\rho_0^{q-2}}$, ὁῦτι $\frac{1}{R_n^{q-2}} \searrow 0$

Ὁθεν, $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{2\pi M}{(q-2)\rho_0^{q-2}}$, ἥτοι τό $\iint_D f(x, y) dx dy$ συρπλίνει.

Πάντα τὰ ἀνωτέρω ἐπεντείνονται ματ' ἀναλογίαν καί εἰς τὰ τριπλᾶ καί γενικῶς πολλαπλᾶ ὁλοκληρώματα.

Παράδειγμα 7^ο/ Νά ἔξετασθῇ ὡς πρὸς τήν σύγκλισιν τό ὁλοκληρώμα:

$$\iint_D \frac{nxy dx dy}{x^2(1+y^2)}, \text{ ὅπου } D = \{(x, y) : 1 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Λύσις: Ὅρισομεν τήν ἀυσλοιδίαν τῶν φαρμένων χωρίων D_n : $D_n = \{(x, y) : 1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq 1\}$.

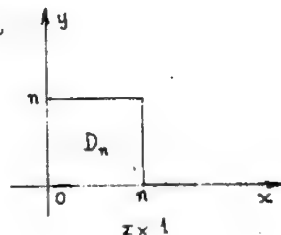
Εἶναι ὁέ, $\iint_{D_n} \left| \frac{nxy}{x^2(1+y^2)} \right| dx dy \leq \iint_{D_n} \frac{dx dy}{x^2} = \int_1^n \frac{dx}{x^2} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n \cdot \left[\arctan y \right]_0^1 = \left[-\frac{1}{n} + 1 \right] \cdot \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}, n \uparrow \infty$

Ὁθεν, συρπλίνει τό $\iint_D \left| \frac{nxy}{x^2(1+y^2)} \right| dx dy$, ἄρα καί τό $\iint_D \frac{nxy}{x^2(1+y^2)} dx dy$.

Παράδειγμα 8^ο/ Νά μελετηθῇ ὡς πρὸς τήν σύγκλισιν τό ὁλοκληρώμα τοῦ Cayley $\iint_D n(x^2+y^2) dx dy$, ὅπου $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Λύσις θεωροῦμεν ὡς χωρία D_n τὰ τετράγωνα πλευρᾶς n , (βλ. Σχ.1), ὅτε δά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{D_n} n(x^2+y^2) dx dy = \iint_{D_n} (nmx^2 \sin y^2 + \sin x^2 nmy^2) dx dy \\ &= 2 \cdot \int_0^n nmx^2 dx \cdot \int_0^n \sin y^2 dy. \end{aligned}$$



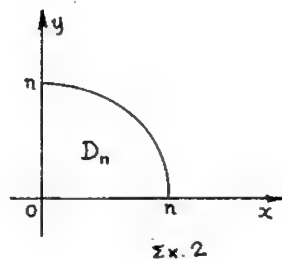
Τού $n \rightarrow \infty$ ἡ τελευταία σχέσης δίδει τὰ γνωστά ὡς ὁλοκληρώματα τοῦ Fresnel (βλ. ἄσκ. 30, σελ. 255). Ὅθεν ἔχομεν:

$$\int_0^{\infty} \eta \mu x^2 dx = \int_0^{\infty} \sigma \nu x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Ὅθεν, } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ἐάν ἤδη λάβωμεν ὡς χωρία D_n ἅτι τὰ τετράγωνα, ἀλλὰ τεταρτοκύκλια αὐτῶνος η (βλ. Σχ. 2) καὶ διὰ μεταβάσεως εἰς πολικὰς συντεταγμένας θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{D_n} \eta \mu (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D_n} \eta \mu \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^n \eta \mu \rho^3 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2} (1 - \sigma \nu n^2). \end{aligned}$$



Τού $n \rightarrow \infty$ τὸ $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ δὲν ὑπάρχει, ἀλλὰ ταλαντεύεται μεταξύ τῶν τιμῶν 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$.

Συνεπῶς διὰ διαφορετικῆς σίμωμενείας περιοχῶν παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ Cayley ἄλλοτε ὑπάρχει καὶ ἄλλοτε δὲν ὑπάρχει. Ἄρα τὸ δοθέν ὁλοκλήρωμα ἀπουλίνει.

Παράδειγμα 3² Νὰ υπολογισθῇ τὸ γενικευμένον ὁλοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2}$$

Λύσις: Ὁ τόπος τῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι τὸ χωρίον V τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων: $0 \leq x, y, z < +\infty$.

Πρὸς τοῦτοις θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν χωρίων Ω_n , τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀνισοτήτων:

$$\Omega_n: x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2 \text{ καὶ } x, y, z \geq 0, n=1, 2, 3, \dots$$

καὶ ἔστω:

$$I_n = \iiint_{\Omega_n} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2} \quad (1)$$

Μετασχηματίζοντας το (1) εἰς σφαιρικές συντεταγμένες ἔχομεν :

$$I_n = \iiint_{\Omega_n^+} (p^2 + a^2)^{-2} \cdot p^2 \cdot \eta \mu \varphi \, dp \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu \varphi \, d\varphi \int_0^{\infty} (p^2 + a^2)^{-2} p^2 \, dp$$

$$= \frac{n}{2} \int_0^{\infty} (p^2 + a^2)^{-2} p^2 \, dp = \frac{n}{4} \left(-\frac{n}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{n}{a} \right)$$

Ὅθεν, $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi^2}{8a}$.

§ 8. ΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΙ ΒΗΤΑ

Ι. Ἡ συνάρτησις Γάμμα καὶ ιδιότητες αὐτῆς. Εἰς τὸ Κεφάλαιον XV, § 6 τοῦ Πρώτου Τόμου ὠρίσαμεν τὴν συνάρτησιν Γ καὶ ἐμελετήσαμεν μεριχὰς ἀπλῆς ιδιότητος αὐτῆς. Εἰς τὴν παρούσαν παράγραφον δὲ μελετήσωμεν μεριχὰς αὐόμῃ ιδιότητος τῆς συναρτήσεως Γ , ἀπολούθως δευθ' ὀρίσωμεν μιαν ἄλλην σπουδαίαν συνάρτησιν, τὴν συνάρτησιν B καὶ δὲ ἴδωμεν πως συνδέεται αὕτη μετὰ τῆς συναρτήσεως Γ .

Ὡς γνωστὸν ἡ συνάρτησις Γ ὀρίζεται ὑπὸ τοῦ ὀλουληρώματος :

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{t-1} \, dx, \quad t > 0 \quad (1)$$

καὶ ἔχει τὰς κατωθὶ χαρακτηριστικὰς ιδιότητας (βλ. Τόμος Α Κεφ. XV, § 6).

α) $\Gamma(1) = 1$, β) $\Gamma(t+1) = t \cdot \Gamma(t)$, γ) $\Gamma(n+1) = n!$, διὰ $n \in \mathbb{N}$ \

δ) $\Gamma(t+n+1) = t \cdot (t+1) \cdot (t+2) \cdots (t+n) \cdot \Gamma(t)$.

Εἰς τὴν (1) ἐπιτελοῦντες τὸν μετασχηματισμὸν $x = u^2$ λαμβάνομεν :

$$\Gamma(t) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot u^{2t-1} \, du \quad (2)$$

Εἰδιωὺς διὰ $t = \frac{1}{2}$ ἔχομεν :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} \, du = \sqrt{\pi} \quad (3)$$

Ἐάν n αὐέραιος, τότε εὐνόλως ὑπολογίζεται ὅτι :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

και λόγω των (2) και (3) έχουμε:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2n} du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} \quad (4)$$

Το ολοκλήρωμα (1) συγκλίνει διά $0 < t < +\infty$ και άπειρο είναι διά $t \leq 0$ (διότι).
Το έν λόγω ολοκλήρωμα είναι γενικευμένον ως προς το κάτω όριον διά $t < 1$.

Αποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν αξιοσημείωτον ιδιότητα της συναρτήσεως Γ .

Πρότασις VIII - 8-1. Η συνάρτησις Γ είναι συνεχής και έχει παραγώγους πάσης τάξεως διά πάδε $t \in (0, +\infty)$.

Απόδειξις: Αποδεικνύομεν κατ' αρχήν ότι το $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ συγκλίνει ομαλώς ως προς την παράμετρον t εις πάδε πεπερασμένον διάστημα $[a, b]$, ήτοι διά πάδε t μέ $0 < a \leq t \leq b < +\infty$.

Πράγματι το ολοκλήρωμα (1) γράφεται:

$$\Gamma(t) = \int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x} x^{t-1} dx$ συγκλίνει ομαλώς διά πάδε $t \in [a, b]$ και $0 < x \leq 1$

καθ' όσον ισχύει:

$$|e^{-x} x^{t-1}| = e^{-x} x^{t-1} \leq x^{t-1} \leq x^{a-1}$$

Όμοίως το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ συγκλίνει ομαλώς, λόγω του κριτηρίου του Weierstrass (βλ. Τόμος Πρώτος, θεώρ. XVIII-9-1), διά πάδε $t \in [a, b]$ και $1 \leq x < +\infty$.

Εφ' όσον άμφότερα τά ολοκληρώματα συγκλίνουν ομαλώς συγχρόνως διά πάδε $t \in [a, b]$, το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ συγκλίνει ομαλώς εις την συνάρτησιν $\Gamma(t)$.

Εφ' όσον η $f(x, t) = e^{-x} x^{t-1}$ είναι συνεχής διά $x \in (0, +\infty)$ και $t > 0$ και το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ συγκλίνει ομαλώς ως προς την παράμετρον t εις πάδε πεπερασμένον διάστημα $[a, b]$ μέ $0 < a \leq t \leq b < +\infty$, το ολοκλή-

ρωμα $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ είναι συνεχής συνάρτησις εις υάθε τέτοιο διάστημα (βλ. Θεώρ. VII-13-1) δηλ. η $\Gamma(t)$ είναι συνεχής συνάρτησις διά υάθε $t \in (0, +\infty)$.

Θά μελετήσωμεν τώρα την συνάρτησιν $\Gamma(t)$ ως πρὸς τὴν παράγωγον.

Ἐστω $f(x, t) = e^{-x} x^{t-1}$ με $0 < x < +\infty$ καὶ $t > 0$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = e^{-x} (\log x) \cdot x^{t-1}$ εἶναι συνεχής διά υάθε $x \in (0, +\infty)$ καὶ $t > 0$, τό δὲ ὁλοκληρώμα ταύτης, ἦτοι τό:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} (\log x) x^{t-1} dx \equiv \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

συγκλίνει ὁμαλῶς ἐφ' ἐκάστου υἡλειστοῦ διαστήματος $[a, b]$ με $0 < a \leq t \leq b < +\infty$.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου τοῦ Weierstrass (βλ. Θεώρ.

→ XVIII-9-1, Τόμος Α')

$$\text{διὰ τὰ ὁλοκληρώματα: } -t- \int_0^1 e^{-x} (\log x) x^{t-1} dx \text{ καὶ } \int_1^{+\infty} e^{-x} (\log x) x^{t-1} dx$$

διὰ τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἀντιστοίχως:

$$M(x) = x^{a-1} |\log x| \text{ καὶ } M(x) = x^{b-1} \cdot |\log x| e^{-x}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι πληροῦνται πᾶσαι αἱ ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος VII-13-2 καὶ συνεπῶς ἡ $\Gamma(t)$ παραγωγίζεται καὶ ἰσχύει:

$$\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (\log x) x^{t-1} dx.$$

Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι k -τάξεως τῆς $\Gamma(t)$ καὶ ἰσχύει:

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} (\log x)^k x^{t-1} dx, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

II. Ἡ συνάρτησις Βήτα καὶ ιδιότητες αὐτῆς. Τό ὁλοκληρώμα:

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (1)$$

τό ὁποῖον συγκλίνει, ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως, τῇ βοήθειᾳ τῆς προτάσεως XV-3-3 τοῦ πρώτου Τόμου, διά $p > 0$ καὶ $q > 0$ ἀρεῖ νὰ γραφῇ οὕτω:

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (2)$$

ορίσει μίαν συνάρτησιν δύο μεταβλητών, τὴν :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

ἥτις καλεῖται ἡ βῆτα συνάρτησις τοῦ Binet.

Διὰ τὴν συνάρτησιν $B(p, q)$ ἰσχύουν τὰ κατωθί :

Ἰδιότης 1^η : $B(p, q) = B(q, p)$

Ἀπόδειξις : Ἐυτελῶντας τὸν μετασχηματισμὸν : $x = 1-t$ ἔχομεν :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = - \int_1^0 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt = B(q, p).$$

Ὅθεν ἡ βῆτα συνάρτησις εἶναι συμμετρικὴ συνάρτησις τῶν p, q .

Ἰδιότης 2^η $B(p, q) = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta$.

Ἀπόδειξις : Χρησιμοποιῶντας τὸν μετασχηματισμὸν $x = \sin^2 \theta$ ἔχομεν :

$$B(p, q) = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta)^{p-1} (\cos^2 \theta)^{q-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta.$$

Σημείωσις : Διὰ $p=q=\frac{1}{2}$ ἔχομεν : $B(p, q) \equiv B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$.

Ἡ συνάρτησις βῆτα συνδέεται μὲ τὴν γάμμα συνάρτησιν διὰ τῆς σχέσεως :

Ἰδιότης 3^η $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, q > 0.$

Ἀπόδειξις : Ἡ συνάρτησις $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $x=y^2$ γίνεταί :

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2t-1} dy \quad (a)$$

Ὅθεν :

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2p-1} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2q-1} dy \right) \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} dx dy \quad (b) \end{aligned}$$

Διά μετασχηματισμοῦ εἰς πολικὴς συντεταγμένες $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \cos \theta$ καὶ ἔχοντας ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ιδιότητα τῆς βῆτα συναρτήσεως, ἡ σχέση (β) γίνεται:

$$\begin{aligned}\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2(p+q)-1} \cdot \eta \mu^{2q-1} \theta \cdot \sigma \upsilon \nu^{2p-1} \theta \, d\rho d\theta = \\ &= 4 \left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2(p+q)-1} d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \eta \mu^{2q-1} \theta \cdot \sigma \upsilon \nu^{2p-1} \theta \, d\theta \right) \\ &= 2 \cdot \Gamma(p+q) \cdot \int_0^{\pi/2} \eta \mu^{2q-1} \theta \cdot \sigma \upsilon \nu^{2p-1} \theta \, d\theta = \Gamma(p+q) \cdot B(q, p) = \Gamma(p+q) \cdot B(p, q).\end{aligned}$$

Ὅθεν: $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $p > 0$, $q > 0$

- Διὰ $p=q=\frac{1}{2}$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως:

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1)$$

Ἀλλὰ $\Gamma(1)=1$ καὶ $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$, ὁθεν:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi \text{ καὶ συνεπῶς: } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Ἀλλὰ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, ὁθεν:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ἵτοι, τῇ βοήθειᾳ τῶν συναρτήσεων Βῆτα καὶ γάμμα ὑπολογίζομεν τὸ γνωστὸν ὁλοκλήρωμα τοῦ Euler.

Ἰδιότης 4η Ἡ $B(p, q)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ καθε $p > 0$ καὶ $q > 0$.

Τοῦτο εἶναι ἀμέσως συνέπεια τῆς προηγουμένης ιδιότητος καὶ τῆς προτάσεως VIII-85.1.

Δύο ἀξιόλογοι ἐφαρμογαὶ τῶν συναρτήσεων $B(p, q)$ καὶ Γάμμα εἶναι αἱ κατωθί:

Ἐφαρμογὴ 1η: Νὰ υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ Wallis:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \eta \mu^n \theta \, d\theta$$

Λύσις: 'Η σχέσις:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \eta \mu^p \theta \cdot \sigma \nu^q \theta \, d\theta$$

διὰ $p = \frac{n+1}{2}$ και $q = \frac{1}{2}$ δίδει:

$$B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \eta \mu^n \theta \cdot d\theta, \text{ ὅθεν}$$

$$\int_0^{\pi/2} \eta \mu^n \theta \, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

και ἐπειδὴ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ἔχομεν:

$$\Gamma_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Ἐφαρμογή 2^η Δείξατε ὅτι διὰ μέγαλον n , ἰσχύει:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \text{ (τύπος τοῦ Stirling)}^{1)}$$

Λύσις: Ἐχομεν:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = \int_0^{+\infty} e^{n \log x - x} dx \quad (1)$$

Θέτοντες $x = n + y$ ἡ (1) γίνεται:

$$\Gamma(n+1) = e^n \int_{-n}^{+\infty} e^{n \log(n+y) - y} dy = e^n \int_{-n}^{+\infty} e^{n \log n + n \log\left(1 + \frac{y}{n}\right) - y} dy = n^n \cdot e^{-n} \int_{-n}^{+\infty} e^{n \log\left(1 + \frac{y}{n}\right) - y} dy \quad (2)$$

Ὡς γνωστόν (βλ. Τόμος Πρώτος, σελ. 412).

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

και διὰ $x = \frac{y}{n}$ λαμβάνομεν:

$$\log\left(1 + \frac{y}{n}\right) = \frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3n^3} - \dots \quad (3)$$

Εἰς τὴν (2) θέτοντες $y = \sqrt{n} \cdot u$ και ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (3) λαμβάνομεν:

$$\Gamma(n+1) = n^n \cdot e^{-n} \int_{-n}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2n} + \frac{y^3}{3n^2} - \dots} dy = n^n \cdot e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3\sqrt{n}} - \dots} du$$

1) Δηλ. τό $\frac{n!}{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}} \rightarrow 1, n \uparrow \infty.$

Ἡ τελευταία σχέση δια η άρμετά μεγάλο γράφεται :

$$\Gamma(n+1) = n! \cdot e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (4)$$

Αλλά $\Gamma(n+1) = n!$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$. ὁθεν η (4) δίδει :

$$n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$$

Συμπληρώματα και άσκήσεις :

1. Νά εύρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τοῦ φρασσομένου ὑπό τῆς ἐπιφανείας $z = 4 - x^2 - y^2$ καί τοῦ ἐπιπέδου xy .
2. Νά εύρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $z = x^2$ καί $z = 4 - x^2 - y^2$.
3. Ὑπολογίσατε τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ πού περιυλίζεται ὑπό τῶν δύο ἐλλειπτικῶν παραβολοειδῶν $y^2 + 2z^2 + x - 16 = 0$ καί $2y^2 + z^2 - x = 0$.
4. Νά ὑπολογισθῇ τό ὅλουλῆρωμα $\iiint_V x \, dV$, ὅπου V εἶναι τό χωρίον τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $y = x^2$, $y = x + 2$, $4z = x^2 + y^2$ καί $z = x + 3$.
5. Νά ὑπολογισθῇ τό ὅλουλῆρωμα $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$, ὅπου V εἶναι τό χωρίον τό εύρισώμενον εἰς τό πρῶτον ὀχδομημόριον καί φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $x + 2y = 6$, $z^2 + y^2 = 4$.
6. Νά εύρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον φράσσεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $z = x^2 + y^2$ καί $z = 2x$.
7. Νά εύρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τό ὁποῖον περιυλίζεται ὑπό τῶν ἐπιφανειῶν $z = x^2 + y^2$ καί $x^2 + y^2 = a^2$, $z \geq 0$.
8. Νά ὑπολογισθῇ τό ὅλουλῆρωμα $\iiint_V z \eta \mu(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, ὅπου V εἶναι τό σφαί-

ριών τμήμα με μία βάση, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας $z = (a^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ καὶ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z = h$ $\rho < h < a$.

9. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου τὸ ὁποῖον φράσσεται ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $4z = x^2 + y^2$ καὶ $z^2 = x^2 + y^2$.
10. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑ.β. καὶ ἡ ροπή ἀδρανείας I_z τοῦ στερεοῦ V , τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $4z = 8 - x^2 - y^2$ καὶ $z \geq 0$, ἐὰν ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἰς ἀάθε σημεῖον εἶναι ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου $z = 0$.
11. Νὰ υπολογισθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας τοῦ κυλινδρικοῦ κώνου $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.
12. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)xyz \, dx \, dy \, dz$$
, ἐπὶ τοῦ χωρίου V τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.
13. Ἐὰν $V = \{(x, y, z): 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, υπολογίσατε τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\iiint_V \frac{z \log(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \, dx \, dy \, dz$$
14. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μᾶσα τοῦ χωρίου $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, ὅταν $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ καὶ ἡ πυκνότης αὐτοῦ εἶναι $\delta(x, y, z) = xyz$.
15. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑ.β. τοῦ ἡμισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$ τοῦ ὁποῖου ἡ πυκνότης εἶναι ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τοῦ κέντρου.
16. Νὰ υπολογισθῇ τὸ
$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
, ὅπου τὸ χωρίον V φράσσεται ὑπὸ τῶν σφαιρῶν $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ καὶ $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, ὅπου $a > b > 0$.

17. Υπολογίστε τη βοθδεία σφαιριών συντεταγμένων

$$\iiint_V \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz$$

$$\text{όπου } V = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, 0 < a < b\}.$$

18. Όμοιως τó $\iiint_V z dx dy dz$, όπου τó χωρίον V ορίζεται υπό της ανισοτήτων $x^2 + y^2 \leq z^2$ και $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

19. Υπολογίστε τó ολοκληρώμα: $\iiint_V \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{z} \right) dx dy dz$,
όπου $V = \{(x, y, z): 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1, 0 < x^2 + y^2 < z^2, 0 < z\}$

20. Νά υπολογισθούν αί συντεταγμένοι τού κ.β. ενός σώματος περιορισμένου υπό μιας σφαίρας ακτίνας a και ενός κώνου γωνίας κορυφής 2ω , όπου ή κορυφή τού κώνου συμπίπτει μέ τó κέντρον της σφαίρας και ή πυκνότης τού σώματος είναι σταθερά.

21. Νά εύρεθῇ ή ροπή αδράνειας τού ἑλλειψοειδούς: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,
ὡς πρὸς μίαν εὐθείαν διερχομένην διά της ἀρχῆς τῶν ἀξόνων καί ἔχούσης διευθύνοντα συνημίτονα (συν α , συν β , συν γ).

22. Νά εύρεθῇ ὁ ὄγκος πού ἀπουσιάζει ἀπὸ τὸ ἑλλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ τὸ ἐπίπεδον $kx + ly + vz = \tau$

23. Εἰς ἕνα σπον τῶν κατωθι ὁλοκληρωμάτων τὸ χωρίον D εἶναι ὁ μοναδιαῖος δίσκος $x^2 + y^2 \leq 1$. Ἐξετάσατε ποῖα ἐξ αὐτῶν συγκλίνουν.

$$\text{i)} \iint_D \frac{x^2 dx dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{ii)} \iint_D \log \frac{1}{r} dx dy, r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad \text{iii)} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x}} \quad \text{iv)} \iint_D \frac{x dx dy}{(x^2 + y^2)\sqrt{1-x}}$$

24. Ἐξετάσατε ποῖα ἐκ τῶν κατωθι ὁλοκληρωμάτων συγκλίνουν.

$$\text{i)} \iiint_V \rho^{-q} dx dy dz, \text{ ὅπου } \rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \text{ καί } V: \rho \geq 1 \text{ καί } q > 0$$

$$\text{ii)} \iiint_V \frac{x dx dy dz}{\rho^3}, \text{ ὅπου } V: 0 \leq \rho \leq 1 \quad \text{iii)} \iiint_V \frac{dx dy dz}{\rho^2(1-x)^{3/2}}, V: 0 \leq \rho \leq 1$$

25. Όμοιως το $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2}}$, όπου το χωρίον V είναι το $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

259. Να υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα: $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x-y}}$ ὅπου τὸ χωρίον D ὁρίζεται ἀπὸ τὰς εὐθείας: $x=y, y=0, x=a$.

26. Ἐξετάσατε ἂν ἔχη ἔννοιαν τὸ ὅλουλήρωμα: $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2 y)(1+y)}$,

ὅπου $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, καὶ υπολογίσατε τοῦτο. Ἀπολοῦθως δείξατε ὅτι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x^2}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

(27) Δείξατε ὅτι: $\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x F(x) (dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-u)^{n-1} F(u) du, n=1, 2, 3, \dots$

Παρατήρησης: Ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς ἀσκήσεως

$$\int_0^x \int_0^x F(x) (dx)^2 = \int_0^x (x-u) F(u) du \quad (\text{βλ. σχετικῶς ἄσκησιν 6 σελ. 210}).$$

→ 28. Υπολογίσατε τὸ ὅλουλήρωμα τοῦ Dirichlet:

$$I = \iiint_V x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} dx dy dz$$

ὅπου $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$

Υπόδ. Θέτοντες $x^2=u, y^2=v, z^2=w$ λαμβάνομεν:

$$I = \frac{1}{8} \iiint_{V^*} u^{\frac{a}{2}-1} v^{\frac{b}{2}-1} w^{\frac{c}{2}-1} du dv dw$$

ὅπου: $V^* = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u+v+w \leq 1, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0\}$

Θέτοντες $v=(1-u)t$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ιδιότητες τῆς συναρτήσεως γάμμα καὶ εἰδιωότερον ὅτι: $x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ τελειῶς εὐρίσκομεν:

$$I = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Gamma(\frac{a}{2}) \Gamma(\frac{b}{2}) \Gamma(\frac{c}{2})}{\Gamma[(a+b+c):2+1]}$$

289. Να υπολογισθῇ τὸ ὅλουλήρωμα $\iint_D x^{-1/2} \cdot y^{-1/3} dx dy$, ὅπου τὸ χωρίον D εἶναι τὸ

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

29. Γνωστού όντος ότι: $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\eta \mu \pi \eta}$, δείξτε ότι:

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\eta \mu \pi \eta}, \text{ δείξτε ότι:}$$

30. Δείξτε ότι: $\int_0^{+\infty} \sqrt{1-x^4} dx = \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \cdot [\Gamma(\frac{1}{4})]^2$

31. Δείξτε ότι: $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta \mu^2 \theta}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot [\Gamma(\frac{1}{4})]^2$

32. Δείξτε ότι: $\int_3^7 \sqrt{(7-x)(x-3)} dx = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \cdot \left\{ \Gamma(\frac{1}{4}) \right\}^2$

33. Εάν $a > 0$, $b > 0$ και $4ab > b^2$ δείξτε ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bxxy+by^2)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{4ab-b^2}}$$

34. Υπολογίστε το όλουθηρωμα $\iiint_V xyz dx dy dz$, όπου V είναι το χωρίον το περιηειόμενον υπό του ελλειψοειδους $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, χρησιμοποιούντες κατ' αρχήν την αλλαγή των μεταβλητών, $x=au$, $y=bv$, $z=\gamma w$ και εν συνεχεία μεταβαίνοντες από τις ορθογώνιες συντεταγμένες (u,v,w) στις αντίστοιχες σφαιρικές.

35. Νά εύρεθούν οι συντεταγμένες του υ.β. της επιφανείας της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ με πυκνότητα $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}$ (Απάντ: $(\frac{1}{3}, 0, 0)$)

36. Υπολογίστε το όλουθηρωμα:

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iiint \sin(\xi x + \eta y + \zeta z) dx dy dz \text{ λαμβανούμενου επί της σφαίρας } x^2+y^2+z^2=1.$$

30. Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων του Fresnel.

Τα ολοκληρώματα:

$$F_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi u(y^2) dy, \quad F_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \sin(y^2) dy \quad (1)$$

είναι γνωστά ως ολοκληρώματα του Fresnel και εύρισουν εφαρμογές εις την οπτικήν.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τούτων εὐτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $y^2 = t$, ὅτε ἔχομεν:

$$F_1 = \int_0^{\infty} \frac{\pi \mu t}{\sqrt{t}} dt, \quad F_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sigma \sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad (2)$$

Ἐν τῷ ολοκληρώματι τοῦ Euler $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ λαμβάνομεν:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} d(x\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ὅθεν:
$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} dx, \quad (3)$$

Ἐν τῶν (2) καὶ (3) ἔχομεν:

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \pi \mu t dt, \quad F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \sigma \sin t dt \quad (4)$$

Ἄν μεταλλάσωμεν $I_1 = \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \pi \mu t dt$ καὶ $I_2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} \sigma \sin t dt$ καὶ ἐφορμόσωμεν παραγοντινὴν ολοκληρώσειν θὰ λάβωμεν:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(-e^{-x^2 t} \sin t \Big|_t^{\xi} \right) - x^2 I_2 \\ I_2 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(e^{-x^2 t} \pi \mu t \Big|_t^{\xi} \right) + x^2 I_1 \end{aligned} \right\} \quad \eta \quad \left\{ \begin{aligned} I_1 &= 1 - x^2 I_2 \\ I_2 &= x^2 I_1 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται ὅτι: $I_1 = \frac{1}{1+x^2}$ καὶ $I_2 = \frac{x^2}{1+x^2}$ καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (4) ἔχομεν:

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^2}, \quad (6)$$

Εἰς τὸ F_2 εὐτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $z = \frac{1}{x}$, ὅτε:

$$F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^0 \frac{\frac{1}{z^2} \cdot \left(-\frac{dz}{z^2}\right)}{1 + \frac{1}{z^2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} = F_1 \quad \text{ἤτοι} \quad F_1 = F_2.$$

Τὸ F_1 υπολογίζεται κατὰ τὰ γνωστά ἐν τοῦ Α' τόμου, βλ. σχετικῶς ἐφαρμογὴ 4^η, σελ. 472, Τόμος Α', ὅτε ἔχομεν τελικῶς:

$$F_1 = F_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Εἰς τὸ παρόν κεφάλαιον θὰ ἀναφέρωμεν βασιμὰ τινὰ στοιχεῖα ἐκ τῆς θεωρίας τῶν καμπύλων, κυρίως δὲ θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὰς βασιμὰς ἐφαρμογὰς τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως εἰς τὰς καμπύλας τοῦ Εὐκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 καὶ εἰς τινὰς περιπτώσεις τοῦ \mathbb{R}^2 .

§ 1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΕΙΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ \mathbb{R}^3

Εἰς τὴν παρούσαν § ὑπίνομεν σφόδρως νὰ ἀναφέρωμεν, διὰ συντόμως, τινὰ ἐκ τοῦ Διανυσματικοῦ Λογισμοῦ.

I. Ἐστώσαν τὰ διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ καὶ $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ τοῦ Εὐκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 . Ὡς γνωστόν, (βλ. Τόμος I, σελ. 109), ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ καλεῖται ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν \mathbf{a} καὶ \mathbf{b} .

Εἶναι δὲ, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Ἐπὶ πλέον δὲ ἔχομεν:

$$\text{i) } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \text{ii) } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ μίαν γεωμετρικὴν ἐρμηνείαν τοῦ ἀνωτέρω ἔσω-
τερικοῦ γινομένου. Ἐστώσαν $\mathbf{a} = \overline{AB}$, $\mathbf{b} = \overline{AF}$ (βλ. Σχ. 1). Ἐστω δὲ θ
ἡ γωνία αὐτῶν ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$). Εἰς τὸ τρίγωνον ABF ἐκ τοῦ
νόμου τοῦ συνημιτόνου ἔχομεν:

$$|\overline{BF}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AF}|^2 - 2 \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AF}| \cos \theta = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου:

$$|\overline{BF}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2)$$

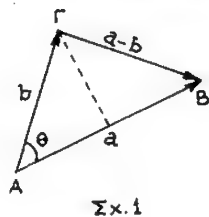
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \theta} \quad (3)$$

Ὁ τύπος (3) εἶναι ἀξιοσημείωτος.

Ἐάν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}^{(*)}$ καὶ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, ἔπεται ὅτι $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

(*) Τὸ $\mathbf{0}$ παριστᾷ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 .



Διὰ τὰ μοναδιαῖα διανύσματα i, j, k ἔχομεν προφανῶς

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, \quad i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0.$$

II. Ὁρισμός IX - 1-1. Ἐστώσαν τὰ διανύσματα $a = (a_1, a_2, a_3)$ καὶ $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Τὸ ἔξωτερικὸν γινόμενον τούτων $a \times b$ ὀρίζεται ὅτι εἶναι τὸ διάνυσμα:

$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ ἢ ὑπό μορφήν ὀρίζουσιν:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Προφανῶς $a \times a = 0$. Τὸ ἔξωτερικὸν γινόμενον εἶναι ἓνα διάνυσμα.

Τὸ ἔξωτερικὸν γινόμενον ἔχει τὰς κάτωθι ιδιότητες:

i). $a \times b = -b \times a$, ii) $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$, iii) $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$:

Ἀπόδειξις: (τῆς iii) Ἐχομεν: $|a \times b|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$
 $= (a_2^2 + a_3^2 + a_1^2) \cdot (b_2^2 + b_3^2 + b_1^2) - (a_2 b_1 + a_3 b_2 + a_1 b_3)^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$.

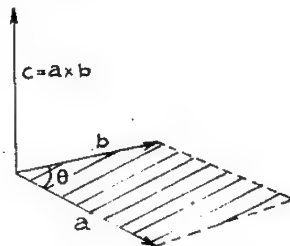
Ἡ δὲ δὴ δώσωμεν μίαν γεωμετρικὴν ἐρμηνείαν τοῦ ἔξωτερικοῦ γινομένου.

Ἐν τῇ ιδιότητι iii) λαμβάνομεν:

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta$$

Ὅθεν: $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta$ (4), ὅπου $0 \leq \theta \leq 180^\circ$.

Ἄρα ἐκ τοῦ τύπου (4) παρατηροῦμεν ὅτι: τὸ μέτρον τοῦ ἔξωτερικοῦ γινομένου παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ὀριζομένου ὑπὸ τῶν διανυσμάτων a καὶ b (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2

$$c \cdot a = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ὅθεν: $c \cdot a = 0$, δηλ. τὸ $a \times b$ εἶναι ὀρθογώνιον πρὸς τὸ a .

Όμοιως αποδεικνύεται ότι το c είναι ὀρθογώνιον πρὸς τὸ b .

Ἡ φορά τοῦ $a \times b$ λαμβάνεται εἰς τρόπον, ὥστε τὰ διανύσματα $a, b, a \times b$ νὰ σχηματίζουν ἓνα δεξιόστροφον σύστημα.

Ὅθεν: τὸ ἔξωτερικόν γινόμενον $a \times b$ εἶναι ἓνα διάνυσμα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀριζόμενον ὑπὸ τῶν a καὶ b , μὲ μέτρον διδόμενον ὑπὸ τοῦ τύπου (4) καὶ φοράν τοιαύτην ὥστε τὸ σύστημα $a, b, a \times b$ νὰ εἶναι δεξιόστροφον.

$$\text{Εἶναι δὲ: } i \times i = j \times j = k \times k = 0, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \quad i \times j = k.$$

III. Τὸ ἔσωτερικόν γινόμενον $a \cdot (b \times c)$ ἢ συντόμως $a \cdot b \times c$ ἢ (a, b, c) καλεῖται μικτόν γινόμενον.

Εὐνόμως διαπιστοῦται ὅτι τοῦτο ἔχει τὰς κατωτέρω ιδιότητες:

Ἐάν $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ καὶ $c = (c_1, c_2, c_3)$ τότε:

$$i) \quad a \cdot b \times c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

$$ii) \quad a \cdot b \times c = a \times b \cdot c$$

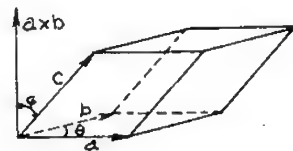
Ἡ δὲ ἂς δώσωμεν μίαν γεωμετρικὴν ἐρμηνείαν τοῦ μικτοῦ γινομένου: Ἐστώσαν τὰ διανύσματα a, b, c καὶ τὸ ἔξωτερικόν γινόμενον $a \times b$ τῶν a καὶ b (βλ. Σχ. 3). Ὡς γνωστὸν ἔχομεν: $a \times b \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cos \varphi = |a| \cdot |b| \cdot |\eta \mu \theta| \cdot |c| \cos \varphi$. Τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ παραλληλεπιπέδου πού σχηματίζουν τὰ a, b, c εἶναι $|a| \cdot |b| \cdot |\eta \mu \theta|$ καὶ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι $|c| \cos \varphi$. Ὅθεν, τὸ ἀνωτέρω μικτόν γινόμενον παριστᾷ τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου πού ἔχει ἀμφοτέρω τὰ διανύσματα a, b, c .

Εὐνόμως διαπιστοῦμεν ὅτι:

i) Ἡ ἑξάνη καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα τὰ διανύσματα a, b, c εἶναι συνεπίεδα εἶναι $(a, b, c) = 0$, δηλ τὸ μικτόν γινόμενον νὰ εἶναι μηδέν.

ii) Διὰ τὰ διανύσματα a, b, c εἴτε εἶναι συνεπίεδα εἴτε ὄχι ἔχομεν:

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(a, c, b) = -(c, b, a).$$



Σχ. 3

§ 2. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Είναι πρόσφορον νά ὀρίσωμεν καμπύλῃς τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 μέσω συναρτήσεων λαμβανούσας διανυσματικὰς τιμὰς (διανυσματικαὶ συναρτήσεις).

Ὄρισμός IX-2-1. Ἐστω ὅτι διὰ καθε $t \in [a, b]$ ἀντιστοιχεῖ τὸ διάνυσμα $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Αὐτὸ τὸ διάνυσμα καλεῖται διανυσματικὴ συνάρτησις τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς t

Τοῦ t μεταβαλλομένου εἰς τὸ διάστημα $[a, b]$, τὸ πέρας τοῦ διανύσματος $\mathbf{r}(t)$ ἔχοντος ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων διαγράφει μίαν καμπύλῃν (γ) εἰς τὸν χώρον (γραφικὴ παράστασις τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως), ἥτις καλεῖται ὁδογράφος τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\mathbf{r}(t)$ (βλ. Σχ. 1).

Ἡ σχέση $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ὅπου $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ καλεῖται παραμετρικὴ (διανυσματικὴ) ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (γ).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ μεταβλητὴ t παριστᾷ τὸν χρόνον, τότε ὁ ὁδογράφος εἶναι ἡ τροχιά τῆς κινήσεως ἑνὸς σημείου.

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σταθερὸν διάνυσμα $\mathbf{R} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$. Θὰ λέγωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ὅριον διὰ $t \rightarrow t_0$ τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\mathbf{r}(t)$, ἐὰν

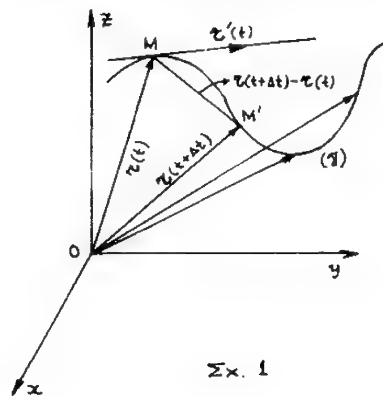
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}\| = 0 \quad (1).$$

Ἡ σχέση (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τὰς σχέσεις:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \gamma.$$

• Ἐστω ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις $\mathbf{r}(t)$ καὶ (γ) ἡ παρισταμένη ὑπὸ ταύτης καμπύλη τοῦ χώρου (βλ. Σχ. 1). Θεωροῦμεν δύο τιμὰς τῆς μεταβλητῆς t , ἔστωσαν αἱ t καὶ $t + \Delta t$ καὶ ἔστωσαν M καὶ M' τὰ ἀντίστοιχα πρὸς αὐτὰς σημεία. Σχηματίζομεν τὸν λόγον:

$$\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (2)$$



Ο λόγος (2) παριστά ένα διάνυσμα παράλληλον πρὸς τὴν χορδὴν $\overline{MM'}$. Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$, τοῦτο καλεῖται παράγωγος τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\mathbf{r}(t)$ διὰ τὴν τιμὴν t καὶ συμβολίζεται οὕτω: $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ ἢ $\mathbf{r}'(t)$.

Ἡ παράγωγος αὕτη εἶναι, προφανῶς, ἓνα διάνυσμα ἔχον τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης (γ) εἰς τὸ σημεῖον M , ὅπερ καλεῖται ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M .

Ἐὰν τὸ t παριστᾷ τὸν χρόνον, τότε ἡ $\mathbf{r}'(t)$, ἐξ ὁρισμοῦ, καλεῖται ταχύτης τοῦ κινήτου ἐπὶ τῆς τροχιάς (γ) .

Ἐὰν $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, τότε συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγώγου τῆς $\mathbf{r}(t)$, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \quad (3)$$

Τὸ διάνυσμα $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ καθορίζεται πλήρως ἐξ ὅσων ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ διὰ τὴν τιμὴν t .

$$\text{Γενικῶς δὲ θὰ ἔχωμεν: } \frac{d^n \mathbf{r}(t)}{dt^n} = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \cdot \mathbf{i} + \frac{d^n y(t)}{dt^n} \cdot \mathbf{j} + \frac{d^n z(t)}{dt^n} \cdot \mathbf{k} \quad (4)$$

ὁπλ. ἡ διαφορῆσις μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως ἀνάγεται εἰς τὴν διαφορῆσιν τῶν συντεταγμένων τῆς.

Διὰ τὴν διαφορῆσιν μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως ἰσχύουν οἱ κατωθὶ κανόνες:

$$\text{i) } \frac{d}{dt} \left\{ f(t) \cdot \mathbf{r}(t) \right\} = \frac{df(t)}{dt} \cdot \mathbf{r}(t) + f(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

$$\text{ii) } \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) \right\} = \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt} \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}_2(t)}{dt}$$

$$\text{iii) } \frac{d}{dt} \left\{ \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) \right\} = \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt} \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \frac{d\mathbf{r}_2(t)}{dt},$$

ὅπου $f(t)$ πραγματικὴ συνάρτησις καὶ $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ διανυσματικαὶ συναρτήσεις.

Τὸ μῆκος τόξου ὡς παράμετρος.

Ἐστω ἡ καμπύλη (γ) μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, t \in I.$$

θεωρούμεν τήν συνάρτησιν :

$$\ell = \ell(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (1)$$

Προφανώς εάν $t \geq t_0$, τότε $\ell \geq 0$. Εάν $t < t_0$, τότε είναι $\ell < 0$. Ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις ἰσοῦται μέ τό μήκος τοῦ τόξου τοῦ τμήματος τῆς καμπύλης μεταξύ τῶν τιμῶν t_0 καί t .

Εἶναι ἐξ ἄλλου γνωστόν ὅτι : $\frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt = \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$.

Ὅθεν :

$$\boxed{\frac{d\ell}{dt} = \left| \frac{dz(t)}{dt} \right|} \quad (2)$$

Εἰ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\ell = \ell(t)$ εἶναι μία ^{αληθ.} παρὰδευτή ἀλλοτρή τῆς παραμέτρου t ἐπὶ τοῦ I . Οὕτω, τό μήκος ℓ τοῦ τόξου μιᾶς καμπύλης δύναται νά εἰσαχθῇ ὡς μία παράμετρος τῆς διανυσματικῆς ἐξίσωσως τῆς καμπύλης.

Ἀπό τόν τύπον (1) καθίσταται φανερόν ὅτι, ἡ ὀριζομένη συνάρτησις $\ell = \ell(t)$ ἐξαρτᾶται καί ἀπό τό ἀρχιόν σημεῖον t_0 . Ἐπομένως μία παράστασις τῆς καμπύλης μέ παράμετρον τό μήκος τοῦ τόξου αὐτῆς δέν εἶναι μοναδιῇ, ἀλλά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀρχήν πού δά μετράται τό μήκος τοῦ τόξου τῆς καμπύλης καθώς καί ἀπό τόν προσανατολισμόν αὐτῆς, καθότι δύναμεθα νά ῥάβωμεν :

$$\ell = \ell(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt = - \int_t^{t_0} \left| \frac{dz(t)}{dt} \right| dt$$

Τέλος εάν $z = z(\ell)$, $\ell \in I_\ell$ εἶναι ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ὡς πρὸς μίαν παράμετρον ℓ , αὕτη δά καλεῖται φυσικὴ παράστασις τῆς καμπύλης, εάν $\left| \frac{dz(\ell)}{d\ell} \right| = 1$, τό δέ ℓ καλεῖται φυσικὴ παράμετρος τῆς καμπύλης.

Παραθέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τό κατωθί :

Θεώρημα IX - 2-1. Εάν $z = z(\ell)$ εἶναι μία φυσικὴ παράστασις τῆς καμπύλης τότε :

i) Τό $|\ell_1 - \ell_2|$ εἶναι τό μήκος τοῦ τόξου αὐτῆς μεταξύ τῶν σημείων $z(\ell_1)$ καί $z(\ell_2)$

ii) 'Εάν $z = z^*(\ell^*)$ είναι μια άλλη φυσική παράσταση της υαμπύλης, τότε $\ell = \pm \ell^* + c$, c σταθερά.

iii) 'Εάν $z = z^*(t)$ είναι μια άλλη παράσταση της υαμπύλης με τόν αυτόν προσανατολισμόν με την $z = z(\ell)$, τότε $\frac{dz}{dt} = \left| \frac{dz}{dt} \right|$, εάν δέ είναι ο αντίθετος προσανατολισμός, τότε $\frac{dz}{dt} = - \left| \frac{dz}{dt} \right|$.

'Ας σημειωθῇ ὅτι, εάν ἡ $\ell = \ell(t)$ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1), τότε ἡ $z = z(t(\ell))$ εἶναι μία φυσική παράσταση τῆς υαμπύλης.

Πράγματι: $\left| \frac{dz}{d\ell} \right| = \left| \frac{dz}{dt} \right| : \left| \frac{d\ell}{dt} \right| = \left| \frac{dz}{dt} \right| : \left| \frac{d\ell}{dt} \right| = 1.$

Παράδειγμα: Νά εισαχθῇ τὸ μήκος τοῦ τόξου ὡς παράμετρος τῆς ἐξίσωσης τῆς υαμπύλης: $z = (e^t \sin t) \cdot i + (e^t \cos t) \cdot j + e^t \cdot k, -\infty < t < +\infty.$

Λύσις: Ἐχομεν: $\ell = \int_0^t \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \int_0^t [e^{2t}(-2 \sin t \cos t + 1) + e^{2t}(2 \sin t \cos t + 1) + e^{2t}]^{1/2} dt = \sqrt{3} \int_0^t e^t dt = \sqrt{3}(e^t - 1).$

Ἐπιλύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς t εὐρίσκουμεν: $t = \log(\ell/\sqrt{3} + 1), -\sqrt{3} < \ell < +\infty.$

'Ἀρα ἡ φυσική παράσταση τῆς υαμπύλης εἶναι $z = (\ell/\sqrt{3} + 1) [\sin \log(\ell/\sqrt{3} + 1) i + \cos \log(\ell/\sqrt{3} + 1) j + k]$

'Εάν λοιπὸν λάβωμεν ὡς παράμετρον τῆς ἐξίσωσης μιᾶς υαμπύλης τὸ μήκος τοῦ τόξου αὐτῆς, ἥτοι $z = z(\ell)$, τότε σύμφωνα πρὸς τ' ἀνωτέρω $\left| \frac{dz}{d\ell} \right| = 1$. Θὰ συμβολίσωμεν δὲ με τὸ $\tau = \frac{dz}{d\ell}$ καὶ θὰ εἶναι $|\tau| = 1$, ἥτοι τὸ ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα τ τῆς υαμπύλης ἔχει μοναδιαῖον μήκος.

Εἰς τὸ ἐξῆς ὅταν λαμβάνωμεν τὰς παραγώρους τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως ὡς πρὸς τὸ τόξον ℓ αὐτῆς, θὰ τὰς συμβολίσωμεν συντόμως οὕτω: $\dot{z}, \ddot{z}, \ddot{\ddot{z}}$, κ.τ.λ. πρῶτη, δευτέρα, τρίτη, κ.τ.λ. παράγωγος. Ἐνῶ ἐὰν λαμβάνωμεν τὰς παραγώρους ὡς πρὸς μίαν ἄλλην μεταβλητὴν t , θὰ τὰς συμβολίσωμεν συντόμως οὕτω: $z'(t), z''(t), z'''(t)$ κ.τ.λ.

Πρόταση IX-2-2. Ἐάν ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις $z = z(t)$ ἔχῃ σταθερὸν μέτρον, τότε τὸ ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα $\frac{dz(t)}{dt}$ εἶναι κἀκετον εἰς τὴν διανυσματικὴν αὐτὴν $z = z(t)$.

Ἀπόδειξις: Ἐχομεν $|z(t)| = c$ ἢ $z(t) \cdot z(t) = c^2(1)$. Διὰ παραγώσεως τῆς (1) ὡς πρὸς t λαμβάνομεν:

$$z \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot z = 0 \quad \text{ἢ} \quad z \cdot \frac{dz}{dt} = 0. \quad \text{Ὅθεν, ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις } z(t) \text{ εἶναι κἀκετος}$$

πρὸς τὴν $\frac{dz(t)}{dt}$, δηλ. τὸ ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα $\frac{dz(t)}{dt}$.

Όλοκληρώμα μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως:

Ἐστω ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Ἐυτελοῦμεν εἰς τὸ διάστημα $a \leq t \leq b$ μίαν διαμέρισιν Φ καὶ ἐν συνεχείᾳ σχηματίζομεν τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα:

$$\sum_{p=1}^n \mathbf{r}(\tau_p) \cdot (\tau_p - \tau_{p-1}) \quad (1)$$

ὅπου $a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = b$ καὶ $\tau_{p-1} < \tau_p < \tau_{p+1}$. Ἐὰν τὸ $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \tau_p \rightarrow 0$, τοῦ πηλοῦ ($\Delta \tau_p = \tau_p - \tau_{p-1}$) καὶ ἐὰν τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα (1) τείνῃ πρὸς ἓνα πεπερασμένον ὄριον (διάνυσμα) τοῦτο (τὸ ὄριον) ἔξ ὁρίσμου καλεῖται ὁλοκληρώμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ἐπὶ τοῦ $[a, b]$ καὶ συμβολίζεται οὕτω: $\int_a^b \mathbf{r}(t) dt$ ὥστε ἔξ ὁρίσμου:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt \equiv \lim_{\substack{\max \Delta \tau_p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} \sum_{p=1}^n \mathbf{r}(\tau_p) \Delta \tau_p \quad (2)$$

Ἐὰν, $\mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k}$, τότε λόγω τῆς (2) ἔχομεν:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b z(t) dt \right) \mathbf{k} \quad (3)$$

Αἱ συνήθεις ιδιότητες τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἰσχύουν καὶ ἐδῶ π.χ

$$\int_a^b u'(t) \cdot \mathbf{r}(t) dt = [u(t) \cdot \mathbf{r}(t)]_a^b - \int_a^b u(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \text{ κ.τ.λ.}$$

§ 3. ΤΡΙΕΔΡΟΝ ΚΑΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ FRENET

Θεωροῦμεν τὴν καμπύλην (γ) μὲ εἰσώσιν, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (1) ὅπου ℓ τόμῃος τοῦ τόξου αὐτῆς. Εἰς τὰδε σημεῖον M αὐτῆς (ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν τιμὴν τοῦ ℓ) τὸ μοναδιαῖον ἑφαπτομενικὸν διάνυσμα:

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}(\ell) \quad (2)$$

προσδιορίζει τὴν διεύθυνσιν τῆς ἑφαπτομένης ἐπὶ τῆς καμπύλης. Τὸ διάνυσμα $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}}$, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν IX-2-2, εἶναι ὑάθετον πρὸς τὸ \mathbf{t} . Συνεπῶς τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα \mathbf{v} ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ $\dot{\mathbf{t}}$ θὰ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{|\dot{\mathbf{t}}|} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} \quad (3)$$

Προφανῶς τὸ \mathbf{v} εἶναι ὑάθετον πρὸς τὸ \mathbf{t} .

Ἐπὶ πλέον θεωροῦμεν καὶ τὸ διάνυσμα:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{v} \quad (4)$$

Τά διανύσματα τ , ν και θ σχηματίζουν ένα τριέδρον με ανά δύο μοναδιαία διανύσματα, το όποιον καλείται *συννοθεύον τριέδρον* του Frenet (βλ. Σχ.1).

Εμ του τύπου (4) έπεται ότι :

$$\nu \times \theta = \tau \quad \text{και} \quad \theta \times \tau = \nu \quad (5)$$

Τά διανύσματα τ , ν και θ καλούνται *πρωτεύοντα διανύσματα* και προσδιορίζουν αντίστοιχως τας διευθύνσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείον

M της καμπύλης και αι όποιαι καλούνται *έφαπτομένη, πρώτη καθέτος* και *δευτέρα καθέτος* της καμπύλης.

Τό επίπεδον της έφαπτομένης και της $\alpha^{\alpha\alpha}$ καθέτου καλείται *έγγυτάτον επίπεδον* της γραμμής, τό επίπεδον της $\alpha^{\alpha\alpha}$ και της $\theta^{\alpha\alpha}$ καθέτου καλείται *καθέτου επίπεδον* και τό επίπεδον της $\theta^{\alpha\alpha}$ καθέτου και της έφαπτομένης καλείται *εὐθειοποιούν επίπεδον*.

Ὡς γνωστόν, ή διανυσματική έξίσωσις μιᾶς ευθείας διερχομένης διά του σημείου M αντιστοιχούντος εις την διανυσματικήν αὐτίνα τ_0 και παραλλήλου πρὸς τό διάνυσμα a είναι :

$$u = \tau_0 + \lambda \cdot a, \quad -\infty < \lambda < +\infty \quad (i)$$

Ἐς εὖρωμεν ἥδη τὰς διανυσματικάς έξισώσεις της έφαπτομένης, $\alpha^{\alpha\alpha}$ καθέτου και $\theta^{\alpha\alpha}$ καθέτου της καμπύλης $\tau = \tau(\ell)$.

Αἱ έξισώσεις, προφανῶς, είναι αἱ κάτωθι :

$$a). \quad u = \tau_0 + \lambda \cdot \tau_0 \quad (\text{έφαπτομένης}) \quad (ii)$$

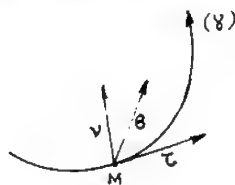
$$b). \quad u = \tau_0 + \lambda \cdot \tau_0' \quad (\alpha^{\alpha\alpha} \text{ καθέτου}) \quad (iii)$$

$$\gamma). \quad u = \tau_0 + \lambda \cdot \tau_0 \times \tau_0' \quad (\theta^{\alpha\alpha} \text{ καθέτου}) \quad (iv)$$

Ὡσαύτως είναι γνωστόν έμ του Διανυσματισμοῦ λογισμοῦ, ότι ή έξίσωσις ενός επίπεδου διερχομένου διά του σημείου τ_0 και καθέτου πρὸς τό διάνυσμα a είναι :

$$(u - \tau_0) \cdot a = 0 \quad (v)$$

Ἐς εὖρωμεν ἥδη τὰς έξισώσεις του έγγυτάτου επίπεδου, του καθέτου επίπεδου και του εὐθειοποιούντος επίπεδου της καμπύλης $\tau = \tau(\ell)$.



Σχ. 1

Αι εξισώσεις, προφανώς, είναι αι υάτωδι:

$$\begin{array}{lll} \delta) & (\mathbf{u} - \mathbf{z}_0) \cdot \dot{\mathbf{z}}_0 = 0 & (\text{υάθετον επίπεδον}) \quad (\text{vi}) \\ \epsilon) & (\mathbf{u} - \mathbf{z}_0) \cdot \ddot{\mathbf{z}}_0 = 0 & (\text{ευθείοποιούν επίπεδον}) \quad (\text{vii}) \\ \sigma\tau) & (\mathbf{u} - \mathbf{z}_0) \cdot \dot{\mathbf{z}}_0 \times \ddot{\mathbf{z}}_0 = 0 & (\text{εργνύτατον επίπεδον}) \quad (\text{viii}) \end{array} \quad 1)$$

Ἐάν π.χ. $\mathbf{u} = (X, Y, Z)$, ὡς πρὸς ἓνα ὀρθογώνιον σύστημα συντεταγμένων καὶ $\mathbf{z}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, τότε ἡ ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις τοῦ ἐργνυτάτου ἐπιπέδου, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (viii), θά εἶναι:

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0$$

• Ἡ κίνησις τοῦ συνοδεύοντος τριέδρου ἐπὶ τῆς καμπύλης εἰδικευέται εἰς τὸ νὰ μελετήσωμεν τὴν ταχύτητα μεταβολῆς τῶν διανυσμάτων τ, ν καὶ θ , ὅπλ. εἰς τὸ νὰ μελετήσωμεν τὰς παραγώγους τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων ὡς πρὸς τὸ τόξον s . Ἐπειδὴ τὸ ν εἶναι μοναδιαῖον ἐπὶ τοῦ $\dot{\tau}$ θά ἔχωμεν:

$$\nu = \frac{\dot{\tau}}{|\dot{\tau}|} = \frac{\ddot{\tau}}{|\ddot{\tau}|}$$

Θέτοντες δέ, $|\ddot{\tau}| = |\dot{\tau}| = k$, ὅπου k μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, θά ἔχωμεν:

$$\boxed{\ddot{\tau} = k \cdot \nu} \quad (6)$$

Ὁ ἀριθμὸς k καλεῖται καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον M . Ὁ δὲ ἀριθμὸς $R = \frac{1}{k}$ καλεῖται αὐτὴς καμπυλότητος τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M . Ἐξ ἄλλου $\theta = \tau \times \nu$ καὶ $\dot{\theta} = \dot{\tau} \times \nu + \tau \times \dot{\nu} = k \nu \times \nu + \tau \times \dot{\nu} = 0 + \tau \times \dot{\nu} = \tau \times \dot{\nu}$.

Ὅθεν, τὸ $\dot{\theta}$ εἶναι υάθετον πρὸς τὸ τ . Ἐξ ἄλλου τὸ $\dot{\theta}$ εἶναι υάθετον πρὸς τὸ θ (υὰδ ὅσον τὸ θ εἶναι μοναδιαῖον). Εἶναι ὁμως τὸ ν υάθετον πρὸς τὸ θ καὶ τ . Ἀρα τὰ διανύσματα $\dot{\theta}$ καὶ ν εἶναι συγγραμμικά καὶ κατὰ συνέπειαν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$\boxed{\dot{\theta} = -\epsilon \cdot \nu} \quad (7)$$

ὅπου ϵ πραγματικὸς ἀριθμὸς.

Ὁ ἀριθμὸς ϵ καλεῖται στρέψις τῆς καμπύλης εἰς τὸ M , ὁ δὲ ἀριθμὸς $\frac{1}{\epsilon} = \rho$

1) Αἱ ἐξισώσεις 1) ἕως viii δὲν ἀλλάσσουν μορφήν εἴτε ἡ καμπύλη ἀναφέρεται εἰς τὴν φυσικὴν τῆς παράμετρον εἴτε εἰς τυχαῖα παράμετρον.

υαθίζεται αυτής στρέψεως της υαμπύλης εις τό Μ.

Τέλος ὡς παραρωρίσωμεν τό διάνυσμα $\nu = \theta \times \tau$.

Ἐχομεν. $\dot{\nu} = \dot{\theta} \times \tau + \theta \times \dot{\tau} = -\theta \cdot \nu \times \tau + \theta \times k\nu = 6\theta - k\tau$.

Ὅθεν:

$$\dot{\nu} = -k\tau + 6\theta \quad (8)$$

Οἱ τύποι (6), (7) καί (8) υαλοῦνται τύποι τοῦ Frenet.

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι, ἔάν ἡ υαμπύλη ἔχη τήν διανυσματιυτὴν εἰσώσων $\tau = \tau(t)$ ἔνθα t τυχοῦσα παράμετρος καί ἡ υαμπύλη ἔχη τόν αὐτόν προσανατολισμόν μέ τήν $\tau = \tau(\ell)$, τότε τά πρωτεύοντα διανύσματα τ, ν, θ παρέχονται ὑπό τῶν τύπων :

$$\tau = \frac{\tau'}{|\tau'|}, \nu = \frac{(\tau' \times \tau'') \times \tau'}{|\tau' \times \tau''| \cdot |\tau'|}, \theta = \frac{\tau' \times \tau''}{|\tau' \times \tau''|} \quad (9)$$

Πράγματι, $\tau' = \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\ell} \cdot \frac{d\ell}{dt} = \dot{\tau} \cdot \frac{d\ell}{dt} = \tau \cdot |\tau'|$,

διότι $|\tau'| = \frac{d\ell}{dt}$. Ὅθεν, $\tau = \frac{\tau'}{|\tau'|}$.

ἘΕ ἄλλωv $\tau'' = \frac{d\tau'}{dt} = \frac{d(\dot{\tau} \frac{d\ell}{dt})}{dt} = \frac{d\dot{\tau}}{dt} \cdot \frac{d\ell}{dt} + \dot{\tau} \frac{d^2\ell}{dt^2} = \ddot{\tau} \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 + \dot{\tau} \frac{d^2\ell}{dt^2}$

Ὅθεν, $\tau'' = \ddot{\tau} \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 + \dot{\tau} \frac{d^2\ell}{dt^2}$. Εἶναι δέ καί $\tau' = \dot{\tau} \frac{d\ell}{dt}$ καί διά πολ-

λαπλάσιασμοῦ ἔκωτεριωῶς τῶν δύο τελευταίων σχέσεων λαμβάνομεν:

$\tau' \times \tau'' = (\dot{\tau} \times \ddot{\tau}) \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^3$. Ἐπειδὴ $\frac{d\ell}{dt} > 0$, τά διανύσματα $\tau' \times \tau''$ καί $\dot{\tau} \times \ddot{\tau} = k \cdot \theta$

εἶναι ὁμόρροπα. Ὅθεν, δυνάμεθα νά θέσωμεν: $\theta = \frac{\tau' \times \tau''}{|\tau' \times \tau''|}$.

Τέλος τό $\nu = \theta \times \tau = \frac{(\tau' \times \tau'') \times \tau'}{|\tau' \times \tau''| \cdot |\tau'|}$.

Πρότασις IX-3-1. Ἐάν $\Delta\theta$ εἶναι ἡ γωνία μεταξὺ τῶν διευθύνσεων τῶν ἐφαπτομενιῶν διανυσμάτων $\dot{\tau}(\ell)$ καί $\dot{\tau}(\ell + \Delta\ell)$, τότε δείξατε ὅτι $k = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τό τ εἶναι μοναδιαῖον διάνυσμα τό μέτρον $|\tau(\ell + \Delta\ell) - \tau(\ell)|$

είναι η θάσις του ισοσκελούς τριγώνου, βλ. Σχ. 1 (β), του οποίου τα μέτρα των

ισών πλευρών είναι ίσα προς την μονάδα.

$$\text{Θά' έχωμεν λοιπόν: } |\tau(\ell + \Delta\ell) - \tau(\ell)| = 2\eta\mu\frac{\Delta\theta}{2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\Delta\theta}{2} - \frac{2}{3!} \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^3 \text{ συν}\xi = \Delta\theta - \frac{1}{12} (\Delta\theta)^3 \text{ συν}\xi (1),$$

όπου $0 \leq \xi \leq \frac{\Delta\theta}{2}$. Συμφώνως προς τον

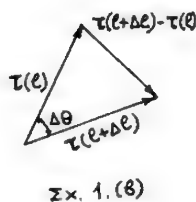
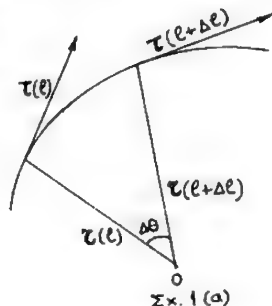
όρισμόν της αμπτυλότητος και λόγω

της (1), θά' έχωμεν:

$$K = |\dot{\tau}| = \left| \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\tau(\ell + \Delta\ell) - \tau(\ell)}{\Delta\ell} \right| = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell} - \frac{1}{24} \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{(\Delta\theta)^3}{\Delta\ell} \text{ συν}\xi \right] (2) \text{ και έπειδή του}$$

$$\Delta\ell \rightarrow 0 \text{ θά τεινῇ και τό } \Delta\theta(\ell) \rightarrow 0, \text{ συνεπώς } \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{(\Delta\theta)^3}{\Delta\ell} \text{ συν}\xi \right] = 0.$$

$$\text{"Οθεν, λόγω της (2), } K = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}.$$



Έφαρμογή εις την Μηχανικήν.

Έστω $\tau = \tau(t)$ είναι η διανυσματική εξίσωσις της τροχιάς ενός ύλγιου σημείου, όπου t παριστά τον χρόνον. Ως γνωστόν η ταχύτης της κινήσεως αυτού δίδεται υπό του τύπου:

$$V(t) = \frac{d\tau(t)}{dt} \quad (1)$$

Ο τύπος (1) γράφεται:

$$V(t) = \frac{d\tau}{d\ell} \cdot \frac{d\ell}{dt} = \tau \cdot \frac{d\ell}{dt} \quad (2)$$

Έπειδή τό τ είναι μοναδιαϊόν διάνυσμα επί της αψ υαθέτου θά είναι $|\tau| = 1$ και έυ του (2) λαμβάνομεν:

$$|V(t)| = \frac{d\ell}{dt} \quad (3)$$

Έξ άλλου η επιτάχυνσις του ύλγιου σημείου παρέχεται υπό του τύπου:

$$W = \frac{d^2\tau}{dt^2} \quad (4)$$

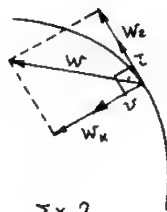
Η (4) γράφεται:

$$W = \frac{d^2\tau}{d\ell^2} \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 + \tau \cdot \frac{d^2\ell}{dt^2} \quad (5)$$

Ἐφαρμόζοντας τὸν τύπον (6) τοῦ Frenet ὁ (5) γράφεται:

$$W = \tau \frac{d^2 \ell}{dt^2} + \nu \cdot k \cdot \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

Ὅτῳ ἡ ἐπιτάχυνσις ἀνεῴχθῃ εἰς ἓνα ἄθροισμα τῶν $\tau \cdot \frac{d^2 \ell}{dt^2}$ καὶ $\nu \cdot k \cdot \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2$ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς αἰ. κ. καθέτου (βλ. Σκ. 2) καὶ αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ἀντιστοιχῶς ἐφαπτομενίῳ ἐπιτάχυνσις καὶ κεντρομόδος ἐπιτάχυνσις. Ἦτοί:



$$W = W_\tau + W_\kappa \quad (7)$$

Εἶναι δέ,

$$W_\tau = \tau \frac{d^2 \ell}{dt^2} = \tau \frac{dv}{dt} \quad \text{καὶ} \quad |W_\tau| = \frac{dv}{dt}$$

ὁμοίως:

$$W_\kappa = \nu \cdot k \cdot \left(\frac{d\ell}{dt} \right)^2 = \nu \cdot k \cdot v^2$$

Ὅθεν ὁ (7) γράφεται:

$$W = \tau \cdot \frac{dv}{dt} + \nu \cdot k \cdot v^2 \quad (8)$$

Εἰδιωῶς, ἐὰν $v = v_0$ (σταθερόν) καὶ ἡ καμπύλη εἶναι περιφέρεια κυλίνδρου, ὅτε $k = \frac{1}{R}$, τότε ἐκ τοῦ (8) λαμβάνομεν:

$$|W| = \frac{v_0^2}{R}$$

Θεώρημα IX-3-1. Ἐὰν κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης $\tau = \tau(\ell)$ ἡ καμπυλότης αὐτῆς εἶναι ἐκ ταυτότητας ἴση πρὸς τὸ μηδέν, δηλ. $k \equiv 0$, τότε ἡ καμπύλη εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον $k \equiv 0$ ἔπεται ἐκ τοῦ τύπου (6) τοῦ Frenet ὅτι $\tau = \theta \in \mathbb{R}$ ἢς $\tau = a \neq \theta$. Εἶναι ὁμῶς $\tau = \dot{\ell}(\ell)$, συνεπῶς $\dot{\ell}(\ell) = a$.

Δι' ὁδοιμηρώσεως τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ὡς πρὸς ℓ λαμβάνομεν $\ell = a \cdot t + b$, ἔνθα $b = \text{σταθερά}$. Ἡ τελευταία διανυσματικὴ ἐξίσωσις προφανῶς παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην ἀπὸ τοῦ σημείου $b = (b_1, b_2, b_3)$ καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ διάνυσμα $a = (a_1, a_2, a_3)$.

Ἀντιστρόφως: Ἐστω ἡ εὐθεῖα γραμμὴ $\ell = at + b$, $a \neq \theta$.

Εἶναι $\tau = \dot{\ell}(\ell) = \frac{d\ell}{dt} \cdot \frac{dt}{d\ell} = a \cdot \frac{dt}{d\ell}$. Εἶναι δέ,

$$1 = |\tau| = |a| \cdot \left| \frac{dt}{d\ell} \right|, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \frac{dt}{d\ell} = \frac{\pm 1}{|a|} = \lambda \quad (\text{σταθερὸν})$$

Όθεν, $\tau = \lambda \cdot a$ και $k = |\dot{\tau}| = \left| \frac{d}{d\ell} (\lambda \cdot a) \right| = 0$

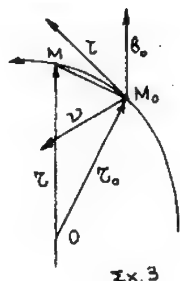
Θεώρημα IX-3-2. Εάν κατά μήκος της καμπύλης $\tau = \tau(\ell)$ η στρέψις αυτής είναι εν ταυτότητος μηδέν, δηλ. $\sigma = 0$, τότε η καμπύλη είναι επίπεδος και αντίστροφα

Απόδειξεις: Έχομεν $\sigma = 0$, τότε εν τού τύπου (7) του Frenet λαμβάνομεν $\dot{\theta} = 0$ έε της $\theta = \theta_0$ (σταθερόν).

Έε άλλου $\frac{d}{d\ell} (\tau \cdot \theta_0) = \frac{d\tau}{d\ell} \cdot \theta_0 = \tau \cdot \theta_0 = 0$, διότι $\tau \perp \theta_0$.

Όθεν, $\tau \cdot \theta_0 = c$ (σταθερόν).

Έστω ότι εις τὰ σημεία M_0 και M της καμπύλης αντιστοιχούν αι διανυσματικάι αυτίνες τ_0, τ (βλ. Σχ.3). Άς σχηματίσωμεν τό έσωτερικόν γινόμενον:



$\overline{M_0 M} \cdot \theta_0 = (\tau - \tau_0) \cdot \theta_0 = \tau \cdot \theta_0 - \tau_0 \cdot \theta_0 = c - c = 0$. Όθεν $\overline{M_0 M} \perp \theta_0$ (θ_0 : σταθερόν).

Άρα τὰ M δηλ. τὰ σημεία της καμπύλης υείνται επί ενός επιπέδου.

Τό αντίστροφον αποδεικνύεται εύκολως.

Παρατήρησις: Εάν η καμπύλη είναι επίπεδος, τότε αυτή υείται όλούληρος επί του έγγυτάτου επιπέδου ταύτης τό όποϊον παραμένει άμετάβλητον.

Παραδέτομεν άνευ αποδείξεως τό κατωθι θεμελειώδες θεώρημα της διαφορικής Γεωμετρίας

Θεώρημα IX-3-3. Έστωσαν $k(\ell)$ και $\sigma(\ell)$ δύο αυθαίρετοι συναρτήσεις ώρισμένα επί του διαστήματος $a \leq \ell \leq b$. Τότε υπάρχει εις τόν χώρο \mathbb{R}^3 μία, και μόνον μία, καμπύλη (γ) διά την όποιαν η $k(\ell)$ είναι η καμπυλότης και η $\sigma(\ell)$ είναι η στρέψις και ℓ είναι μία φυσική παράμετρος κατά μήκος της (γ).

Παρατήρησις: Ο προσδιορισμός της άνωτέρω καμπύλης είναι έν πρόβλημα, τό όποϊον παρουσιάζει άρμετάς δυσκολίας. Πάντως τούτο απλοποιείται σημαντιιά εις την περίπτωση όπου $\sigma = 0$, δηλ. όταν έχωμεν επίπεδον καμπύλην.

Πρόβλημα: Νά εύρεθι η καμπύλη του χώρου της όποιας η καμπυλότης είναι $k(\ell)$

υαί ή στρέψις $\sigma(\ell) \equiv 0$.

Λύσις: Έστω ϕ παριστά την γωνία του τ μετά του άξονος των x (βλ. ζκ. 4).

θα έχωμεν: $\tau = (\sin \phi) \cdot i + (\eta \mu \phi) \cdot j$ (1)

Έπίσης επειδή τό ν είναι όρθογώνιον πρós τό τ

θα έχωμεν:

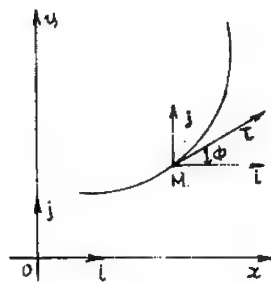
$$\nu = (\sin(\phi + \pi/2)) \cdot i + (\eta \mu(\phi + \pi/2)) \cdot j \quad \eta'$$

$$\nu = (-\eta \mu \phi) \cdot i + (\sin \phi) \cdot j \quad (2)$$

Διαφορίζοντες τας (1) υαί (2) λαμβάνομεν:

$$\dot{\tau} = \dot{\phi} [(-\eta \mu \phi) \cdot i + (\sin \phi) \cdot j] = \dot{\phi} \cdot \nu \quad (3)$$

$$\dot{\nu} = -\dot{\phi} [\sin \phi) \cdot i + (\eta \mu \phi) \cdot j] = -\dot{\phi} \tau \quad (4)$$



ζκ. 4

Οι τύποι (6) υαί (8) του Frenet διά $\sigma=0$ γίνονται:

$$\dot{\tau} = k \cdot \nu, \quad \dot{\nu} = -k \tau \quad (5)$$

Λόγω των (5) έυ των (3) ή (4) λαμβάνομεν:

$$\dot{\phi} = k, \quad \text{έξ ης } \phi(\ell) = \int k(\ell) d\ell + C_1 \quad (6)$$

Προσδιορισθείσης της ϕ έυ της (6), θα έχωμεν λόγω της (1):

$$\tau(\ell) = \int \tau(\ell) d\ell + C_2 = \int [(\sin \phi(\ell)) \cdot i + (\eta \mu \phi(\ell)) \cdot j] d\ell + C_2 \quad (7)$$

$$\eta' \quad \tau = \tau(\ell) = \left(\int \sin \phi(\ell) d\ell \right) i + \left(\int \eta \mu \phi(\ell) d\ell \right) j + C_2$$

Ούτω εύρεθη ή διαν. έξίσωσις της καμπύλης.

Συμφώνως πρós τό θεώρημα IX-3-3 όταν δοδούν αι έυφράσεις $k=k(\ell)$ υαί $\sigma=\sigma(\ell)$ πύται άνεξαρτήτως συστήματος συντεταγμένων όρίσουν μίαν καμπύλην ές τόν χώρον. Αι άνωτέρω έξισώσεις υαλούνται φυσικαί ή συμφυείς έξισώσεις της καμπύλης, τά δέ μερέθη k, σ, ℓ υαλούνται φυσικαί συντεταγμένοι της καμπύλης. Αποδεικνύεται ότι, δύο καμπύλαι έχουσαι τας αύτάς φυσικάς έξισώσεις είναι αι αύται, διαφέρουν μόνον υατά την θέσιν των είς τόν χώρον.

Έάν απαλείψωμεν την ℓ μεταξύ των άνωτέρω έξισώσεων υαταλήγομεν είς μίαν έξίσωσιν της μορφής:

$$\Phi(k, \sigma) = 0$$

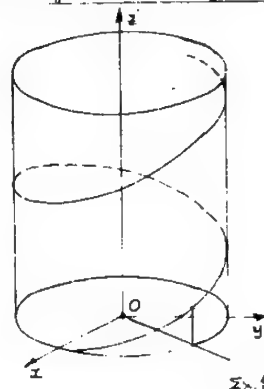
ήτις υαλείται χαρακτηριστική έξίσωσις της καμπύλης, διότι χαρακτηρίζει από

τινος απόψεως τήν ὑπ' ὅψιν αμψύλην (γ) ἢ ἀντιθέστερον μίαν κατηγορίαν αμψύλων περιλαμβανούσα καὶ τήν (γ).

Βάσει τῆς μορφῆς τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως ταξινομοῦμεν τὰς αμψύλας εἰς διαφόρους κατηγορίας, ὅπως π.χ. μία ἀπλουστάτη μορφή τῆς χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ $\lambda \cdot k + \mu \cdot \sigma = 0$, ἔνθα λ, μ σταθεραί. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $\lambda \cdot k + \mu \cdot \sigma = 0$ ὁρίζει μίαν κατηγορίαν αμψύλων τῶν στερεῶν ἐλίων, ἥτοι: τῶν αμψύλων αἵτινες τέμνουσιν ὑπὸ σταθεράν γωνίαν τὰς γενεαίρας κυλινδρικοῦς ἐπιφανείας τοῦ αὐτοῦ βάσεως.

Μία δὲ ἀπλουστάτη μορφή τῶν στερεῶν ἐλίων εἶναι ἡ κυλινδρική στερεὰ ἐλὶξ (βλ. Σχ 1), τῆς ὁποίας ἡ ὁδὸς τῆς κυλινδρικοῦς ἐπιφανείας εἶναι περιφέρεια κύβου. Αὕτη ἔχει τὰς κάτωθι παραμετρικάς ἐξισώσεις:

$$x = a \cos \nu t, y = a \sin \nu t, z = \beta t, a > 0, \beta \neq 0.$$



§ 4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΡΕΦΕΩΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἐστω ἡ αμψύλη με διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $\tau = \tau(\ell)$. ἔχομεν ἐξ ὁρίσμου $k = |\ddot{\tau}|$. Συνεπῶς διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς αμψυλότητος k μίας αμψύλης ἐχούσης ἐξίσωσιν $\tau = \tau(\ell)$ ἀρμεῖ νὰ εὑρωμεν τὴν $\ddot{\tau}(\ell)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ εὑρωμεν τὸ (ἀπόλυτον) μέτρον τῆς ἀνωτέρω διανυσματικῆς συναρτήσεως.

Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῆς στρέψεως λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις: $\dot{\tau} = \dot{\tau}$ καὶ $\ddot{\tau} = k\nu$.

Διὰ παραγώρισεν τῆς δευτέρας ὡς πρὸς ℓ λαμβάνομεν:

$$\ddot{\tau} = k \cdot \nu + k \cdot \dot{\nu} \quad (1)$$

Λόγῳ τῆς σχέσεως (8), §3 ἡ (1) γράφεται:

$$\ddot{\tau} = k \cdot \nu - k^2 \tau + k \cdot \sigma \cdot \theta \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (2) ἐξωτερικῶς ἐπὶ $\frac{\dot{\tau}}{|\dot{\tau}|} = \nu$ λαμβάνομεν:

$$\frac{\ddot{\tau} \times \dot{\tau}}{|\dot{\tau}|} = -k^2 \theta - k \cdot \tau \cdot \tau \quad (3)$$

Εν συνεχεία πολλαπλασιάζουμε την (3) εξωτερικώς επί $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'$, ότε λαμβάνομεν:

$$\frac{(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}|} = k \cdot \sigma \quad \ddot{n}$$

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = k^2 \cdot \sigma \quad \ddot{n}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}|^2}} \quad (4)$$

Ο τύπος (4) παρέχει την στρέψιν της αμπύλης εις τό σημείον Μ.

Ἡδὴ γεννᾶται τὸ ἐρώτημα νὰ εὕρωμεν τὴν αμπυλότητα k καὶ τὴν στρέψιν σ μιᾶς αμπύλης, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ παραμετρικὴν μορφήν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Πρὸς τοῦτοις ἔχομεν:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\ell} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\ell}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{d\ell^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{d\ell}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{d\ell^2} \\ \text{καὶ} \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{d\ell^3} &= \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \cdot \left(\frac{dt}{d\ell}\right)^3 + 3 \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{dt}{d\ell} \cdot \frac{d^2t}{d\ell^2} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^3t}{d\ell^3} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ἐπειδὴ $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\ell}$, ἔπεται ὅτι:

$$\frac{dt}{d\ell} = \frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad (6) \quad \text{ὑποθέτομεν ὅτι } \frac{dt}{d\ell} > 0.$$

Ὅθεν,

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\ell} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

Ἀναλόγως σχηματίζομεν τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον τῶν δύο πρώτων ἐκ τῶν ἐισωσέων (5), ὅτε λαμβάνομεν:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\ell} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\ell^2} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) \left(\frac{dt}{d\ell} \right)^3, \quad \text{ἢ ἔπειδὴ } \frac{d\mathbf{r}}{d\ell} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\ell^2} = k \cdot \mathbf{B} \quad \text{θα ἔχωμεν:}$$

$$k \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \left(\frac{dt}{d\ell} \right)^3 \quad (7)$$

Ἐπειδὴ $|\mathbf{B}| = 1$ καὶ λόγω τῆς (6) λαμβάνομεν τελικῶς ἐκ τῆς (7)

$$\boxed{k = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}} \quad (8)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ἐμφράσεις (5) εἰς τὴν σχέσιν (4) μετὰ τὰς πράξεις εὐρίσκομεν:

$$(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)) \left(\frac{dt}{d\ell} \right)^6 = k^2 \cdot \sigma \quad (9)$$

Ἡ (9) ἰσχύει τῆς (8) δίδει τελικῶς:

$$\sigma = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2} \quad (10)$$

• Ἐάν ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶναι:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \cdot \mathbf{i} + y(t) \cdot \mathbf{j} + z(t) \cdot \mathbf{k}$$

τότε οἱ τύποι (8) καὶ (10) οἱ δίδοντες τὴν καμπυλότητα καὶ τὴν στρέψιν τῆς καμπύλης ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται (βλ. §1, III), γράφονται ὑπὸ τὴν κατωθὶ ἀναλυτικὴν μορφήν:

$$k = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{matrix} \right|^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (8')$$

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\left(\left| \begin{matrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{matrix} \right|^2 \right)^{3/2}} \quad (10')$$

Περίπτωσης ἐπιπέδου καμπύλης:

Ἐάν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος, τότε σύμφωνα πρὸς τὸ θεώρημα IX-3-2, ἡ στρέψις $\sigma = 0$. Ἡδὴ ἂν υπολογίσωμεν τὴν καμπυλότητα αὐτῆς.

Ἐστω ἡ καμπύλη $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$. (ἐπίπεδος).

Εἶναι $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ καὶ ὁ τύπος (8) μετὰ τὰς πράξεις δίδει:

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (11)$$

Οὕτω εὑρέθη ὁ τύπος (2) τῆς σελ. 584 τόμου I, ὅστις δίδει τὴν καμπυλότητα μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης, μέ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ καμπυλότης εἰς τὸν χώρον ὀρίζεται πάντοτε θετικῇ, ἐνῶ διὰ τὰς ἐπιπέδους καμπύλας ὠρίσθη προσημασμένη.

Ἐφαρμογή: Δίδεται ἡ κυβικὴ στερεὰ ἑλιξ:

$$\mathbf{r} = a \sin t \cdot \mathbf{i} + a \cos t \cdot \mathbf{j} + \gamma t \cdot \mathbf{k}, \quad \text{ὅπου } \gamma > 0.$$

Νὰ εὑρεθοῦν: 1^α/ Ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐργνημοῦ ἐπιπέδου ταύτης, 2^α/ Τὸ μήκος τό-

Εξου αυτής, 3% / Η ταχύτητα, 4% / Η στρέψις.

Λύσις: 1% / Η εξίσωση του έγκυρτου επίπεδου είναι:

$$\begin{vmatrix} X - a \sin t & Y - a \mu t & Z - \gamma t \\ -a \mu t & a \sin t & \gamma \\ -a \sin t & -a \mu t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2% / Τό μήκος τόξου αυτής με αρχή το σημείο της έλλειψς που αντιστοιχεί εις την τιμήν $t=0$ θα είναι, ως γνωστόν:

$$\ell = \int_0^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_0^t \sqrt{a^2 \mu^2 + a^2 \sin^2 t + \gamma^2} dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + \gamma^2} dt = \sqrt{a^2 + \gamma^2} \cdot t$$

Θέτοντες $\sqrt{a^2 + \gamma^2} = c$, τότε $\ell = c \cdot t$

και η διανυσματική εξίσωση της έλλειψς, συναρτήσει του τόξου, γράφεται:

$$\mathbf{r}(\ell) = a \sin \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{i} + a \mu \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{j} + \gamma \cdot \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{k}.$$

3% / Τό εφαπτομενιόν διάνυσμα είναι:

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = -\frac{a}{c} \mu \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{i} + \frac{a}{c} \sin \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{j} + \frac{\gamma}{c} \cdot \mathbf{k}.$$

και

$$\dot{\mathbf{t}} = -\frac{a}{c^2} \sin \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{i} - \frac{a}{c^2} \mu \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}.$$

Όθεν, η ταχύτητα $k = |\dot{\mathbf{t}}| = \frac{a}{c^2} = \text{σταθερά}.$

4% / Είναι $\mathbf{v} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{|\dot{\mathbf{t}}|} = -\sin \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{i} - \mu \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$

και $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{a}{c} \mu \frac{\ell}{c} & \frac{a}{c} \sin \frac{\ell}{c} & \frac{\gamma}{c} \\ -\sin \frac{\ell}{c} & -\mu \frac{\ell}{c} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\gamma}{c} \mu \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{i} - \frac{\gamma}{c} \sin \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{j} + \frac{a}{c} \cdot \mathbf{k}$

και $\dot{\mathbf{b}} = -\frac{\gamma}{c^2} \sin \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{i} + -\frac{\gamma}{c^2} \mu \frac{\ell}{c} \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = -\frac{\gamma}{c^2} \cdot \mathbf{v}.$

Λαμβάνοντας υπό όψιν τον τύπον (7) του Frenet, λόγω της τελευταίας σχέσεως, έχουμε: $\sigma = \frac{\gamma}{c^2} = \text{σταθερά}.$ Η στρέψις είναι δεξιά εις την δεξιόστροφη έλλειψα και αριστερή εις την αριστερόστροφη.

§5. ΚΑΝΟΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἐστω M ἓνα τυχόν σημεῖον μιᾶς καμπύλης (γ) . Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων συμπίπτει μετὰ τοῦ σημείου M τῆς καμπύλης εἰς τρόπον, ὥστε τὰ διανύσματα i, j, k τῶν Ox, Oy, Oz νὰ ταυτιστοῦν μετὰ τῶν (τ_0, ν_0, β_0) τῆς καμπύλης εἰς τὸ M . Τέλος ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης εἶναι ἡ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$, ἔνθα ℓ τὸ μέτρον τοῦ τόξου αὐτῆς καὶ ὅτι τὸ $\mathbf{r}(0)$ συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον M .

Ἄς παραστήσωμεν διὰ τῶν k_0, σ_0 τὴν καμπυλότητα καὶ τὴν στρέψιν τῆς καμπύλης ἀντιστοίχως εἰς τὸ σημεῖον M .

Ἀναπτύσσοντες τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν $\mathbf{r}(\ell)$ κατὰ MacLaurin εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου O δὲ ἔχωμεν:

$$\mathbf{r}(\ell) = \mathbf{r}(0) + \frac{\ell}{1} \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) + \frac{\ell^2}{2!} \ddot{\mathbf{r}}(0) + \frac{\ell^3}{3!} \dddot{\mathbf{r}}(0) + O(\ell^4) \quad (1)$$

Συμφώνως πρὸς τοὺς τύπους τοῦ Frenet δὲ ἔχωμεν:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{O}, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \tau_0 = i, \quad \ddot{\mathbf{r}}(0) = k_0 \nu_0 = k_0 \cdot j$$

$$\text{Ἐνὶ πλεόν, } \ddot{\mathbf{r}}(\ell) = \frac{d}{d\ell} (k \nu) = (\dot{k} \nu + k \dot{\nu}) = \dot{k} \nu + k(-k\tau + \sigma\beta) = -k^2 \tau + \dot{k} \nu + k \sigma \beta$$

$$\text{Ὅθεν, } \ddot{\mathbf{r}}(0) = -k_0^2 i + \dot{k}_0 j + k_0 \sigma_0 k$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν:

$$\mathbf{r}(\ell) = \ell \cdot i + k_0 j \cdot \frac{\ell^2}{2!} + (-k_0^2 i + \dot{k}_0 j + k_0 \sigma_0 k) \cdot \frac{\ell^3}{3!} + O(\ell^4) \quad (2)$$

$$\mathbf{r}(\ell) = \left(\ell - \frac{k_0^2}{6} \ell^3 \right) i + \left(\frac{k_0}{2} \ell^2 + \frac{\dot{k}_0}{6} \ell^3 \right) j + \frac{k_0 \sigma_0}{6} \ell^3 k + O(\ell^4) \quad (3)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τῶν x, y, z τὰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας τῆς $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ εἰς τὸ σύστημα τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων λαμβάνομεν:

$$x = \ell - \frac{1}{6} k_0^2 \ell^3 + O(\ell^4), \quad y = \frac{1}{2} k_0 \ell^2 + \frac{1}{6} \dot{k}_0 \ell^3 + O(\ell^4), \quad z = \frac{1}{6} k_0 \sigma_0 \ell^3 + O(\ell^4) \quad (4)$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καλοῦνται *κανονικὴ παράστασις* τῆς (γ) εἰς τὸ σημεῖον M .

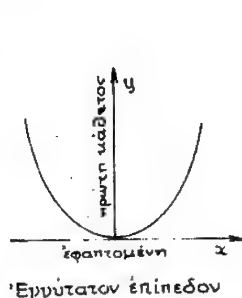
Ἡ μορφή τῆς γραμμῆς (γ) εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου M ρίνεται ἀντιληπτὴ ἀπὸ τὰς προβολὰς τῆς γραμμῆς ἐπάνω εἰς τὰ συντεταγμένα ἐπίπεδα, δηλ. ἐπὶ τῶν

πρωτευόντων επιπέδων της (γ) εις το M .

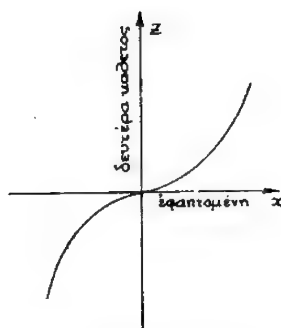
Υποθέτομεν ότι, $k_0 \cdot \sigma_0 \neq 0$ τότε από τα αναπτύγματα των τύπων (4) διά ℓ αρκετά μικρό αι προβολαί όρίζονται κατά προσέγγισιν υπό των εξισώσεων:

$$x = \ell, \quad y = \frac{1}{2} k_0 \cdot \ell^2, \quad z = \frac{1}{6} k_0 \cdot \sigma_0 \cdot \ell^3 \quad (5)$$

1^η Δι' απαλειφής του ℓ μεταξύ των δύο πρώτων εξισώσεων (5) λαμβάνομεν $y = \frac{1}{2} k_0 x^2$, ήτοι ή προβολή της καμπύλης εις το έγγυτάτον επίπεδον είναι μία παραβολή (βλ. Σχ. 1).

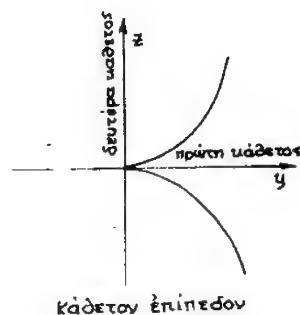


Σχ. 1



Εύθειστοποιούν επίπεδον

Σχ. 2



Κάθετον επίπεδον

Σχ. 3

2^η Δι' απαλειφής του ℓ μεταξύ της πρώτης και τρίτης των εξισώσεων (5) λαμβάνομεν $z = \frac{1}{6} k_0 \cdot \sigma_0 x^3$, ήτοι ή προβολή της καμπύλης εις το εύθειστοποιούν επίπεδον είναι ή κυβική παραβολή (βλ. Σχ. 2).

3^η Δι' απαλειφής του ℓ μεταξύ της δευτέρας και της τρίτης των εξισώσεων (5) λαμβάνομεν $z^2 = \frac{2}{9} \left(\frac{\sigma_0^2}{k_0} \right) y^3$, ήτοι ή προβολή της καμπύλης επί του καθετού επιπέδου είναι μία καμπύλη δεικνυομένη εις το Σχ. 3

§ 6. ΚΕΝΤΡΟΝ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Έστω η καμπύλη (γ) μέ διανυσματινήν εξίσωσιν $\tau = \tau(\ell)$ και έστω $R = \frac{1}{\kappa}$ ή αντίς καμπυλότητα αυτής εις το σημείον της M .

Επί της πρώτης καθετού και προς την φοράν του διανύσματος ν λαμβάνομεν

Ένα διάνυσμα \vec{MK} του οποίου το μήκος είναι R .

Το σημείο k ονομάζεται **κέντρο καμπυλότητας** της καμπύλης εἰς τὸ σημείο M (βλ. Σχ.1).

Ἐάν $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(\ell)$ -εἶναι ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ μεταβλητοῦ κέντρου καμπυλότητας k τῆς (γ) - τὸ ℓ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τόξου τῆς (γ) - τότε, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ σχήματος, ἔχομεν:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + R \cdot \vec{v} \quad (1)$$

καλοῦμεν **κύβηλον καμπυλότητας** τῆς καμπύλης (γ) εἰς τὸ σημείο M τὸν κύβηλον τὸν υφιστάμενον ἐπὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς (γ)

καὶ ἔχοντος κέντρον τὸ κέντρον καμπυλότητας τῆς καμπύλης εἰς τὸ M καὶ αὐτὴν ἴση πρὸς τὴν αὐτὴν καμπυλότητα R τῆς καμπύλης εἰς τὸ M .

Αἱ ἀναλυτικαὶ ἐξισώσεις τοῦ κύβηλου καμπυλότητας τῆς καμπύλης ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ σημείο M αὐτῆς δὲ εἶναι προφανῶς:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}) \cdot \vec{\theta} = 0, \quad (\vec{r}_1 - \vec{r})^2 = R^2 \quad (2)$$

ὅπου \vec{r}^* εἶναι ἡ διανυσματικὴ αὐτὴς ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ τυχόν σημείο τοῦ κύβηλου καμπυλότητας.

Ἡ εὐθεΐα ἡ υφιστάμενη ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης καὶ καθέτου εἰς τὴν πρώτην καθετόν εἰς τὸ κέντρον καμπυλότητας τῆς καμπύλης ονομάζεται **πολιὺς ἄξων** τῆς καμπύλης.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πολιὺς ἄξωνος λόγω τῆς σχέσεως:

$$\vec{OL} = \vec{OM} + \vec{MK} + \vec{KL}$$

δὲ εἶναι: $\vec{r}_2 = \vec{r} + R \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{\theta}$. (3), ὅπου λ παράμετρος.

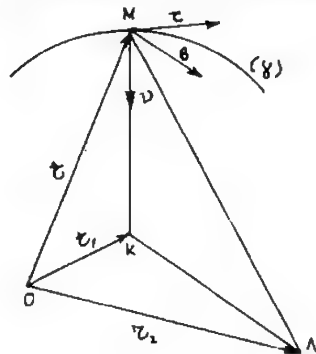
Τέλος καλοῦμεν **ἐγγυτάτην σφαῖραν** τῆς καμπύλης (γ) εἰς τὸ σημείο M τὴν σφαῖραν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου M τῆς καμπύλης καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς A ἐπὶ τοῦ πολιὺς ἄξωνος καὶ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + R \cdot \vec{v} + \vec{R} \cdot \vec{\theta} \quad (4)$$

ἐνθα $\rho = \frac{1}{\sigma}$ ἡ αὐτὴς στρέψεως.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ αὐτὴς τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας δὲ εἶναι:

$$|\vec{AM}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}| = |R \cdot \vec{v} + \vec{R} \cdot \vec{\theta}| = (R^2 + \vec{R} \cdot \vec{R})^{1/2}$$



Σχ.1

Ὅθεν, ἡ ἔξισωσις $\tau^* = \tau(\ell)$ τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας θά εἶναι:

$$(\tau_* - \tau)^2 = R^2 + \dot{R}^2 \cdot \rho^2 \quad (5)$$

Ὁ δέ γ.τ. τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν εἶναι μία καμπύλη ἔχουσα ὡς διανυσματικὴν ἔξισωσιν τὴν (4), καθοριζομένη σφαιροκεντρικῇ ἢ πολικῇ καμπύλῃ τῆς δοδεῖστος.

Πρότασις IX-6-1. Ἡ ἐφαπτομένη τῆς σφαιροκεντρικῆς δοδεῖστος καμπύλης εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν δευτέραν κἀθετον τῆς δοδεῖστος καμπύλης εἰς τὸ ἀντιστοιχον σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἡ ἔξισωσις τῆς σφαιροκεντρικῆς εἶναι:

$$\tau_* = \tau + R \cdot \nu + \dot{R} \cdot \rho \cdot \theta \quad (1)$$

Διὰ παραγώγισεως τῆς (1) ὡς πρὸς ℓ λαμβάνομεν:

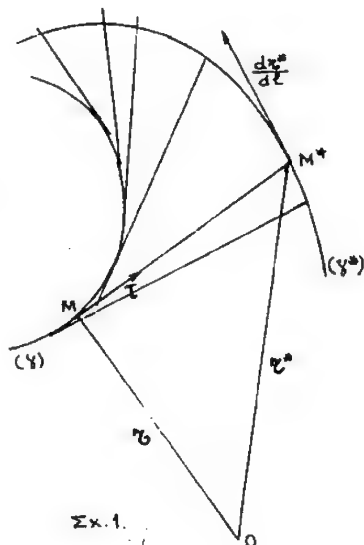
$$\begin{aligned} \frac{d\tau_*}{d\ell} &= \tau + \dot{R} \cdot \nu + R \cdot \dot{\nu} + \dot{R} \cdot \rho \cdot \theta + \dot{R} \cdot \dot{\rho} \cdot \theta + \dot{R} \cdot \rho \cdot \dot{\theta} = \\ &= \tau + \dot{R} \cdot \nu + R \left(-\frac{\tau}{R} + \frac{\theta}{\rho} \right) + \dot{R} \cdot \rho \cdot \theta + \dot{R} \cdot \dot{\rho} \cdot \theta + \dot{R} \cdot \rho \left(-\frac{\nu}{\rho} \right) \\ &= \tau + \dot{R} \nu - \tau + \frac{\dot{R}}{\rho} \theta + \dot{R} \cdot \rho \cdot \theta + \dot{R} \cdot \dot{\rho} \cdot \theta - \dot{R} \nu = \left(\frac{\dot{R}}{\rho} + \dot{R} \cdot \rho + \dot{R} \cdot \dot{\rho} \right) \theta. \quad \text{ὁ. ἔ. δ.} \end{aligned}$$

§ 7. ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ.

I. Αἱ ἐφαπτόμεναι μιᾶς καμπύλης (γ) σχηματίζουν μιαν ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται ἐφαπτομενική ἐπιφάνεια τῆς (γ).¹⁾

Μία καμπύλη (γ*) κειμένη ἐπὶ τῆς ἐφαπτομενικῆς ἐπιφανείας τῆς (γ) καὶ τέμνουσα τὰς ἐφαπτομένας τῆς (γ) ὁρθογωνίως καλεῖται ἐξελεγκμένη τῆς (γ).

Ἐστω ὅτι ἡ καμπύλη (γ) ἔχει τὴν διανυσματικὴν ἔξισωσιν $\tau = \tau(\ell)$ καὶ ἂς ἀναζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διανυσματικὴν ἔξισωσιν τῆς ἐξελεγκμένης (γ*) τῆς (γ). Ἐστω O ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων (βλ. Σκ. 1). Θὰ ἔχωμεν προφανῶς $\tau_* = \tau + \lambda(\ell) \cdot \tau \quad (1)$



1) Αὕτη εἶναι μία ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια (βλ. ἐπόμενον Κεφάλαιον).

Διά παραγωγίσεως της (1) ως προς ℓ λαμβάνομεν: $\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau + \lambda \tau + \lambda \tau$ (2) ή
 $\frac{d\tau^*}{d\ell} = (1+\lambda)\tau + \lambda \cdot k \cdot v$ (3)

Πολλαπλασιάζοντες την (3) επί τ εσωτερικώς και έπειδή έξ υποθέσεως τα δια-
 νύσματα τ και $\frac{d\tau^*}{d\ell}$ είναι όρθογώνια θά έχωμεν: $0 = 1 + \lambda$, έξ ης $\lambda = -1 + c$, ένθα
 c μία αύθαιρετος σταθερά. Όθεν ή έξίσωσις της έξειληγμένης γράφεται:

$$\tau^* = \tau + (c-1)\tau \quad (4)$$

Έν τής (4) προϋπτει ότι, μία δοθείσα καμπύλη (γ) έχει άπειρους έξειληγμένους.
 Έν τού τύπου (4) διά παραγωγίσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau - \tau + (c-1)\dot{\tau} = (c-1) \cdot k \cdot v \quad (5)$$

Έν τής (5) προϋπτει ότι, τό εφαπτομενιόν διάνυσμα $\frac{d\tau^*}{d\ell}$ της έξειληγμένης
ισούται προς τό ... υπόν διάνυσμα εάν $k=0$, δηλ. ή καμπυλότης της (γ) έλ-
λησιν προς τό μηδέν

Πρότασις IX-7-1 ή καμπυλότης k^* της έξειληγμένης (γ^*) παρέχεται υπό τού
τύπου $k^* = \frac{k^2 + \sigma^2}{(c-1)^2 k}$, ένθα k, σ ή καμπυλότης και ή στρέψις της (γ) αντίστοι-
χως και c ή αντίστοιχος προς την (γ^*) σταθερά.

Άπόδειξις: Έχομεν ως γνωστόν ότι:

$$\tau^* = \tau + (c-1) \cdot \tau \quad (1)$$

και

$$\frac{d\tau^*}{d\ell} = (c-1) \cdot k \cdot v \quad (2)$$

Συνεπώς:

$$\left| \frac{d\tau^*}{d\ell} \right| = |(c-1) \cdot k| \quad (3)$$

Λόγω των (2) και (3) έχομεν:

$$\tau^* = \frac{d\tau^*}{d\ell} : \left| \frac{d\tau^*}{d\ell} \right| = \pm v \quad (4)$$

όπου τό \pm είναι τό σημείον τού $[(c-1) \cdot k]$

$$\theta\acute{\alpha} \text{ είναι τότε: } \frac{d\tau^*}{d\ell} = \pm v = \pm (-k \cdot \tau + \sigma \cdot \theta) \quad (5)$$

και

$$\frac{d\tau^*}{d\ell^2} = \frac{d\tau^*}{d\ell} : \left| \frac{d\tau^*}{d\ell} \right| = \pm \frac{-k\tau + \sigma\theta}{(c-1)k}$$

Άρα:

$$k^{*2} = \left| \frac{d\tau^*}{d\ell^*} \right|^2 = \frac{k^2 r^2 \sigma^2}{(C-\ell)^2 k^2}$$

• Έστωσαν $\tau_1^* = \tau + (C-\ell)$ και $\tau_2^* = \tau + (C-\ell)$ δύο έξειλιγμένες της (γ) με έξει-
σωσιν $\tau = \tau(\ell)$. Η απόστασις A_1, A_2 των
σημείων A_1 και A_2 (βλ. Σχ. 2) πού άντι-
στοιχούν εις αύτην τήν τιμήν του τόξου
 ℓ θα είναι:

$$\begin{aligned} |A_1 A_2| &= |\vec{OA}_1 - \vec{OA}_2| = |\tau_1^* - \tau_2^*| \\ &= |\tau - (C-\ell) - \tau + (C-\ell)| = |C - C| = 0 \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Νά εύρεθούν αι έξειλιγ-
μένες της κυυυιδιυής στερεάς έλλιυος
 $\tau = a \sin t \cdot i + a \cos t \cdot j + b \cdot t \cdot k$, $a > 0$, $b \neq 0$

Λύσις: Είναι $\frac{d\tau}{dt} = -a(\sin t) \cdot i + a(\cos t) \cdot j + b \cdot k$ και

$$\left| \frac{d\tau}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{1/2} \text{ και } \tau = \frac{d\tau}{dt} : \left| \frac{d\tau}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1/2} \cdot \{-a(\sin t) \cdot i + a(\cos t) \cdot j + b \cdot k\}$$

$$\text{Έπισης έχομεν: } \ell = \int_0^t \left| \frac{d\tau}{dt} \right| dt = (a^2 + b^2)^{1/2} t$$

Αι έξειλιγμένες λοιπόν είναι αι υαμπύλαι:

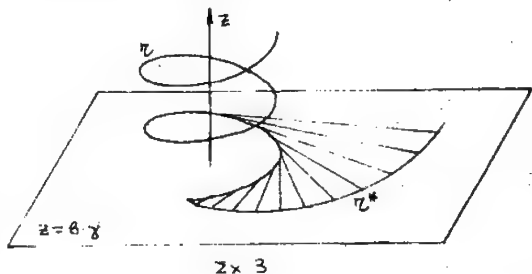
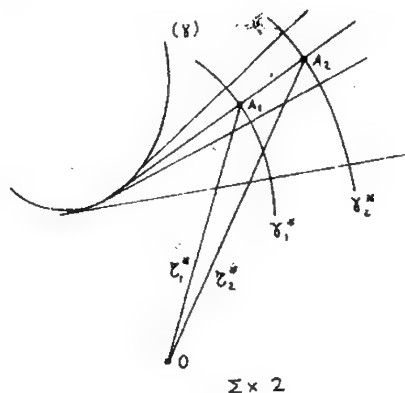
$$\begin{aligned} \tau^* &= \tau + (C-\ell) \tau = [a \sin t - a(C-\ell)(a^2 + b^2)^{-1/2} \sin t] \cdot i + \\ &+ [a \cos t + a(C-\ell)(a^2 + b^2)^{-1/2} \cos t] \cdot j + [bt + (C-\ell)(a^2 + b^2)^{-1/2} b] \cdot k \end{aligned}$$

ή θέτοντες $\gamma = C \cdot (a^2 + b^2)^{-1/2}$ και $t = \ell \cdot (a^2 + b^2)^{-1/2}$ θα έχωμεν τελικώς:

$$\tau^* = a[\gamma \sin t + \sin t] \cdot i + a[\gamma \cos t + \cos t] \cdot j + b[\gamma t + t] \cdot k$$

Τό Σχ. 3 δείυνύει ότι ή έξειλιγμένη
είναι μία έπιπέδος υαμπύλη υειμέ-
νη επί του έπιπέδου $z = b \cdot \gamma$. Ούτω
πάσαι αι έξειλιγμένες της έλλιυος
είναι υαμπύλαι υείμεναι επί παράλ-
ληλων έπιπέδων διά τας διαφόρους
τιμές του γ , δηλ. του C .

II Έάν μία υαμπύλη (γ) είναι η έξειλιγμένη μιας υαμπύλης (γ^*) , τότε έξ όρι-



σμού ή (γ^*) ορίζεται *ένειλημένη της* (γ) .

Το πρόβλημα μας είναι το ακόλουθον: Δοθείσης τῆς ἑξισώσεως τῆς (γ) νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑξίσωσις τῆς (γ^*) ἑνελιγμένης αὐτῆς (γ^*) .

Ἐστω $\tau = \tau(\ell)$, $\tau^ = \tau^*(\ell)$ τὰ αὐτοαναστασιμαί ἑξισώσεις των (γ) , (γ^*) ἀντιστοίχως με παράμετρον τὸ τόξον ℓ τῆς (γ) . Ἐστω O ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων (βλ. Σχ 4) θὰ ἔχωμεν τότε:

$$\tau^*(\ell) = \tau(\ell) + \vec{MM}^* \quad (1)$$

Τὸ διάνυσμα \vec{MM}^* θὰ κείται εἰς τὸ υἰάθετον ἐπὶ πεδον τῆς (γ) εἰς τὸ σημεῖον M καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἔχωμεν:

$$\vec{MM}^* = \lambda(\ell) \cdot \nu + \mu(\ell) \cdot \theta \quad (2)$$

Ἡ (1), λόρῳ τῆς (2), γράφεται:

$$\tau^*(\ell) = \tau(\ell) + \lambda(\ell) \cdot \nu + \mu(\ell) \cdot \theta \quad (3)$$

Ἀρκεῖ ἤδη νὰ προσδιορίσωμεν τὰς συναρτήσεις $\lambda(\ell)$ καὶ $\mu(\ell)$. Διὰ παραγώρισεως ὡς πρὸς ℓ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau + \dot{\lambda} \cdot \nu + \lambda \cdot \dot{\nu} + \dot{\mu} \theta + \mu \cdot \dot{\theta} \quad (4)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους τοῦ Frenet ἡ (4) γράφεται:

$$\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau + \dot{\lambda} \nu + \lambda (-\kappa \tau + \sigma \theta) + \dot{\mu} \theta + \mu (-\sigma \nu) = (1 - \lambda \kappa) \tau + (\dot{\lambda} - \mu \sigma) \nu + (\lambda \sigma + \dot{\mu}) \theta \quad (5)$$

Τὸ $\frac{d\tau^*}{d\ell}$ εἶναι ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα τῆς γ^* καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἔχη προβολὰς ἀναλόγους πρὸς τὰς προβολὰς τοῦ διανύσματος: $\tau^* - \tau = \lambda \nu + \mu \theta$ (6).

Ὅθεν ὑπάρχει ἀριθμὸς t τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν λόρῳ τῶν (5) καὶ (6):

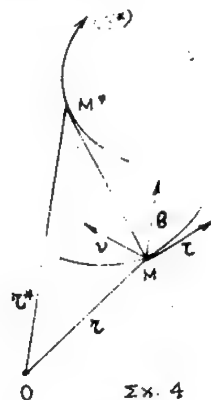
$$1 - \lambda \kappa = 0, \quad \dot{\lambda} - \mu \sigma = t \cdot \lambda, \quad \lambda \sigma + \dot{\mu} = t \cdot \mu \quad (7)$$

Ἐκ τῶν (7) λαμβάνομεν: $\lambda = \frac{1}{\kappa}$ (8)

Δι' ἀπαλειφῆς τοῦ t μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων ἑξισώσεων εὐρίσκομεν:

$$\sigma = \frac{\mu \cdot \dot{\lambda} - \dot{\mu} \lambda}{\mu^2 + \lambda^2} = -\frac{d}{d\ell} \left(\text{τοῦ } \frac{\mu}{\lambda} \right)$$

Ὅθεν,

$$\int \sigma d\ell + C = \text{τοῦ } \frac{\mu}{\lambda} \quad (9)$$


Ἐν τῇ (9) λαμβάνομεν:

$$\mu = \lambda \cdot \sigma \phi \left(\int \sigma d\ell + c \right) = \frac{1}{k} \cdot \sigma \phi \left(\int \sigma d\ell + c \right). \quad (10)$$

Ἡ εἰσὼσις τῆς (γ^*) θά εἶναι λόγῳ τῶν (3), (8) καὶ (10):

$$z^* = z(\ell) + \frac{1}{k} \cdot v + \frac{1}{k} \sigma \phi \left(\int \sigma d\ell + c \right) \cdot \theta \quad (11).$$

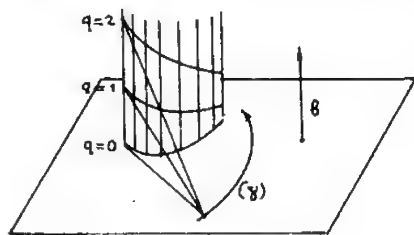
Ἐν τῇ (11) παρατηροῦμεν ὅτι, ἔχομεν μίαν ἀπειρίαν ἐνελιγμένων ὁδοῦς καμπύλης

Παρατήρησις: Ἐν τῇ (11) παρατηροῦμεν ὅτι, ἵνα ὁ γ.τ. τῶν κέντρων καμπυλότητος μιᾶς καμπύλης εἶναι μία ἐνελιγμένη αὐτῆς ἀρκεῖ ὁ συντελεστής τοῦ θ νὰ εἶναι μηδέν, τὸ ὁποῖον συμβαίνει ὅταν $\sigma(\ell) \equiv 0$ καὶ $c = \pi/2$, δηλ. ὅταν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπιπέδος. Αἱ ἐνελιγμέναι μὲς ἐπιπέδου καμπύλης εἶναι:

$$z^* = z(\ell) + \frac{1}{k} v + \frac{1}{k} \sigma \phi c \cdot \theta \quad (12) \quad \text{ἢ}$$

$$z^* = z(\ell) + \frac{1}{k} v + \frac{q}{k} \cdot \theta \quad (12'), \quad \text{ὅπου ἐτέθη } \sigma \phi c = q.$$

Δίδοντες διαφόρους τιμὰς εἰς τὴν q λαμβάνομεν τὰς διαφόρους ἐνελιγμένας τῆς (γ) . Οὕτω διὰ $q = 0, 1, 2, \dots$ ἔχομεν τὰς εἰς τὸ Σχῆμα 5 δευνομένας. Ἡ ἐνελιγμένη ἡ προκύπτουσα διὰ $q = 0$ κεῖται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μετὰ τῆς (γ) , ἐνῶ πᾶσαι αἱ ἄλλαι, ἐπειδὴ τὸ θ εἶναι σταθερόν, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς κυλινδρικοῦς ἐπιφανείας τῆς ὁποίας αἱ γενετεραι εἶναι κἀθετοὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς καμπύλης (γ) καὶ ἔχουν ὡς ὁδηγὸν τὴν ἐνελιγμένην τῆς (γ) τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν τιμὴν $q = 0$.



Σχ. 5

Συμπληρώματα καὶ ἀσκήσεις:

- Ἐστω $a = i + 2j - k$, $b = -i + j$, $c = -j + 2k$. Νά εὕρεθῃ τὸ γινόμενον $a \cdot (b \times c)$.
- Δείξατε ὅτι: $|a \times b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 - (a \cdot b)^2$.
- Δείξατε ὅτι: $a \times (b \times c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c$.
- Ἐάν $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ εἶναι ἓνα μοναδιαῖον διάνυσμα δείξατε ὅτι, αἱ στα-

δέραι a_i ($i=1,2,3$) είναι τα διευθύνοντα συνιστώμενα της ευθείας, ήτις περιέχει το διάνυσμα \mathbf{a} και έχει τον αυτόν προσανατολισμό με το διάνυσμα \mathbf{a} .

5. Να επαληθεύσετε την ταυτότητα του Lagrange:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

6. Έστω $\mathbf{u} = a(\sin t)\mathbf{i} + a(\eta \mu t)\mathbf{j} + \beta t\mathbf{k}$, $a, \beta \neq 0$. Να εύρεθούν τα:

i) $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$, ii) $\left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|$, iii) $\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}$, iv) $\left| \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right|$.

7. Δείξτε ότι: $\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = |\mathbf{r}| \cdot \frac{d|\mathbf{r}|}{dt}$.

8. Επαληθεύσατε ότι μια λύσις της διανυσματικής διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k^2\mathbf{r}$ είναι η $\mathbf{r} = \mathbf{a} \sin kt + \mathbf{b} \eta \mu kt$, ἔνθα \mathbf{a}, \mathbf{b} σταθερά διανύσματα.

9. Εάν $\mathbf{u} = (2t^2+3)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ και $\mathbf{v} = (\eta \mu t)\mathbf{i} + e^t\mathbf{k}$ να υπολογισθούν:

i) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, ii) $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, iii) $\frac{d}{dt}|\mathbf{v}|$.

10. Δίδεται η καμπύλη με διανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\ell + \sqrt{\ell^2+1})\mathbf{i} + \frac{1}{2}(\ell + \sqrt{\ell^2+1})'\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\log(\ell + \sqrt{\ell^2+1}))\mathbf{k}$$

Δείξτε ότι αυτή είναι μία φυσική παράστασις ταύτης, δηλ $\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\ell} \right| = 1$.

→ 11. Να εύρεθούν αι εξισώσεις της εφαπτομένης, της πρώτης καθέτου και της δευτέρας καθέτου της καμπύλης, ήτις έχει διανυσματική εξίσωση $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Εν συνεχεία εφαρμόσατε τα ανωτέρω αποτελέσματα εις τή καμπύλην:

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \eta \mu t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k} \text{ εις το σημείον } t = \frac{\pi}{4}.$$

→ 12. Να εύρεθῇ ἡ εξίσωσις τοῦ ἔρρυθτου, καθέτου καί εὐθειοποιούντος ἐπιπέδου τῆς καμπύλης, ήτις ἔχει διανυσματική εξίσωσις $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Εν συνεχεία

εφαρμόσατε τὰ ανωτέρω αποτελέσματα εις τὴν καμπύλην $\mathbf{r} = (t^2-1)\mathbf{i} + t(1+t)\mathbf{j} + (4t^2-3t+1)\mathbf{k}$ εις τὸ σημείον $t=1$.

13. Να δείξετε ότι το υαθέτον επίπεδον εἰς τυχόν σημεῖον τῆς αμπύλης $\mathbf{r} = 2\alpha\eta\kappa t \sin t \cdot \mathbf{i} + 2\alpha \sin^2 t \cdot \mathbf{j} + 2\alpha\eta\kappa t \cdot \mathbf{k}$ διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.

14. Να εὑρεθοῦν τὰ πρωτεύοντα διανύσματα τῆς γραμμῆς $\mathbf{r} = 4\alpha \sin^2 t \cdot \mathbf{i} + 4\alpha\eta\kappa^2 t \cdot \mathbf{j} + 3\theta \sin 2t \cdot \mathbf{k}$.

15. Να εὑρεθῇ τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς αμπύλης $x = \alpha \sin t + \theta\eta\kappa t$, $y = \alpha\eta\kappa t + \theta \sin t$, $z = \gamma\eta\kappa 2t$.

16. Να εὑρεθῇ ἡ αμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς αμπύλης: $\frac{1}{r} \mathbf{r} = (3t - t^3) \mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} + (3t + t^3) \cdot \mathbf{k}$. $\mathbf{r} / \mathbf{x} = 3z^2$, $y = 6z^3$.

17. α) Δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ μιᾶς ἑλλειως ἐπὶ ἐνὸς μώνου ἐν περιστροφῇ ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου υαθέτου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ τοῦ μώνου εἶναι μία λογαριθμιτὴ σπείρα.

β) Δείξατε ὅτι αἱ συμφυεῖς ἐξισώσεις μιᾶς ἑλλειως ἐπὶ ἐνὸς μώνου ἐν περιστροφῇ εἶναι:

$$\kappa = \frac{1}{a\ell}, \sigma = \frac{1}{\beta \cdot \ell}, \text{ ὅπου } a, \beta \text{ σταθεραὶ}$$

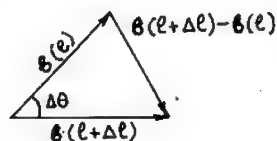
18. Δείξατε ὅτι, ἐάν τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον αμπύλης τινὸς διέρχεται σταθερῶς διὰ τινος σταθεροῦ σημείου 0, ἡ αμπύλη εἶναι ἐπίπεδος καὶ τὸ ἐπίπεδόν της διέρχεται διὰ τοῦ 0. Δύναται δὲ αὕτη νὰ εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ 0;

19. Να εὑρεθῇ ἡ αμπυλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς γραμμῆς ἥτις ἔχει παραμετρικὰ ἐξισώσεις: $x = \int f(t) \eta\kappa t dt$, $y = \int f(t) \sin t dt$ καὶ $z = \int f(t) \varphi(t) dt$.

20. Ἐάν $\Delta\theta$ εἶναι ἡ γωνία μεταξὺ τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων τῆς αμπύλης $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ εἰς τὰ σημεῖα ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς ℓ καὶ $\ell + \Delta\ell$, τότε δά ἔχωμεν $|\sigma| = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}$.

Ἀπόδ. Ἐπειδὴ $\hat{\sigma} = -\sigma \cdot \mathbf{v} \Rightarrow |\sigma| = |\hat{\sigma}| = \left| \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\theta(\ell + \Delta\ell) - \theta(\ell)}{\Delta\ell} \right| =$

$$= \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell} - \frac{1}{24} \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \left[\frac{(\Delta\theta)^3}{\Delta\ell} \cdot \sin 5 \right] = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\ell}.$$



21. Δείξτε ότι αι μόναι επιπεδοί καμπύλαι με σταθεράν αὐτίνα καμπυλότητος R εἶναι περιφέρειαί.

(Υπόδ: Ἐφαρμόσατε τοὺς τύπους (6) καὶ (7) τοῦ προβλήματος τῆς § 3)

22. Νά προσδιορισθοῦν αι φυσικαὶ ἢ συμφυεῖς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης:

$$z = a \left(\cosh \left(\frac{t}{a} \right) \right) i + t \cdot j, \quad a = \text{σταθερά.}$$

(Υπόδ: Ὑπολογίσατε τὰ ℓ καὶ k τῆς καμπύλης, τό $\sigma = 0$).

23. Νά προσδιορισθῇ ἡ καμπύλη τῆς ὁποίας αι φυσικαὶ ἐξισώσεις εἶναι:

$$13/ \quad k = \left(\frac{1}{2a\ell} \right)^{1/2}, \quad \sigma = 0, a > 0, \ell > 0, \quad 23/ a \cdot R = a^2 + \ell^2, a > 0, \ell > 0.$$

24. Δείξτε ότι, ἐάν ἡ διανυσματικὴ αὐτίς $z = z(\ell)$ μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης σχηματίζῃ μίαν σταθεράν γωνίαν α με τὸ ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα $\tau = \tau(\ell)$, τότε ἡ καμπύλη εἶναι μία λογαριθμικὴ σπείρα.

25. Δείξτε ότι ἡ καμπύλη ἥτις ἔχει φυσικὰς ἐξισώσεις $k = \frac{1}{\ell}, \sigma = 0, \ell > 0$ εἶναι λογαριθμικὴ σπείρα $\rho = (1/\sqrt{2})e^\theta$.

26. Νά δείχῃ ότι αι γραμμαὶ αι ἔχουσαι σταθεράν καμπυλότητα καὶ στρέψιν εἶναι κυκλικαὶ ἑλλίψεις.

27. Καλοῦμεν γενικὴν ἢ κυλινδρικήν ἑλλίψα μία γραμμὴν τοῦ χώρου τῆς ὁποίας τὸ ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα τ σχηματίζει σταθεράν γωνίαν $\alpha \neq 0$ με μίαν εὐθείαν, ἥτις καλεῖται ἄξων τῆς ἑλλίψος. Δείξτε ότι: i) Μία γενικὴ ἑλλίς ἔχει μίαν φυσικὴν παράστασιν τῆς μορφῆς: $z = x(\ell^*) \cdot i + y(\ell^*) \cdot j + \ell^* \sin \alpha \cdot k$.

ii) Μία καμπύλη εἶναι γενικὴ ἑλλίς ἐάν καὶ μόνον ἐάν, ὁ λόγος $\frac{k}{\sigma}$ τῆς καμπυλότητος πρὸς τὴν στρέψιν εἶναι σταθερός, ὅπου $k \neq 0$ καὶ εἶναι $\sigma = 0$, ὅταν $k = 0$.

Ἀπόδειξις: i) Ἐστω $z = x(\ell^*) \cdot i + y(\ell^*) \cdot j + z(\ell^*) \cdot k$ (1) μία φυσικὴ παράστασις τῆς καμπύλης. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ἑλλίς ἔχει τοποθετηθῇ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων εὐρίσκεται ἐπὶ τῆς καμπύλης καὶ ὅτι τὸ k εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν

ἄξονα τῆς ἑλλειψος. Θὰ ἔχωμεν:

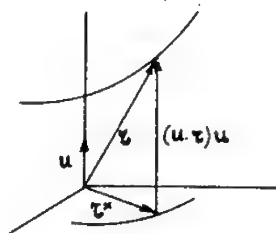
$$\sigma u \alpha = \sigma u \nu \langle \tau, k \rangle = \tau \cdot k = \dot{\tau} \cdot k = \dot{z}$$

Ὅθεν, $z = \ell \sigma u \alpha + c$, ἔνθα c σταθερά.

Ἄς θέσωμεν $\ell^* = \ell + \frac{c}{\sigma u \alpha}$, ὅτε $\ell = \frac{\ell^* \sigma u \alpha - c}{\sigma u \alpha}$, καὶ $z = \frac{\ell^* \sigma u \alpha - c}{\sigma u \alpha} \sigma u \alpha + c = \ell^* \sigma u \alpha$
καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $\tau = x(\ell^*) \cdot i + y(\ell^*) \cdot j + \ell^* \sigma u \alpha \cdot k$.

28. Δείξατε ὅτι ἡ καμπυλότης k^* τῆς προβολῆς μιᾶς γενικῆς ἑλλειψος εἰς ἓνα ἐπί-
πεδον μάλιστα πρὸς τὸν ἄξονά της δίδεται ὑπὸ τοῦ
τύπου $k^* = k/\eta \mu^2 \alpha$, ὅπου $\alpha \neq 0$ εἶναι ἡ γωνία μετα-
ξύ τοῦ ἄξονος αὐτῆς καὶ τοῦ ἐφαπτομένου δι-
ανύσματος τῆς ἑλλειψος καὶ k ἡ καμπυλότης τῆς
ἑλλειψος (βλ. Σχ.1).

(Ἀπόδ. Ἐστω $\tau = \tau(\ell)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἑλλειψος. Ἡ
ἐξίσωσις τῆς προβολῆς ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ
σχήματος εἶναι:



Σχ.1

$$\tau^* = \tau(\ell) - (u, \tau(\ell))u \quad (1)$$

Ἄς σημειωθῇ ὅτι ἐν γένει τὸ ℓ δὲν εἶναι μιὰ φυσικὴ παράμετρος τῆς
προβολῆς $\tau^* = \tau^*(\ell)$. Διαφορίζοντες τὴν (1) εὐρίσκουμεν: $\frac{d\tau^*}{d\ell} = \tau - (u, \tau)u =$
 $\tau - u \cdot \sigma u \alpha$ (τὸ $u =$ σταθερὸν διάνυσμα).

Εἶναι καὶ $\left| \frac{d\tau^*}{d\ell} \right|^2 = (\tau - u \cdot \sigma u \alpha)^2 = \eta \mu^2 \alpha$, $0 < \alpha < \pi$.

$$\text{Ὅθεν, } \dot{\tau}^* = \frac{d\tau^*}{d\ell} \left/ \left| \frac{d\tau^*}{d\ell} \right| \right. = \frac{\tau - (\sigma u \alpha)u}{\eta \mu \alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{d\tau^*}{d\ell} = \frac{\dot{\tau}}{\eta \mu \alpha}$$

$$\text{Τέλος } k^* = \left| \dot{\tau}^* \right| = \left| \frac{d\tau^*}{d\ell} \right| \left/ \left| \frac{d\tau^*}{d\ell} \right| \right. = \frac{|\dot{\tau}|}{\eta \mu \alpha} \cdot \frac{1}{\eta \mu \alpha} = \frac{|\dot{\tau}|}{\eta \mu^2 \alpha} = \frac{k}{\eta \mu^2 \alpha}.$$

29. Νά ἀποδείχθῃ ὅτι ἡ ἑλιανὴ καὶ ἀναγωγαία συνθήκη ἵνα μιὰ καμπύλη κεῖ-
ται ἐπὶ σφαίρας εἶναι:

$$\frac{R}{\rho} + \dot{\rho} \dot{R} + \rho \cdot \ddot{R} = 0, \quad \text{ἔνθα } R, \rho \text{ ἡ αὐτὴς καμπυλότητος καὶ}$$

ἡ αὐτὴς στρέψεως τῆς καμπύλης.

(ὑπόδ: Τὸ κέντρον τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον $\tau(\ell)$ δίδεται

ὡς γνωστόν, ὑπὸ τοῦ τύπου $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + R\mathbf{v} + R \cdot \rho \cdot \boldsymbol{\theta}$. Εἶναι ὁμως τὸ \mathbf{r}_1 σταθερόν καὶ ὡς ἐκ τούτου $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 0$.

Παραπρωρίσατε ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀνωτέρω εἰσῶσιν κ.τ.λ. Ἀντιστρόφως: Ἄρκει νὰ δειχθῇ $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|^2 = \text{σταθερόν}$

→ 30. Νὰ εὐρεθῇ ἡ αμμιπλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς σφαιρομεντριῆς τῆς αμμιπύλης ἥτις ἔχει διανυσματικὴν εἰσῶσιν $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$.

31. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἡ αμμιπύλη $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ ἔχει σταθερὰ στρέψιν, τότε ἡ αμμιπύλη $\mathbf{r}^* = \frac{1}{\sigma} \mathbf{v} - \int \boldsymbol{\theta} d\ell$ ἔχει σταθερὰ αμμιπλότητα.

32. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἐξελιγμέναι τῆς ἀλυσσοειδοῦς $\mathbf{y} = \frac{a}{2} (\mathbf{e}^{\mathbf{\hat{a}}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{\hat{a}}})$

→ 33. Δείξατε ὅτι ἡ δευτέρα καθετος τῆς ἐξελιγμένης $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + (C - \ell)\boldsymbol{\tau}$ τῆς $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$

$$\text{εἶναι } \boldsymbol{\theta}^* = \frac{K \cdot \boldsymbol{\theta} + \sigma \cdot \boldsymbol{\tau}}{|(C - \ell)K| \cdot K^*}$$

34. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἐξελιγμέναι καὶ αἱ ἐνειλιγμέναι τῆς ἀστεροειδοῦς $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$.

35. Δείξατε ὅτι, μία ἐνειλιγμένη μιᾶς ἐπιπέδου αμμιπύλης (γ) εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰογενείας τῶν καθέτων αὐτῆς

36. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἐνειλιγμέναι τῆς κυκλοειδοῦς $x = a(t - \eta \sin t)$, $y = a(1 - \sin t)$.

37. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἐνειλιγμέναι τῆς γραμμῆς ἡ ὁποία τέμνει ὑπὸ σταθεράν γωνίαν τὰς εὐθυγράμμους γενετείρας ἑνὸς ὁρθοῦ κυκλιοῦ κώνου.

38. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἂν ἡ πρώτη καθετος αμμιπύλη (γ) εἶναι ἡ δευτέρα καθετος μιᾶς ἄλλης αμμιπύλης (γ_1), τότε ἰσχύει ἡ σχέση $K \leq C(K^2 + \sigma^2)$, ὅπου K καὶ σ ἡ αμμιπλότης καὶ ἡ στρέψις τῆς αμμιπύλης.

39. Δείξατε ὅτι, ἐὰν τὸ ἐγγύτατον ἐπιπέδον μιᾶς αμμιπύλης εἰς καθε σημεῖον αὐτῆς οἰερχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου, ἡ αμμιπύλη εἶναι ἐπίπεδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον δὲ διαπραγματευθῶμεν συντόμως βασικὰς ιδιότητες τῶν ἐπιφανειῶν. Γνωστὰ παραδείγματα ἐπιφανειῶν εἶναι τὸ ἐπίπεδον, ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια ἐν περιστροφῇ. Ἡ ἔννοια τῆς ἐπιφανείας εἶναι εὐρεία. Ἐμεῖς δὲ μελετήσωμεν ταύτην τοπικῶς, δηλ. εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς σημείου τῆς.

§1. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

I. Μία ἐπιφάνεια S ὁρίζεται ὡς ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ Εὐκλείδειου χώρου τῶν τριῶν διαστάσεων, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ἄκρα τοῦ διανύσματος $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, ὅπου u, v παράμετροι, ἥτοι: $\mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$.

Αἱ συναρτήσεις $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ καλοῦνται συντεταγμέναι τοῦ διανύσματος θέσεως $\mathbf{r}(u, v)$. Ὑποθέτομεν ὅτι αὗται εἶναι ὁρισμέναι εἰς ἓνα ἀνοιχτὸν συντεταγμένον πεδίον τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου $ou-v$ καὶ ἔχουν συνεχεῖς μεριμνὰς παρῶν μέχρι τοιαύτης τῆς ἑξέως ποὺ ἀπαιτεῖται ἐνδεέστε.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \mathbf{i} + y(u, v) \cdot \mathbf{j} + z(u, v) \cdot \mathbf{k} \quad (1)$$

ἢ ἀναλυτικῶς:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (1')$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) ἢ αἱ (1') καλοῦνται παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐπιφανείας.

Τὰ διανύσματα $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ καὶ $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ καλοῦνται συντεταγμένα διανύσματα καὶ ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, δηλ.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0} \quad (3)$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη (3) ἔχει καὶ τὴν κατὰ διὰ ἰσοδύναμον διατύπωσιν: Ὁ θαρμὸς τοῦ πίνακος:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

εἶναι ἰσὸς πρὸς 2.

Είς τό ἐξῆς θά θεωροῦμεν ἐπιφανείας τῶν ὁποίων τά σημεῖα πληροῦν τήν ἀνωτέρω ιδιότητα (ὁμαλά σημεῖα). Ἐάν δέ ὁ βαθμός τοῦ πίνακος εἶναι < 2 τά σημεῖα καλοῦνται ἀνώμαλα ἢ ιδιάζοντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας.

Παρατήρησις: Ἡ ἐξίσωσις $z=f(x,y)$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς μία εἰδική περίπτωση μιᾶς παραμετριοῦς ἐξισώσεως ἐπιφανείας, ἐάν λάβωμεν τὰ x, y ὡς παραμέτρους, ὅτε δυνάμεθα νά γράψωμεν:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + f(x,y) \cdot \vec{k}$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἡδὴ μίαν καμπύλην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S μέ ἐξίσωσιν $\tau = \tau(u,v)$. Ἐάν μία παράμετρος t εἰσαχθῇ διὰ νά προσδιορισθῇ μίαν τοιαύτην καμπύλην τῆς ἐπιφανείας, τότε εἰς καθε τιμὴν τοῦ t ἀντιστοιχεῖ ἓνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας, ἐπομένως μία ὥρισμένη τιμὴ τῶν u καὶ v . Οὕτω αἱ παράμετροι u καὶ v καθίστανται συναρτήσεις τῆς παραμέτρου t , ἥτοι:

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (4)$$

Αἱ ἐξισώσεις (4) καλοῦνται ἐξισώσεις τῆς καμπύλης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

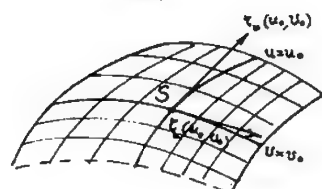
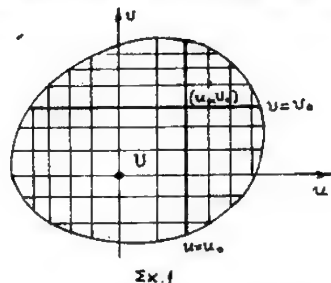
Ἀντικαθιστώντες τὰς (4) εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\tau = \tau(u,v)$ λαμβάνομεν:

$$\tau = \tau(u(t), v(t)) \quad (5)$$

Ἡ (5) καλεῖται παραμετριοῦς ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια $S: \tau = \tau(u,v)$, ὅπου τὰ $(u,v) \in U$ ὡς δεικνύει τὸ Σχ.1. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα τῆς συντεταγμένης γραμμῆς $u=u_0$ ἐντὸς τοῦ χωρίου U θά εἶναι ἡ καμπύλη $\tau = \tau(u_0, v)$ ἐπὶ τῆς S κατὰ μήκος τῆς ὁποίας τὸ u εἶναι παράμετρος. Αὕτῃ ἡ καμπύλη ἀλεῖται u -παραμετριοῦς γραμμὴ, $u=u_0$. Ἀναλόγως τῆς εὐθεῖας τῆς συντεταγμένης γραμμῆς $v=v_0$ εἶναι ἐπὶ τῆς S ἡ καμπύλη $\tau = \tau(u, v_0)$ τὴ ὁποία καλεῖται v -παραμετριοῦς γραμμὴ, $v=v_0$. Οὕτω ἡ S καλύπτεται ἀπὸ δύο ὁμογενεῖας καμπύλων, ὅπλ. τὰς εὐθείας τῶν συντεταγμένων γραμμῶν $v=\text{const.}$ καὶ $u=\text{const.}$

Ἐπὶ πλέον εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς μιᾶς u -παραμετριοῦς γραμμῆς μετὰ μιᾶς v -παραμετριοῦς γραμμῆς αὗται ἔχουν διαφόρους ἑφαπτομένους.



ὡς γνωστόν ἔχομεν: $\tau_u \times \tau_v \neq 0$ καὶ ἥτις εἶναι μιὰ χαρακτηριστικὴ ιδιότης τοῦ ὁμαλοῦ σημείου τῆς ἐπιφανείας. Αἱ ἀνωτέρω καμπύλαι ἀποτελοῦν ἓνα δίκτυον ἢ ἓνα πλήρμα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὰς ὁποίας καλοῦμεν συντεταγμένες γραμμὰς τῆς ἐπιφανείας ἢ παραμετρίαις γραμμὰς, τὰ δὲ u, v καλοῦνται καμπυλόγραμμοι συντεταγμένοι τῆς ἐπιφανείας. Οὕτω εἰς τὴν τομὴν μιᾶς u -παραμ. γραμμῆς καὶ μιᾶς v -παραμ. γραμμῆς ἀντιστοιχεῖ ἓνα μόνον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ καὶδε σημείου τῆς ἐπιφανείας διέρχεται μιὰ u -παραμ. γραμμὴ καὶ μιὰ v -παραμ. γραμμὴ. Ὅθεν, ὑπάρχει μιὰ ἀμφοιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας καὶ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου Ouv .

II. Διάφορα εἶδη ἐπιφανειῶν.

Κατωτέρω θὰ δώσωμεν τὴν διανυσματικὴν παραμετρίαν ἐξίσωσιν ὠρισμένων κατηγοριῶν ἐπιφανειῶν.

13/ Ἐπιφάνεια ἐν περιστροφῇ εἶναι ἡ παραγομένη διὰ τῆς περιστροφῆς μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης (γ) πέριξ ἑνὸς ἄξονος L κειμένου εἰς τὸ ἐπίπεδόν της. Ἡ περιστρεφόμενη καμπύλη καλεῖται γενετείρα τῆς ἐπιφανείας ἐν περιστροφῇ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἕκαστον σημεῖον τῆς γενετείρας διαγράφει μιὰν περιφέρειαν κύκλου (βλ. Σχ. 1)

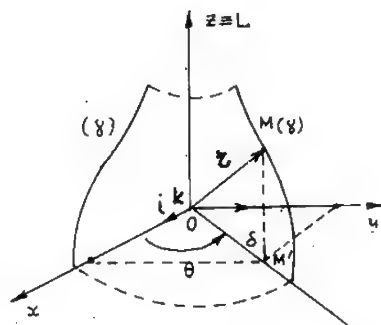
Ἐάν $x = f(t), z = \sigma(t)$ $a < t < \beta$ εἶναι αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς γενετείρας εἰς τὸ ἐπίπεδον oxz , τότε προφανῶς ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας θὰ εἶναι:

$$\tau = (f(t) \cos \theta) i + (f(t) \sin \theta) j + \sigma(t) k, \quad t, \theta: \text{παραμέτροι}$$

(διότι, $x = |\vec{OM}| \cos \theta = f(t) \cos \theta$ κ.τ.λ.).

Δι' ἀπαδείφης τῶν t, θ εὐρίσκεται ἡ ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας.

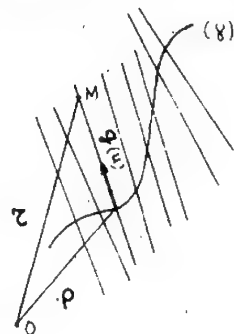
14/ Εὐδαιρομένης καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις παράγεται ὑπὸ μιᾶς μονοπαραμε-



Σχ. 1

τῆς οἰομενείας εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται μενέτειρα τῆς ἐπιφάνειας

Ἐστω $\rho = \rho(u)$ ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης (γ) καὶ $q(u)$ ἓνα μὴ μηδενικόν διάνυσμα (βλ. Σχ. 2). Δι' ἑαστον u ἀντιστοιχεῖ ἓνα σημεῖον τῆς καμπύλης (γ) καὶ δι' αὐτοῦ τοῦ σημείου θεωροῦμεν διερχομένην μίαν εὐθεῖαν παράλληλην πρὸς τὸ διάνυσμα $q(u)$. Οὕτω παράγεται ὑπὸ τῆς μονοπαραμετρικῆς οἰομενείας εὐθειῶν μία εὐθειογενής, ὡς ὠρίσθη, ἐπιφάνεια. Ἐστω M τυχόν σημεῖον ταύτης εὐρισκόμενον ἐπὶ τῆς μενέτειρας (εὐθείας)



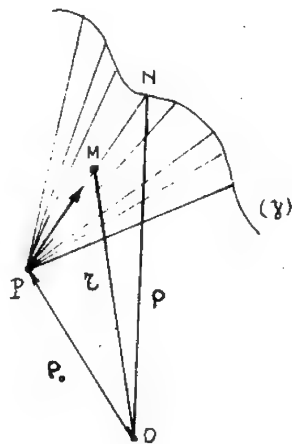
Σχ 2

ἀντιστοιχοῦσης εἰς τὴν τιμὴν u . Προφανῶς ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\tau = \rho(u) + u q(u) \quad (1), \quad \text{ἔνθα } u \text{ νέα παράμετρος}$$

Δι' ἀπαλειφῆς τῶν u, v εὐρίσκεται ἡ ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις ταύτης. Διὰ $u = \text{σταθ.}$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς γενέτειρας.

33% Κωνικὴ καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἥτις παράγεται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας ἣ ὁποία κινεῖται, ὥστε νὰ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου P καὶ νὰ σπαντᾷ μίαν σταθεράν καμπύλην (γ) . Τὸ σταθερὸν σημεῖον καλεῖται κορυφὴ τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας, ἡ σταθερὰ καμπύλη καλεῖται ὁδὸς, ἡ δὲ κινουμένη εὐθεῖα γενέτειρα τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας (βλ. Σχ. 3). Αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐιδιὴ περίπτωσης τῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν.



Σχ 3

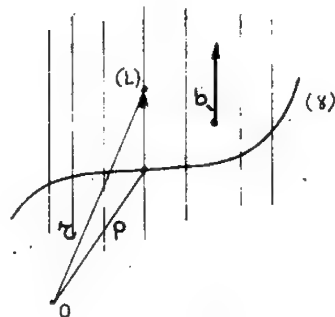
Ἐάν $\rho = \rho(u)$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (γ) καὶ M τυχόν σημεῖον τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας ὡς ἐμφαίνεται ἐν τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν :

$$\tau = \rho_0 + \overrightarrow{PM} = \rho_0 + u \cdot \overrightarrow{PN}, \quad \text{ἔνθα } u \text{ παράμετρος}$$

$$\text{Ἔε ἄλλου: } \rho = \rho_0 + \overrightarrow{PN}, \quad \text{ἔε ἥς } \overrightarrow{PN} = \rho - \rho_0.$$

Ὅθεν, $\tau = \rho_0 + u(\rho - \rho_0) = (1-u)\rho_0 + u\rho$, ἥτις εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας. Διὰ $u = \text{σταθ.}$ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς γενέτειρας.

4^η Κυλινδρική είναι μια επιφάνεια παραγομένη υπό μιᾶς εὐθείας L , τῇ ὁποῖα υι-
νείται παράλληλως πρὸς ἑαυτὴν κατὰ μήκος μιᾶς
υαμπύλης (γ) . Ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια εἶναι μιᾶ
εἰδικὴ περίπτωση τῶν εὐδαιομενῶν ἐπιφανειῶν,
ὅπου τὸ διάνυσμα $\vec{g}(u)$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἔστω
ἴσον πρὸς \vec{b} . Ἡ υαμπύλη (γ) καλεῖται ὁδὸς
τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας καὶ ἡ υινουμένη
εὐθεῖα γενέτειρα ταύτης. Ἐάν $\vec{r} = \vec{r}(u)$ εἶναι
ἡ εἰσῶσις τῆς υαμπύλης (γ) (βλ Σx. 4), τότε ἡ
διανυσματικὴ εἰσῶσις τῆς κυλινδρικῆς ἐπι-
φανείας θά εἶναι προφανῶς:

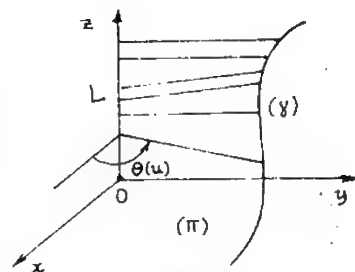


Σx. 4

$$\vec{r} = \vec{r}(u) + v \cdot \vec{b} \quad (1), \quad v: \text{παραμέτρος.}$$

Δι' ἀπαλειφῆς τῶν u, v ἔχομεν τὴν ἀναλυτικὴν εἰσῶσιν τῆς κυλινδρικῆς
ἐπιφάνειας. Διὰ $u = \text{σταδ.}$ λαμβάνομεν τὴν εἰσῶσιν τῆς γενέτειρας.

5^η Ὀρθή κωνοειδής καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη υπό εὐθειῶν παραλ-
λῶν πρὸς ἓνα ἐπίπεδον (Π) καὶ διερχομένων
διὰ μιᾶς εὐθείας L καθέτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον
 (Π) καὶ συναντῶσαι μία δοθεῖσαν υαμπύλην (γ)
υαρουμένη ὁδὸς. Ἡ εὐθεῖα L καλεῖται ἄξων
τῆς κωνοειδοῦς, αἱ δὲ εὐθεῖαι αἱ παράλληλοι πρὸς
τὸ (Π) γενέτειραι τῆς κωνοειδοῦς (βλ Σx. 5).



Σx. 5

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν L ὡς ἄξονα τῶν z καὶ
ὡς βασικὴν υαμπύλην πού συναντᾷ τὸ διάνυσμα

$\vec{g}(u)$ τὸν ἄξονα Oz . Ἐπομένως μιᾶ ὀρθῇ κωνοειδῇ ἐπιφάνεια θεωρεῖται ὡς μιᾶ
εἰδικὴ περ. πτῶσις τῶν εὐδαιομενῶν ἐπιφανειῶν.

Ἡ εἰσῶσις τῆς βασικῆς υαμπύλης, δηλ τοῦ ἄξονος Oz θά εἶναι $\vec{r} = u \cdot \vec{k}$, ἔνθα
 u παράμετρος. Ἐπειδὴ αἱ γενέτειραι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον oxy ,
ἓνα μοναδιαῖον διάνυσμα κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν γενετειρῶν δύναται νὰ θεω-
ρηθῇ ὡς συνάρτησις τοῦ u καὶ ἔπομένως γράφεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\vec{g}(u) = (\sin \theta(u)) \cdot \vec{i} + (\eta \mu \theta(u)) \cdot \vec{j}$$

όπου η γωνία $\theta(u)$ προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἐξίσωσης τῆς αμψύλης (γ).

Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (1) τῶν εὐδειογενῶν ἐπιφανειῶν θὰ ἔχαμεν:

$$\tau = \rho(u) + v \cdot g(u) = u \cdot k + v \left\{ (\sin \theta(u)) \cdot i + (\eta \mu \theta(u)) \cdot j \right\}$$

$$\eta \quad \tau = \{v \sin \theta(u)\} \cdot i + \{v \eta \mu \theta(u)\} \cdot j + u \cdot k.$$

§ 2. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις $u = u(t)$, $v = v(t)$ μὲ συνεχεῖς παραγώγους ὡρισμέ-
νης τάξεως καὶ τοιαῦται, ὥστε $u'(t) + v'(t) \neq 0$.

Αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις ὁρίζουν μίαν αμψύλην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας

$$\tau = \tau(u, v) \quad \text{τὴν} \quad \tau = \tau(u(t), v(t)) = \tau(t) \quad (1).$$

Ἐς θεωρήσωμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς αμψύλης, ἥτις ἔχει ἐξίσωσιν τὴν (1) διὰ τὴν τιμὴν t . Τὸ ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα ταύτης ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσης:

$$\tau'(t) = \tau_u \cdot \frac{du}{dt} + \tau_v \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

Τὸ δεξιὸν μέλος τῆς (2) εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, ἐπεὶ δὲ τὰ διανύσματα τ_u , τ_v εἶναι ἐφαπτόμενα εἰς τὰς συνεταγμένας αμψύλας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ θεωρηθέντος σημείου καὶ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα μεταξὺ των. Ἐντεῦθεν τὸ ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα $\tau'(t)$ κείται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν τ_u καὶ τ_v . Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὁρίζεται ὡς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον (u, v) .

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (2) ἐξάγεται καὶ ἡ κατωτέρω σπουδαία ιδιότης: Αἱ ἐφαπτόμεναι ὁρίων τῶν αμψύλων τῶν διερχομένων ἀπὸ ἑνὸς ὁμοιῶν σημείου ἐπιφανείας κείνται ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ταύτης.

Τὸ κάθετον διάνυσμα N τῆς ἐπιφανείας ὁρίζεται ὡς τὸ κάθετον διάνυσμα τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς. Τοῦτο δὲ προφανῶς δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$N = \frac{\tau_u \times \tau_v}{|\tau_u \times \tau_v|} = \frac{\tau_u \times \tau_v}{\sqrt{(\tau_u \times \tau_v)^2}} \quad (3)$$

$$\text{Εἶναι ὅμως: } \tau_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \tau_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

Συνεπῶς αἱ συνεταγμέναι προβοδαὶ τοῦ διανύσματος $\tau_u \times \tau_v$ εἶναι:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Όθεν, τα διευθύνοντα συνημίτονα του υαδέτου διανύσματος N είναι:

$$\cos(N, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \quad \cos(N, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \quad \cos(N, z) = \frac{\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \quad (4)$$

Εάν η επιφάνεια δίδεται υπό την μορφήν $z = f(x, y)$, τότε $\tau = x \cdot i + y \cdot j + f(x, y) \cdot k$.
Είναι δε:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ f'_y & 1 \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & 1 \\ f'_y & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\text{Ούτω:} \quad \cos(N, x) = \frac{-f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \quad \cos(N, y) = \frac{-f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \quad \cos(N, z) = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}} \quad (5)$$

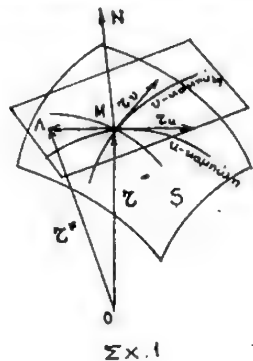
Εξίσωσις του εφαπτομένου επιπέδου.

Εστω η επιφάνεια $S: \tau = x(u, v) \cdot i + y(u, v) \cdot j + z(u, v) \cdot k$ καί τυχόνάαλόν σημείον $M(u, v)$ αὐτῆς καί τό εφαπτόμενον επίπεδον ταύτης εἰς τό M .

Εστω δέ $\tau^* = (X, Y, Z)$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου Λ τοῦ εφαπτομένου επιπέδου τῆς επιφανείας (βλ. Σχ. 1). Θά ἔχωμεν προφανῶς τὴν ἐξίσωσιν τούτου:

$$(\tau^* - \tau) \cdot N = 0 \quad (6) \quad \text{ἢ ἀναλυτικῶς:}$$

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & Y - y(u, v) & Z - z(u, v) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$



Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ εφαπτομένου επιπέδου θά εἶναι προφανῶς:

$$\tau^* = \tau + \lambda \cdot \tau_u + \mu \cdot \tau_v$$

ἐνθα λ, μ τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ

Εάν η Είσοδος της επιφάνειας είναι $z=f(x,y)$, τότε θεωρούμε τα x,y ως παραμέτρους αυτή γράφεται $\vec{r}=x \cdot \vec{i}+y \cdot \vec{j}+f(x,y) \cdot \vec{k}$.

Θά έχουμε τότε: $x_x=1, y_x=0, z_x=f'_x(x,y), x_y=0, y_y=1, z_y=f'_y(x,y)$

Αντιαδιστώντες εις την Είσοδον (7) του επιπέδου και αναπτύσσοντας την όριζουσαν

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{λαμβάνομεν:}$$

$$\boxed{Z-z = f'_x (X-x) + f'_y (Y-y)} \quad (8)$$

Η (8) είναι η Είσοδος του εφαπτομένου επιπέδου.

Εάν δέ η Είσοδος της επιφάνειας δίδεται υπό την μορφήν $F(x,y,z)=0$, τότε ορίζεται τό z ως πεπλεγμένη συνάρτησις των x και y και δύναμεθα να γράψωμεν:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Αντιαδιστώντες εις την Είσοδον (8) τα f'_x, f'_y υπό των εκφράσεων των $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ λαμβάνομεν τελικώς:

$$\boxed{(X-x) F'_x + (Y-y) F'_y + (Z-z) F'_z = 0} \quad (9)$$

Η (9) είναι η Είσοδος του εφαπτομένου επιπέδου, όταν η επιφάνεια δίδεται υπό της Είσοδσεως $F(x,y,z)=0$.

Παραδείγματα 1^{ης} Νά εύρεθῇ ἡ διανυσματικὴ Είσοδος τοῦ εφαπτομένου επιπέδου μιᾶς εὐδαιρομένου επιφάνειας.

Λύσις: Ἡ διανυσματικὴ Είσοδος μιᾶς εὐδαιρομένου επιφάνειας είναι:

$$\vec{r}(u,v) = \rho(u) + v \cdot \vec{q}(u) \quad (1)$$

$$\text{Εἶναι δέ, } \vec{r}_u = \frac{d\rho(u)}{du} + v \cdot \frac{d\vec{q}(u)}{du} \quad \text{καὶ } \vec{r}_v = \vec{q}(u)$$

Ὅθεν, ἡ διανυσματικὴ Είσοδος τοῦ εφαπτομένου επιπέδου είναι:

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \lambda \vec{r}_u + \mu \vec{r}_v = \rho(u) + v \cdot \vec{q}(u) + \lambda \{ \rho'_u + v \cdot \vec{q}'_u \} + \mu \cdot \vec{q}(u).$$

28/ Η ά ευρεθή η Είσωσις του Εφαπτομένου επιπέδου καθώς και το υάθετον διά-
 νυσμα τής επιφανείας, η όποία έχει Είσωσιν: $\tau(u,v) = u \cdot i + v \cdot j + (u^2 - v^2) \cdot k$ εις τό ση-
 μείον $u=1, v=1$

Λύσις: Έχομεν: $\tau(1,1) = i + j$, $\tau_u = i + 2u \cdot k$, $\tau_v = j - 2v \cdot k$ και $\tau_u(1,1) = i + 2k$,
 $\tau_v(1,1) = j - 2k$.

Η Είσωσις του Εφαπτομένου επιπέδου είναι:

$$\tau^* = \tau(1,1) + \lambda \cdot \tau_u(1,1) + \mu \cdot \tau_v(1,1) = (1+\lambda)i + (1+\mu) \cdot j + 2(\lambda-\mu) \cdot k.$$

Τό υάθετον διάνυσμα τής επιφανείας είναι:

$$N = \frac{\tau_u(1,1) \times \tau_v(1,1)}{|\tau_u(1,1) \times \tau_v(1,1)|} = \frac{1}{3} (-2i + 2j + k).$$

Η δέ Είσωσις τής υάθετου είναι:

$$\tau^* = \tau(1,1) + \lambda \cdot N(1,1) = (1 - \frac{2}{3}\lambda)i + (1 + \frac{2}{3}\lambda) \cdot j + \frac{1}{3}\lambda \cdot k.$$

η θέτοντες $\frac{1}{3}\lambda = t$ έχομεν:

$$\tau^*(t) = (1-2t) \cdot i + (1+2t) \cdot j + t \cdot k.$$

§ 3. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ - ΠΡΩΤΗ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ - ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.

Έστω η επιφάνεια $\tau = \tau(u,v)$ και $\tau(t) = \tau(u(t), v(t))$ μία καμπύλη εν' αυτής.
 Ως γνωστόν, (βλ. Κεφ. IX, 261) διά τό τόξον αυτής έχομεν:

$$d\ell^2 = |d\tau(t)|^2 = d\tau \cdot d\tau \quad (1)$$

Είναι όμως: $d\tau = \tau_u \cdot du + \tau_v \cdot dv \quad (2)$

Η (1) λόγω τής (2), γράφεται:

$$d\ell^2 = (\tau_u du + \tau_v dv)^2 = \tau_u^2 du^2 + 2\tau_u \cdot \tau_v du dv + \tau_v^2 dv^2 \quad (3)$$

Θέτοντες

$$\begin{aligned} E &= \tau_u^2 = \tau_u \cdot \tau_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= \tau_u \tau_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= \tau_v^2 = \tau_v \cdot \tau_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned} \quad (4)$$

τότε ή (3) γίνεται λόγω των (4):

$$d\ell^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (5)$$

Η άμορενής ως προς du, dv τετραγωνική μορφή του 2° μέλους του τύπου (5) υαλείται πρώτη δεμελιώσης τετραγωνική μορφή ή γραμμικόν στοιχείον της επιφανείας και συμβολίζεται με τον ρωμαϊκόν αριθμόν 1.

Η τετραγωνική μορφή (1) είναι πάντοτε δεγική. Πράγματι ή διαυρίνουσα του άνωτέρω τριωνύμου είναι:

$F^2 - E \cdot G = (\tau_u \cdot \tau_v)^2 - \tau_u^2 \cdot \tau_v^2 = -|\tau_u \times \tau_v|^2 < 0$, διότι τό $\tau_u \times \tau_v \neq 0$ ιαδότι τό θεωρηθέν σημείον της επιφανείας έχει ύποτεθ ήμαλόν.

Εάν ζητούμεν νά ύπολογίσωμεν τό μήκος τόξου της γραμμής $u=u(t), v=v(t)$ άπό τό σημείον $M(t_0)$ μέχρι τό σημείον $M(t)$, τότε άπό τόν τύπον (5) λαμβάνομεν:

$$\ell = \int_{t_0}^t \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} dt \quad (6)$$

Τά δέ τά μήκη των συντεταγμένων ιαμπύλων εύόλως εύρίσχομεν ότι είναι:

$$\ell = \int_{u_0}^u \sqrt{E} du, \quad \ell = \int_{v_0}^v \sqrt{G} dv \quad (7)$$

Τά μερέθη E, F, G όπως ώρίσθησαν ύπό των τύπων (4) υαλσύνται δεμελιώση ποσά πρώτης τάξεως.

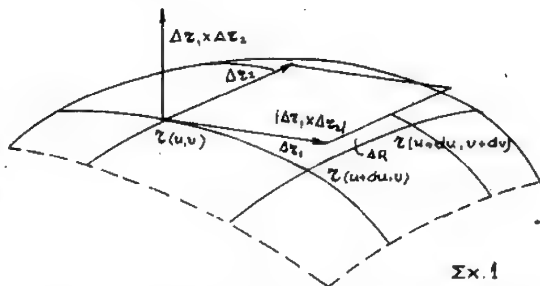
λαμβάνοντες ύπόψιν τούς τύπους (4) ιαδώς ιαι τόν τύπον:

$$|\tau_u \times \tau_v|^2 = |\tau_u|^2 \cdot |\tau_v|^2 - (\tau_u \cdot \tau_v)^2, \text{ θά έχωμεν:}$$

$$|\tau_u \times \tau_v| = \sqrt{E \cdot G - F^2} \quad (8)$$

Άς ύποθέσωμεν ήδη ότι ΔR είναι ένα στοιχειώδες χωρίον επί της επιφανείας φρασσόμενον ύπό των u - γραμμων, ήτοι των u ιαι $u+du$ ιαι των v - γραμμων, ήτοι των v ιαι $v+dv$.

(βλ. Σχ. 1). Κατά μίαν πρώτην προσέγγισιν τό χωρίον τούτο δύναται νά θεωρηθ ή ως



ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές είναι τα διανύσματα $\Delta \tau_1 = \tau_u du$, $\Delta \tau_2 = \tau_v dv$. Υποθέτοντες $du > 0$, $dv > 0$ το έμβαδόν ΔS του ανωτέρω παραλληλόγραμμου, το οποίον υαλοούμεν και έμβαδίουόν στοιχείον της έπιφανείας θα είναι:

$$\Delta S = |\Delta \tau_1 \times \Delta \tau_2| = |\tau_u \times \tau_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (9)$$

Ούτω το έμβαδόν S το όριζόμενον υπό του χωρίου R επί της έπιφανείας $\tau = \tau(u, v)$ είναι το διπλούν όδιουλήρωμα:

$$\text{έμβ. } S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (10) \quad \text{όπου } D \text{ είναι το χωρίον μεταβολής των } u, v:$$

• Είναι αξιοσημείωτον ότι ή γωνία δύο καμπύλων διερχομένων από ένα όμαλόν σημείον μιās έπιφανείας δύναται νά υπολογισθῇ συναρτήσσει των συντελεστών E, F, G τής πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής I . Πράγματι:

Θεωρούμεν δύο καμπύλας τής έπιφανείας, οι όποιαι όρίζονται υπό των έξισώσεων:

$$u = u_1(t), v = v_1(t) \text{ και } u = u_2(\tau), v = v_2(\tau)$$

τοιαύται ώστε, $u_1(0) = u_2(0)$, $v_1(0) = v_2(0)$.

Τα έφαπτόμενα διανύσματα τούτων όρίζονται υπό των τύπων:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau}{dt} &= \tau_u \cdot \frac{du_1}{dt} + \tau_v \cdot \frac{dv_1}{dt} = \tau_t \\ \frac{d\tau}{d\tau} &= \tau_u \cdot \frac{du_2}{d\tau} + \tau_v \cdot \frac{dv_2}{d\tau} = \tau_\tau \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Έντεϋθεν, ή γωνία τούτων θα είναι:

$$\text{συν}\phi = \frac{\tau_t \cdot \tau_\tau}{\sqrt{(\tau_t)^2} \cdot \sqrt{(\tau_\tau)^2}} \quad (12) \quad \text{ή}$$

$$\text{συν } \phi = \frac{E \frac{du_1}{dt} \cdot \frac{du_2}{d\tau} + F \left(\frac{du_1}{dt} \cdot \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} \cdot \frac{du_2}{dt} \right) + G \frac{dv_1}{dt} \cdot \frac{dv_2}{d\tau}}{\sqrt{E \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du_1}{dt} \cdot \frac{du_2}{d\tau} + G \left(\frac{du_1}{d\tau} \right)^2} \cdot \sqrt{E \left(\frac{du_2}{d\tau} \right)^2 + 2F \frac{du_2}{d\tau} \cdot \frac{du_1}{dt} + G \left(\frac{du_2}{dt} \right)^2}} \quad (13)$$

Έκ τού τύπου (13) προϋπτει ότι, ίνα τέμνωνται καθέτως οι δύο παραμετρηαί γραμμαι της έπιφανείας άρκει νά έχωμεν:

$$E du_1 du_2 + F (du_1 du_2 + du_2 du_1) + G dv_1 dv_2 = 0. \quad (14)$$

προφανώς έυ του άνωτέρω τύπου οι συντελεστές E, F, G είναι ίσανοί διά τόν προσδιορισμόν τής γωνίας τών ταμπύλων. Είς τήν περίπτωσην που λαμβάνομεν τās συντεταρμένες γραμμās τής επιφανείας $u = \text{σταθ}, v = \text{σταθ}$, τότε τὰ έφαπτομενιά διανύσματα είς τό σημείον τής τομής δύο συντεταρμένων γραμμών θά είναι τ_u, τ_v καί ούτω ή γωνία αὐτάν είναι:

$$\cos \phi = \frac{\tau_u \cdot \tau_v}{|\tau_u| \cdot |\tau_v|} = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}} \quad (15)$$

Έυ του τύπου (15) έπεται ότι: αί συντεταρμένες γραμμάί μιάς επιφανείας τέμνονται καθέτως (όρθογώνιον δίπτυον) έάν, καί μόνον έάν, $F \equiv 0$, δι' όλα τὰ σημεία τής επιφανείας

Λαμβάνοντες υπόψιν τον τύπον (8) καί έπειδή είναι $|\tau_u \times \tau_v| = |\tau_u| \cdot |\tau_v| \sin \phi$, θά έχομεν τελικώς:

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{E \cdot G - F^2}}{\sqrt{E \cdot G}} \quad (16)$$

Παραδείγματα 18/ Η ά εύρεση ή πρώτη θεμελιώσης τετραγωνική μορφή τής επιφανείας τής σφαίρας καθώς καί τό έμβαδόν στοιχείον αὐτής.

Λύσις: Ός γνωστόν αί παραμετρικά έίσιώσεις τής επιφανείας τής σφαίρας άκτινος R είς σφαιρικός συντεταρμένες είναι:

$$x = R \sin \theta \cos \phi, y = R \sin \theta \sin \phi, z = R \cos \theta, \text{ όπου}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < \pi \quad (\text{βλ. Σχ.1})$$

Η διανυσματική έίσιώσις αὐτής είναι:

$$\tau = R \sin \theta \cos \phi \cdot i + R \sin \theta \sin \phi \cdot j + R \cos \theta \cdot k; \text{ όπου αί παράμετροι είναι αί } \theta \text{ καί } \phi$$

$$\text{Είναι: } \tau_\theta = -R \sin \theta \sin \phi \cdot i + R \sin \theta \cos \phi \cdot j + 0 \cdot k$$

$$\tau_\phi = +R \cos \theta \sin \phi \cdot i + R \cos \theta \cos \phi \cdot j - R \sin \theta \cdot k$$

καί

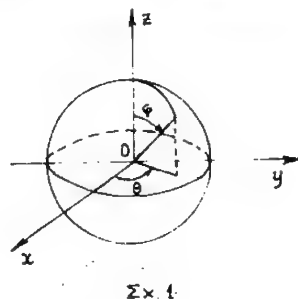
$$E = \tau_\theta^2 = (-R \sin \theta \sin \phi \cdot i + R \sin \theta \cos \phi \cdot j + 0 \cdot k)^2 = R^2 \sin^2 \phi$$

$$F = \tau_\theta \cdot \tau_\phi = 0$$

$$G = \tau_\phi^2 = (R \cos \theta \sin \phi \cdot i + R \cos \theta \cos \phi \cdot j - R \sin \theta \cdot k)^2 = R^2$$

$$\text{Όθεν, } I = d\ell^2 = R^2 \sin^2 \phi d\theta^2 + R^2 d\phi^2$$

Αί συντεταρμένες γραμμάί τέμνονται όρθογώνως διότι $F \equiv 0$



Το εμβαδίου στοιχείον είναι $\Delta S = \sqrt{EG-F^2} du dv$ ή

$$\Delta S = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi - 0} d\theta d\varphi = R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

25/ Νά εύρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή τῆς ἐπιφάνειας ἑνὸς κυλίνδρου καλίνδρου καθὼς καὶ τὸ εμβαδίου στοιχείον αὐτῆς

Λύσις: Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις ἑνὸς κυλίνδρου καλίνδρου (βλ. Σχ. 2) εἶναι:

$$z = R \sin u \cdot i + R \cos u \cdot j + v \cdot k.$$

$$\text{Εἶναι } \tau_u = -R \sin u \cdot i + R \cos u \cdot j + 0 \cdot k, \quad \tau_v = 0 \cdot i + 0 \cdot j + k$$

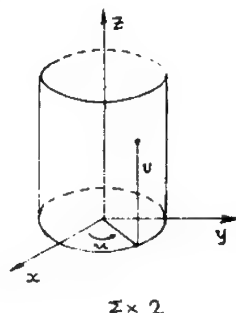
$$\text{καὶ } E = \tau_u^2 = R^2, \quad F = \tau_u \cdot \tau_v = 0, \quad G = \tau_v^2 = 1.$$

Ἡ πρώτη λοιπὸν θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφή εἶναι:

$$I = d\ell^2 = R^2 du^2 + dv^2$$

Ἐπειδὴ $F \equiv 0$ αἱ συντεταγμένα γραμμὰ τέμνονται καθέτως. Τὸ εμβαδίου στοιχείον τῆς ἐπιφάνειας εἶναι:

$$\Delta S = \sqrt{EG-F^2} du dv \quad \text{ἢ} \quad \Delta S = \sqrt{R^2 \cdot 1 - 0} du dv = R du dv.$$



35/ Νά εύρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφή τῆς ἐπιφάνειας μὲ ἐξίσωσιν $z = f(x, y)$.

Λύσις: θεωροῦμεν τὰ x, y ὡς παραμέτρους, ὅτε ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφάνειας γράφεται: $z = x \cdot i + y \cdot j + f(x, y) \cdot k$.

$$\text{Εἶναι: } \tau_x = i + f'_x \cdot k, \quad \tau_y = j + f'_y \cdot k.$$

$$\text{καὶ } E = \tau_x^2 = (i + f'_x \cdot k)^2 = 1 + f_x'^2, \quad F = \tau_x \cdot \tau_y = (i + f'_x \cdot k) \cdot (j + f'_y \cdot k) = f'_x \cdot f'_y$$

$$\text{καὶ } G = \tau_y^2 = (j + f'_y \cdot k)^2 = 1 + f_y'^2.$$

$$\text{Ὅθεν, } I = d\ell^2 = (1 + f_x'^2) dx^2 + 2 \cdot f'_x \cdot f'_y dx dy + (1 + f_y'^2) dy^2.$$

48/ Νά εύρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνικὴ μορφή τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τ_0 καὶ παραλλήλου πρὸς τὰ μοναδιαῖα διανύσματα a καὶ b (δηλ. $|a| = |b| = 1$)

Λύσις: Ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ θεωρηθέντος ἐπιπέδου θὰ εἶναι: $\tau = \tau_0 + u \cdot a + v \cdot b$, ὅπου u, v παράμετροι. Εἶναι $\tau_u = a$, $\tau_v = b$ καὶ $E = \tau_u^2 = a \cdot a = a^2 = |a|^2 = 1$, $F = \tau_u \cdot \tau_v = a \cdot b = |a| \cdot |b| \sin \omega = \sin \omega$ καὶ $G = \tau_v^2 = b \cdot b = |b|^2 = 1$

ὅθεν, ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή είναι:

$$I = d\ell^2 = du^2 + 2 \sin\omega du dv + dv^2.$$

Ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας είναι:

$$\sin\phi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{1-1}} = \sin\omega.$$

Τό δίπτυον τῶν συντεταγμένων γραμμῶν είναι ὀρθογώνιον, ἐάν $\sin\omega=0$ ἢ $\omega = \frac{\pi}{2}$, ὁπλ. τὰ διανύσματα a καί b είναι κάθετα μεταξύ των.

5^α/ Νά εὐρεθῇ ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή τῆς ἐπιφανείας ἐν περι-
στροφῇ περὶ τοῦ ἄξονος oz , τῆς ὁποίας ἡ εἰσώσις είναι $\tau = \rho \sin\theta \cdot i + \rho \eta \theta \cdot j + f(\rho) \cdot k$,
ἐνθα $f(\rho)$ μία παραγωγίσιμος συνάρτησις τοῦ ρ .

Λύσις: Είναι $\tau_\rho = \sin\theta \cdot i + \eta \mu\theta \cdot j + f'(\rho) \cdot k$, $\tau_\theta = -\rho \eta \mu\theta \cdot i + \rho \sin\theta \cdot j + 0 \cdot k$.

καί $E = \tau_\rho^2 = 1 + f'^2(\rho)$, $G = \rho^2$, $F = 0$

ὅθεν, $I = d\ell^2 = (1+f'^2(\rho)) d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$.

§ 4. ΔΕΥΤΕΡΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Ι. Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια $\tau = \tau(u, v)$ καί $\tau(\ell) = \tau(u(\ell), v(\ell))$ ἡ διανυσματική εἰσώ-
σις μιᾶς καμπύλης ἐπ' αὐτῆς, ὅπου ℓ είναι τό προσημασμένον μήκος τοῦ τόξου
τῆς καμπύλης.

Ἐστω k ἡ καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον M ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν
τιμήν ℓ τοῦ τόξου. Συμφώνως πρὸς τόν τύπον τοῦ Frenet ὁ ἔχωμεν:

$$\frac{d\tau}{d\ell} = \frac{d^2\tau}{d\ell^2} = k \cdot \nu \quad (1) \quad \text{ἢ}$$

$$k \cdot \nu = \frac{d}{d\ell} \left(\frac{d\tau}{d\ell} \right) = \frac{d}{d\ell} (\tau_u \dot{u} + \tau_v \dot{v}) \quad \text{ἢ}$$

$$k \cdot \nu = (\tau_{uu} \dot{u} + \tau_{uv} \dot{v}) \dot{u} + \tau_u \ddot{u} + (\tau_{vu} \dot{u} + \tau_{vv} \dot{v}) \dot{v} + \tau_v \ddot{v} \quad \text{ἢ}$$

$$k \cdot \nu = \tau_{uu} \dot{u}^2 + 2 \tau_{uv} \dot{u} \cdot \dot{v} + \tau_{vv} \dot{v}^2 + \tau_u \ddot{u} + \tau_v \ddot{v} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἑσωτερικῶς τὴν ἰσότητα (2) ἐπὶ $N = \frac{\tau_u \times \tau_v}{|\tau_u \times \tau_v|}$, ὁπλ. ἐπὶ τό κα-
ρδιαῖον κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας λαμβάνομεν:

$$k \cdot (v \cdot N) = (\tau_{uu} \cdot N) \cdot \dot{u}^2 + 2 (\tau_{uv} \cdot N) \dot{u} \dot{v} + (\tau_{vv} \cdot N) \dot{v}^2 + (\tau_u \cdot N) \ddot{u} + (\tau_v \cdot N) \ddot{v} \quad (3)$$

Είναι $\tau_u \cdot N = 0$ και $\tau_v \cdot N = 0$ (4). Διά παραγώγισης αὐτῶν τῶν δύο τελευταίων ἰσοτήτων ὡς πρὸς u καὶ v λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uu} \cdot N + \tau_u \cdot N_u &= 0, \quad \tau_{uv} \cdot N + \tau_u \cdot N_v = 0 \\ \tau_{vu} \cdot N + \tau_v \cdot N_u &= 0, \quad \tau_{vv} \cdot N + \tau_v \cdot N_v = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (5) λαμβάνομεν τὰς ἰσότητες:

$$\tau_{uu} \cdot N = -\tau_u \cdot N_u, \quad \tau_{uv} \cdot N = -\tau_v \cdot N_u, \quad \tau_{vu} \cdot N = -\frac{1}{2} (\tau_u \cdot N_v + \tau_v \cdot N_u) \quad (6)$$

Ἡδὴ ὡς θέσωμεν:

$$\left. \begin{aligned} L &= \tau_{uu} \cdot N = -\tau_u \cdot N_u \\ M &= \tau_{uv} \cdot N = -\frac{1}{2} (\tau_u \cdot N_v + \tau_v \cdot N_u) \\ N &= \tau_{vv} \cdot N = -\tau_v \cdot N_v \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ἡ ἰσότης (3), λόγῳ τῶν (4) καὶ (7), γίνεταί:

$$k(v \cdot N) = L \left(\frac{du}{d\ell} \right)^2 + 2M \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{dv}{d\ell} + N \left(\frac{dv}{d\ell} \right)^2 = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{d\ell^2} \quad \eta$$

$$k(v \cdot N) = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \quad (8)$$

Ἡ ποσότης $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$ καλεῖται *δευτέρα δεμελιώδης τετραγωνική μορφή* καὶ συμβολίζεται μὲ τὸν λατινικὸν ἀριθμὸν Π , τὰ δὲ L, M, N καλοῦνται *δεμελιώδη ποσά δευτέρας τάξεως*.

Ὡς ὑπολογίσωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τύπων (7) τὸ μινόμενον $-dN \cdot d\tau$. Ἐχομεν: $-dN \cdot d\tau = -(N_u du + N_v dv) \cdot (\tau_u du + \tau_v dv) = -N_u \tau_u du^2 - (N_u \tau_v + N_v \tau_u) du dv - N_v \tau_v dv^2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$.

$$\text{Ὅθεν,} \quad \boxed{L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = -dN \cdot d\tau} \quad (9)$$

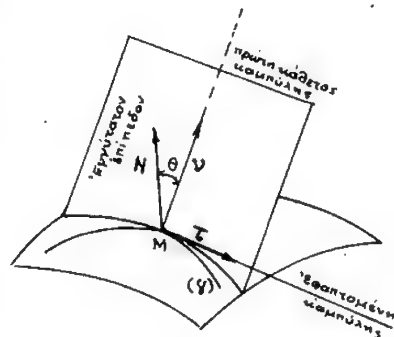
1) Δὲν πρέπει νὰ γίνεταί σύγκρισις τῆς ποσότητος N μετὰ τοῦ κατέτου διανύσματος N ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Εάν θ είναι η γωνία μεταξύ της υάδετος της επιφανείας και της πρώτης υάδετος της υαμπύλης (γ) (βλ. Σχ.1) και εάν θέσω-
 μεν $k_n = k \cdot (\nu \cdot N) = k \cos \theta$, (10) τόν αριθμόν k_n
 καλούμεν υάδετον υαμπυλότητα της θεωρη-
 θείσης υαμπύλης εις τό σημείον Μ. Ὁ τύπος (8)
 γράφεται:

$$k_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{II}{I} \quad (11)$$

Διά τήν θεωρηθείσαν υαμπύλην (γ) ἐπὶ τῆς
 ἐπιφανείας δηλ. τήν $\tau = \tau(u(\ell), v(\ell))$ ὁ λόγος
 (11) γράφεται καὶ οὕτω:

$$k_n = \frac{L \left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2M \cdot \left(\frac{du}{d\ell}\right) \cdot \left(\frac{dv}{d\ell}\right) + N \left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2}{E \left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2F \cdot \left(\frac{du}{d\ell}\right) \cdot \left(\frac{dv}{d\ell}\right) + G \left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2}$$



Σχ. 1

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ υάδετος υαμπυλότης k_n ὡς συνάρτησις τῶν $\frac{du}{d\ell}$ καὶ $\frac{dv}{d\ell}$
ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸν λόγον $\left(\frac{du}{d\ell}\right) : \left(\frac{dv}{d\ell}\right)$ δηλ. ἀπὸ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐφαπτο-
μένης τῆς (γ) εἰς τό σημείον Μ. Ἐπὶ πλεόν θεωρουμένη ἡ k_n ὡς συνάρτησις
τῶν πρώτων καὶ δευτέρων θεμελιωδῶν μερεθῶν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν δι-
 ὀν τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ ἡ μορφή I εἶναι πάντοτε θετικὴ, ἔπεται ἐκ τοῦ τύπου (11) ὅτι ἡ υάδετος υα-
 μπυλότης k_n εἶναι θετικὴ, ἀρνητικὴ ἢ μηδὲν ταυτοχρόνως μετὰ τῆς θεμελιώδους μορφῆς II.
 Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἔπεται ἡ κατωθί.

Πρότασις X-4-1. Πᾶσαι αἱ υαμπύλαι αἱ διερχόμεναι δι' ἐνός σημείου Μ μιᾶς
ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐφαπτόμεναι πρὸς μιάν υαμπύλην (γ) διερχομένην
διὰ τοῦ σημείου Μ ἔχουν τὴν αὐτὴν υάδετον υαμπυλότητα εἰς τό Μ.

Σχετικῶς ἰσχύει καὶ ἡ κατωθί:

Πρότασις X-4-2. Δύο υαμπύλαι μιᾶς ἐπιφανείας ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἐφαπτο-
μένην καὶ πρώτην υάδετον εἰς ἓνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας (συνεπῶς καὶ τό αὐ-
τό ἐγγύστατον ἐπίπεδον) ἔχουν τὴν αὐτὴν υαμπυλότητα εἰς αὐτό τό σημεῖον.

Απόδειξις: Ἐφ' ὅσον αἱ καμπύλαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ πρώτην καθετόν δὲ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐγγύστατον ἐπίπεδον καὶ ὥς ἐν τούτῳ ἡ γωνία $\theta = \angle(N, \nu)$ εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ἀμφοτέρας τὰς καμπύλας. Ἐπὶ πλέον $K_n = \frac{\Pi}{I}$ καὶ ἐφ' ὅσον ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, δηλ. τὸ αὐτὸ $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{dy}{dx})$ ἔπεται ὅτι ἡ καθετὸς καμπυλότης K_n εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ἀμφοτέρας τὰς καμπύλας κατὰ συνέπειαν δὲ καὶ ἡ καμπυλότης αὐτῶν $K = \frac{K_n}{\sin \theta}$ εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ἀμφοτέρας τὰς καμπύλας.

II. Ἐὰν μία τυχούσα καμπύλη (γ) μετὰ ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας διερχομένη δι' ἑνὸς σημείου M αὐτῆς, τὸ ἐπίπεδον τὸ περιέχον τὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν πρώτην καθετόν ταύτης εἰς τὸ M (ἐγγύστατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M) δὲ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν κατὰ μίαν ἐπίπεδον καμπύλην (γ_0) ἔχουσα τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν πρώτην καθετόν μετὰ τῆς (γ) . Οὕτω ἡ προηγουμένη πρότασις ἀνάγει τὴν διερευνῆσιν τῆς καμπυλότητος μιᾶς τυχούσης καμπύλης ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας εἰς ἓνα σημεῖον, εἰς τὴν μελέτην τῆς καμπυλότητος μιᾶς ἐπιπέδου τομῆς τῆς ἐπιφανείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ.

Καλοῦμεν καθετόν τομὴν μιᾶς ἐπιφανείας εἰς δοθέν σημεῖον M αὐτῆς τὴν τομὴν τῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῆς καθετοῦ τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον. Ὑπάρχει προφανῶς μία ἀπειρία καθετῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας εἰς δοθέν σημεῖον M αὐτῆς. Μία τομὴ εἰδιωῶς δύναται νὰ καθορισθῇ ἀποδίδοντες μίαν ὠρισμένην ἐφαπτομενικήν κατεύθυνσιν ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας, δηλ. ἐὰν καθορίσωμεν τὸν λόγον dy/dx . Ἡ πρώτη καθετὸς ν τῆς καθετοῦ τομῆς τῆς ἐπιφανείας δὲ εἶναι ἴση ἢ ἀντίθετος μετὰ τοῦ καθετοῦ διανύσματος N τῆς ἐπιφανείας καὶ ὥς ἐν τούτῳ ἡ γωνία θ τῆς πρώτης καθετοῦ τομῆς καὶ τοῦ διανύσματος N δὲ εἶναι 0 ἢ Π , ὅτε $\sin \theta = \pm 1$.

Καλοῦμεν παραγίαντομήν τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον M καθετομὴ τῆς ἐπιφανείας μετὰ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ M καὶ δὲν περιέχει τὴν καθετόν τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον M .

III. Ἐστω (γ) μία τυχούσα καμπύλη ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας διερχομένη διὰ τοῦ σημείου M αὐτῆς. Ἡ καθετοστομὴ ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν καμπύλην (γ) ὁρίζεται

ως η υάθετος τομή της επιφάνειας έχουν υοινην εφαπτομένην μετά της (γ) εις τό σημείον Μ.

*Εστω k ή αμπτυλότης της (γ) εις τό Μ και \hat{k} ή αμπτυλότης της αντίστοιχου υαδέτου τομής. Επειδή αι αμπτύλαι έχουν τήν αὐτήν εφαπτομένην έπεται ότι έχουν τό αὐτό dy/du και συμφώνως πρὸς τόν τύπον (1) δά έχουν τήν αὐτήν υάδε-
των αμπτυλότητα k_m . Συνεπώς θα έχωμεν $k_m = k \text{ συν } \theta = \hat{k} \text{ συν } \varphi$ (1), όπου θ είναι ή γωνία της πρώτης υαδέτου της αμπτύλης μετά του υαδέτου διανύσματος Μ της επιφάνειας και φ ή γωνία της πρώτης υαδέτου της υαδέτου τομής μετά του Μ. Είναι όμως $\varphi = 0$ ή π και ως έυ τούτου ή σχέσις (1) δίδει:

$$\pm \hat{k} = k \text{ συν } \theta \quad (2)$$

Έυ του άνωτέρω τύπου έπεται τό υάτωδι:

Θεώρημα X-4-1. (Meusnier). Μεταξύ της προσημασμένης αμπτυλότητας της υαδέ-
του τομής και της αμπτυλότητας μιās πλαρίας τομής ή γενιυώς μιās οίασσήποτε
επιφανειαυής αμπτύλης ή όποια έχει τήν αὐτήν εφαπτομένην μετά της υαδέτου
τομής υφίσταται ή σχέσις (2).

Έάν R και \hat{R} είναι αντίστοιχως αι άυτινες αμπτυλότητος της θεωρηθείσης α-
μπτύλης (γ) της επιφάνειας και της αντίστοιχου υαδέτου τομής, τότε έυ του τύπου(2)
λαμβάνομεν:

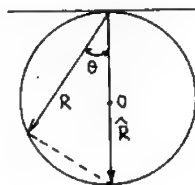
$$R = \pm \hat{R} \text{ συν } \theta \quad (3)$$

Έυ του τύπου (3) συνάρεται ότι: έΕ όλων των εις τι σημείον επιφάνειας πλαρίων
τομών, ή αμπτύλη ή αντίστοιχούσα εις τήν υάδετον τομήν
έχει τήν μεγαλυτέραν άυτίνα αμπτυλότητος.

Τό Σχήμα 2 μάς δίδει μιάν άπλήτην πρεμετριυήν υατασκευ-
ήν της άυτινος αμπτυλότητος τομής υλίσσεως θ ως πρὸς
τήν υάδετον επί τήν επιφάνειαν.

Έυ του τύπου (1) της υπό-δ III διά $\varphi = 0$ ή π λαμβάνομεν:

$k_m = \pm \hat{k}$ ήτοι. ή υάδετος αμπτυλότης ίσούται άπολύτως πρὸς τήν αμπτυλότητα

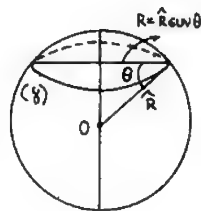


Σχ. 2

μιας ααθέτου τομής. Εἰς τὸ ἐξῆς θὰ συμφωνοῦμεν νὰ θέτωμεν τὸ σημεῖον (-) διὰ τὴν \hat{k} , ὅταν ἡ πρώτη αάθετος τῆς ααθέτου τομῆς εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὸ αάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας N . Δι' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον δά τὴν ααλοῦμεν αἰ προσημασμένη ααμπυλότητα (ἢ προσημασμένη αὐτὴν ααμπυλότητα) ααθέτου τομῆς. Παριστῶντες δὲ ὡς αἰ ἀνωτέρω ἐσημειώθη μὲ \hat{k} ἢ $\frac{1}{\hat{R}}$ τὴν προσημασμένη ααμπυλότητα τῆς ααθέτου τομῆς δά ἔχωμεν ὡς συνέπειαν τοῦ τύπου (11) τῆς ὑπόδ I ὅτι:

$$\hat{k} = \frac{1}{\hat{R}} = \frac{Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} \quad (4)$$

Εἰδιωῶς εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς σφαίρας μία αάθετος τομή εἶναι ἕνας μέγιστος κύβλος αἰ ἐὰν λάβωμεν ὡς ααμπύλην (γ) ἕναν κύβλον ἐπὶ τῆς σφαίρας, τότε ὁ τύπος (3) ἐφαρμοζόμενος εἰς αὐτὴν τὴν εἰδιωτὴν περίπτωσιν δίδει τὴν γνωστὴν σχέσηιν πού ὑφίσταται μεταξὺ τῶν αὐτίνων ἐνὸς μενίστου αἰ ἐνὸς μιτροῦ κύβλου τῆς σφαίρας (βλ. Σχ.3).



Σχ.3

Παραδείγματα: Θεωροῦμεν τὴν σφαῖραν αὐτὴν R μὲ ἐξίσωσιν:

$$z = (R \sin \theta \cos \varphi) \cdot i + (R \eta \theta \eta \mu \varphi) \cdot j + (R \cos \varphi) \cdot k, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Νά εὐρεθῇ ἡ ααμπυλότης μιᾶς ααθέτου τομῆς.

Λύσις: Ἐχομεν: $z_\theta = - (R \eta \theta \eta \mu \varphi) \cdot i + (R \sin \theta \eta \mu \varphi) \cdot j$

$$z_\varphi = (R \sin \theta \cos \varphi) \cdot i + (R \eta \theta \cos \varphi) \cdot j - (R \eta \mu \varphi) \cdot k$$

$$z_{\theta\theta} = - (R \sin \theta \eta \mu \varphi) \cdot i - (R \eta \theta \eta \mu \varphi) \cdot j$$

$$z_{\theta\varphi} = - (R \eta \theta \cos \varphi) \cdot i + (R \sin \theta \cos \varphi) \cdot j$$

$$z_{\varphi\varphi} = - (R \sin \theta \eta \mu \varphi) \cdot i - (R \eta \theta \eta \mu \varphi) \cdot j - (R \cos \varphi) \cdot k$$

$$\text{Εἶναι δέ, } E = z_\theta^2 = R^2 \eta \mu^2 \varphi, \quad F = z_\theta \cdot z_\varphi = 0, \quad G = z_\varphi^2 = R^2$$

$$\text{Τὸ δέ αάθετον διάνυσμα } N = \frac{z_\theta \times z_\varphi}{|z_\theta \times z_\varphi|} = - (\sin \theta \eta \mu \varphi) i - (\eta \theta \eta \mu \varphi) j - (\cos \varphi) k.$$

$$\text{Ὁμοίως, } L = z_{\theta\theta} \cdot N = R \eta \mu^2 \varphi, \quad M = z_{\theta\varphi} \cdot N = 0, \quad N = z_{\varphi\varphi} \cdot N = R.$$

$$\text{Ὅθεν, } k_n = \frac{L d\theta^2 + 2M d\theta d\varphi + N d\varphi^2}{E d\theta^2 + 2F d\theta d\varphi + G d\varphi^2} = \frac{R \eta \mu^2 \varphi d\theta^2 + R d\varphi^2}{R^2 \eta \mu^2 \varphi d\theta^2 + R^2 d\varphi^2} = \frac{1}{R}.$$

Ἐντεῦθεν $k_n = \text{σταθερά} = \frac{1}{R}$ εἰς κἀθε σημεῖον καὶ διὰ κἀθε κατευθύνειν. Αὐτό ἐπαληθεύει τὸ γνωστόν, ὅτι, κἀθε κἀθετος τομῇ σφαίρας εἰς κἀθε σημεῖον αὐτῆς εἶναι ἕνας μέριστος κύβητος μέ ἀκτῖνα ἴση πρὸς R .

§5. ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ-ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ-ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Ἐστω $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ μία ἐπιφάνεια S , M ἕνα σημεῖον κείμενον ἐπ' αὐτῆς καὶ P ἕνα σημεῖον κείμενον εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ M . Ἐστω δὲ $d = \overline{MP} \cdot \mathbf{N}$ τὸ μέτρον (σχετιυόν) τῆς προβολῆς τοῦ \overline{MP} ἐπὶ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{N} . Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἐν λόγω μέτρον d δα εἶναι θετικόν ἢ ἀρνητικόν ἐφαρτῶμενον ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφάνειας εἰς τὸ M καὶ ἐπὶ πλέον ἢ ἀπόλυτος τιμὴ $|d|$ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ P ἀπὸ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφάνειας εἰς τὸ M (βλ. Σχ. 1). Ἡδὴ ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ σημεῖα M καὶ P εἶναι τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφάνειας $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ τὰ ὅποια ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς (u, v) καὶ $(u+du, v+dv)$. Συμφώνως δὲ πρὸς τὸν τύπον τοῦ Taylor διὰ διανυσματικὰς συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν δα ἔχωμεν:

$$\mathbf{r}(u+du, v+dv) = \mathbf{r}(u, v) + d\mathbf{r}(u, v) + \frac{1}{2} d^2\mathbf{r}(u, v) + O(du^3 + dv^3)$$

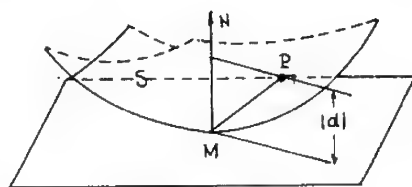
$$\begin{aligned} \text{Οὕτω, } d &= \overline{MP} \cdot \mathbf{N} = \left\{ \mathbf{r}(u+du, v+dv) - \mathbf{r}(u, v) \right\} \cdot \mathbf{N} \\ &= \left\{ d\mathbf{r}(u, v) + \frac{1}{2} d^2\mathbf{r}(u, v) + O(du^3 + dv^3) \right\} \cdot \mathbf{N} \\ &= d\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} + \frac{1}{2} d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} + O(du^3 + dv^3) \quad (1) \end{aligned}$$

Εἶναι ὁμῶς, $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = 0$ (2). Διαφορίζοντες τὴν ταύτην λαμβάνομεν $d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} + d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} = 0$, ἔξ ἧς $d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = -d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} = \Pi$. (3). Λόγῳ τῶν (2) καὶ (3) ἡ (1) γίνεται:

$$d = \frac{1}{2} \Pi + O(du^3 + dv^3) \quad (4).$$

$$\text{Ἡ συνάρτησις } \left[\rho = \frac{1}{2} (Lu^2 + 2Mu \cdot v + Nv^2) \right] \quad (5)$$

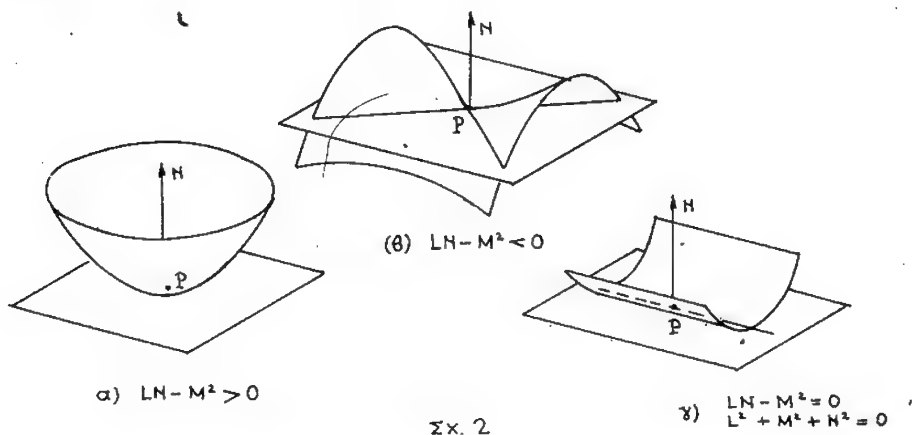
εἰς τὸν Εὐκλείδειον χώρον u, v, ρ παριστᾷ μίαν ἐπιφάνειαν δευτέρου βαθμοῦ - συντεταγμέναι εἶναι αἱ u, v, ρ - ἡ ὅποια καλεῖται ἐγγύστατον παραβολοειδές τῆς ἐπιφάνειας.



Σχ. 1

Ἡ μορφή αὐτοῦ τοῦ παραβολοειδoῦς προσδιορίζει εἰς ἓνα ἰσονοποιητικὸν βαθμὸν τὴν μορφήν τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου M . Αὐτὸ τὸ παραβολοειδές μᾶς ὁδηρεῖ εἰς τὸ νὰ διαυρίνωμεν τέσσαρας περιπτώσεις ἐξαρτωμένas ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς διαμερινούσης $LN - M^2$ τῆς δευτέρας θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς.

α) Περίπτωσης ἐλλειπτικῶν σημείων: ($LN - M^2 > 0$). Ἐνα σημεῖον τὸ ὁποῖον ἰσονοποιεῖ τὴν σχέσιν $LN - M^2 > 0$ καλεῖται ἐλλειπτικόν. Τὸ ἐγγύτατον παραβολοειδές εἶναι ἓνα ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές (βλ. Σχ. 2(α)). Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις ρ διατηρεῖ πρόσημον δι' ὅλα τὰ (u, v) . Εἰς τὴν περιοχὴν ἐνὸς ἐλλειπτικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια κεῖται πρὸς τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς αὐτὸ τὸ σημεῖον καὶ συμμετρισμένως, ἐὰν $\Pi > 0$ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ N , ἐὰν δὲ $\Pi < 0$ κεῖται πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ N καὶ ἐπὶ πλέον τὸ σχῆμα τῆς ἐπιφανείας "ὁμοιάζει, εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ M μετὰ τοῦ ἐλλειπτικοῦ παραβολοειδoῦς. Τοιαῦτα ἐπιφανειακὰ ἢ σφαῖρα, τὸ ἐλλειψοειδές, τὸ ἐλλειπτικὸν παραβολοειδές, τὸ δίκωνον, ὑπερβολοειδές.



β) Περίπτωσης ὑπερβολικῶν σημείων: ($LN - M^2 < 0$). Ἐνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καλεῖται ὑπερβολικόν, ἐὰν $LN - M^2 < 0$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ συνάρτησις ρ ὡς ἀνάρτησις τῶν u, v εἰς τὸν χώρον παριστᾷ ἓνα ὑπερβολικὸν παραβολοειδές (βλ. Σχ. 2(β)).

Ἐδῶ ὑπάρχουν δύο διαμευριμέναι γραμμαί ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου διερχόμεναι ἀπὸ τοῦ σημείου M καὶ αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς τέσσαρα τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ρ ἐναλλάσσει πρόσημον (ἀπὸ θετικὴ ἀρνητικὴ καὶ ἀντιστρόφως). Ἐπὶ τῶν δύο γραμμῶν αὐτῶν θὰ εἶναι $\rho=0$, ὡς δὲ $L\left(\frac{y}{y}\right)^2 + 2M\left(\frac{y}{y}\right) + N=0$. Εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς ὑπερβολικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια κεῖται ἀμφιπεδύρως τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου, ὡς δεικνύεται καὶ εἰς τὸ Σχῆμα 2(β) καὶ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ἑλλειπτικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ποιοτικὸν χαρακτῆρα μὲ ὑπερβολικὸν παραβολοειδές. Παραδείγματα ἐπιφανειῶν ποὺ ὅλα τοὺς τὰ σημεία εἶναι ὑπερβολικὰ εἶναι τὸ ὑπερβολικὸν παραβολοειδές καὶ τὸ μονόκωνο ὑπερβολοειδές.

γ) Περίπτωσης Παραβολικῶν σημείων ($LN-M^2=0$). Ἐνα σημεῖον κελεῖται παραβολικόν, ἐὰν ἐπαληθεύη τὰς σχέσεις $LN-M^2=0$, $L^2+M^2+N^2\neq 0$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ ρ ὡς συνάρτησις τῶν u, v παριστᾷ ἕνα παραβολικὸν κῶλυδρον, ὡς δεικνύει τὸ Σχῆμα 2(γ). Ἐδῶ ὑπάρχει μία εὐθεῖα γραμμὴ κεκλιμένη ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου διερχομένη διὰ τοῦ σημείου M κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας ἡ $\rho=0$, διὰ τὰ ἄλλα σημεία τῆς περιοχῆς τοῦ M ἡ ρ διατηρεῖ πρόσημον. Ὁ κῶλυδρος ὁλόκληρος κεῖται πρὸς τὸ ἓνα μέρος ὡς πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Ἡ δὲ ἐπιφάνεια συμπεριφέρεται ἀναλόγως. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι, εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς παραβολικοῦ σημείου ἡ ἐπιφάνεια δύναται νὰ κεῖται ἐματέρωθεν τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου. Εἶναι ἡ περίπτωσις ὅπου ὁ παραβολικὸς κῶλυδρος ἐκφυλίζεται εἰς ἐπίπεδον, βλ. σχετικῶς δ) περίπτωσιν. Παραδείγματα ἐπιφανειῶν ποὺ ἔχουν ὅλα τὰ σημεία παραβολικὰ εἶναι οἱ κῶλυδραι, κῶνοι καὶ γενικῶς οἱ εὐδειογενεῖς ἐπιφάνειαι.

δ) Περίπτωσης ἐπιπέδου $L=M=N=0$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ ἐγγύτατον παραβολοειδές ἐκφυλίζεται εἰς ἐπίπεδον. Ἐδῶ δὲ ὅλα τὰ u, v ἔχομεν $\rho=0$. Ἐδῶ, ὡς λέγαμεν ἔχομεν μίαν ἐπαφὴν τῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ἀνωτέρας τάξεως, σχετικῶς περὶ ἐπαφῆς δύο ἐπιφανειῶν βλ. ἐπε ἀσ. 58, σελίς 360.

Παράδειγμα: θεωροῦμεν τὴν σπειροειδῆ ἐπιφάνειαν (τύπου σαρπρέλλας)¹⁾ (βλ. Σχ. 3) μετ' ἐξίσωσιν: $x=(\beta+\alpha\eta\mu\phi)\cdot i + (\beta+\alpha\eta\mu\phi)\cdot j + (\alpha\sigma\eta\mu\phi)\cdot k$, $\beta>\alpha>0$.

1). Αὕτη παράγεται διὰ περιστροφῆς περιφερείας περὶ ἑνὸς ἄξονος κεκλιμένου εἰς τὸ ἐπίπεδόν της καὶ μὴ τέμνουσα ταύτην.

Νά εύρεθούν τὰ ἑλλειπτικὰ, ὑπερβολικὰ καὶ παραβολικὰ σημεῖα ταύτης.

Λύσις: Εἶναι $\tau_{\theta\theta} = -(\beta + a\eta\mu\phi)(\sigma\upsilon\nu\theta) \{ -(\beta + a\eta\mu\phi)(\eta\mu\theta) \}$

$$\tau_{\theta\phi} = -(\alpha\sigma\upsilon\nu\phi\eta\mu\theta) \cdot i + (\alpha\sigma\upsilon\nu\phi\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot j$$

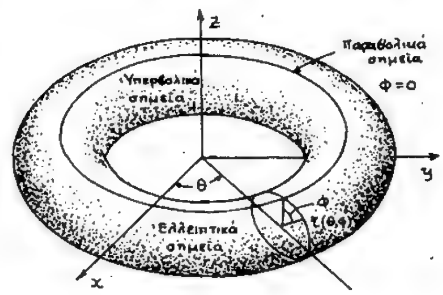
$$\tau_{\phi\phi} = -(\alpha\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot i - (\alpha\eta\mu\phi\eta\mu\theta) \cdot j - (\alpha\sigma\upsilon\nu\phi) \cdot k$$

καὶ $N = (-\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi) \cdot i - (\eta\mu\theta\eta\mu\phi) \cdot j - (\sigma\upsilon\nu\phi) \cdot k.$

Ὅθεν, $L = \tau_{\theta\theta} \cdot N = (\beta + a\eta\mu\phi)\eta\mu\phi$, $M = \tau_{\theta\phi} \cdot N = 0$, $N = \tau_{\phi\phi} \cdot N = \alpha$

καὶ $LN - M^2 = \alpha(\beta + a\eta\mu\phi)\eta\mu\phi.$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ δεμελιώδη ποσὰ τῆς δευτέρας τάξεως ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ ϕ . Ταῦτα δὲ εἶναι σταθερὰ κατὰ μῆκος μιᾶς παραλλήλου $\phi = \phi_0$. Ἐπειδὴ $0 < \alpha < \beta$ δὲ εἶναι $\alpha(\beta + a\eta\mu\phi) > 0$. Ὅθεν τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος $LN - M^2$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ σημεῖον τοῦ $\eta\mu\phi$. Οὕτω διὰ $0 < \phi < \pi$ ἢ $LN - M^2 > 0$, διὰ $\phi = 0$ ἢ $\phi = \pi$ ἢ $LN - M^2 = 0$ καὶ διὰ $\pi < \phi < 2\pi$ ἢ $LN - M^2 < 0$.



Σκ. 3

Οὕτως, ὡς δεικνύεται καὶ εἰς τὸ Σχῆμα 3,

τὰ σημεῖα τὰ εὐρισκόμενα πρὸς τὸ ἑξωτερικὸν μέρος τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας, δηλ. αὐτὰ διὰ τὰ ὁποῖα $0 < \phi < \pi$ εἶναι ἑλλειπτικὰ. Ἐδῶ ἡ ἐπιφάνεια παραμένει πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ὡς πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Τὰ σημεῖα τὰ εὐρισκόμενα εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας, δηλ. αὐτὰ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\pi < \phi < 2\pi$ εἶναι ὑπερβολικὰ. Ἐδῶ ἡ ἐπιφάνεια κείται ἀμφιπεδύρως ὡς πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὴν περιοχὴν ἐνᾶστος σημείου τῆς. Τέλος τὰ σημεῖα τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ πυθμένος τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας, δηλ. αὐτὰ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\phi = 0$ ἢ $\phi = \pi$ εἶναι παραβολικὰ σημεῖα.

§ 6. ΔΕΙΚΤΡΙΑ ΤΟΥ DUPIN

Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια $Z = f(x, y)$. Ἄς θεωρήσωμεν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ταύτης εἰς τὸ σημεῖον M. λαμβάνομεν ταῦτο (τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον) ὡς τὸ ἐπίπεδον τῶν παραμέτρων u καὶ v μέ ἀρχὴν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ μέ $x = u$, $y = v$. Τότε

επειδή είναι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ έπεται ότι ή επιφάνεια είναι όμαλή όταν τά u, v ληφθοῦν ως παράμετροι. Η έν λόγω επιφάνεια δύναται νά ἔχη τήν παράσταση $\mathbf{r} = u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + f(u, v) \cdot \mathbf{k}$. Οὕτως έχόντων έπεται, ότι τά εφαρτομενικά διανύσματα $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ εἰς τό σημεῖον $(0,0)$ δίδονται ὑπό τῶν τύπων: $\mathbf{r}_u = (1, 0, 0) = \mathbf{i}, \mathbf{r}_v = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$, (επειδή δέ) $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$ μηδενίζονται εἰς τήν ἀρχήν, κατὰ συνέπειαν εἰς τό σημεῖον $(u,v) = (0,0)$ ἔχουμεν: $E=1, F=0, G=1$.

Θεωροῦμεν τήν καμπύλην τῆς επιφάνειας $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(\ell), v(\ell))$ διερχομένην διά τῆς ἀρχῆς (σημείου ἐπαφῆς). Θά ἔχωμεν δι' αὐτήν: $\dot{\mathbf{r}}(\ell) = \mathbf{r}_u \cdot \dot{u} + \mathbf{r}_v \cdot \dot{v} = \dot{u} \cdot \mathbf{i} + \dot{v} \cdot \mathbf{j}$. Θά εἶναι δέ τότε καί $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 = |\dot{\mathbf{r}}(\ell)|^2 = 1$. Συνεπῶς δύναμεθα νά θέσωμεν $\dot{u} = \sin \varphi, \dot{v} = \eta \mu \varphi$, ὅπου φ εἶναι μία γωνία εἰς ποδινάς συντεταγμένας. Συνεπῶς δι' αὐτήν τήν εἰδιυτήν ἐυλογήν τῶν παραμέτρων ὁ τύπος $k_n = \frac{II}{I}$ γίνεται:

$$k_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{du^2 + dv^2} \quad (1)$$

Εἶναι δέ $du = \dot{u}(\ell) d\ell = \sin \varphi d\ell, dv = \dot{v}(\ell) d\ell = \eta \mu \varphi d\ell$

$$\text{Ὅθεν, } k_n = L \sin^2 \varphi + 2M \eta \mu \varphi \sin \varphi + N \eta^2 \mu^2 \varphi \quad (2)$$

Θέτομεν $|k_n| = \frac{1}{\rho_1}$, ὅτε ἐκ τοῦ τύπου (2) ἐπιτυχάνομεν:

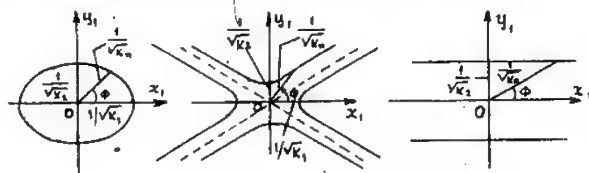
$$\pm 1 = L (\rho \sin \varphi)^2 + 2M (\rho \sin \varphi) (\rho \eta \mu \varphi) + N (\rho \eta \mu \varphi)^2 \quad \eta$$

$$\pm 1 = L x_1^2 + 2M x_1 y_1 + N y_1^2, \quad (3)$$

ὅπου ἐτέθη $x_1 = \rho \sin \varphi, y_1 = \rho \eta \mu \varphi$.

Η ἐξίσωσις (3) προσδιορίζει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $ox_1 y_1$ μίαν κωνικὴν τομήν ή ὁποία καλεῖται δεύτερια τοῦ Dupin. Αὕτη ἔχει τήν ιδιότητα, ὅτι τό μήκος καθε τμήματος ἀπό τό κέντρον τῆς κωνικῆς τομῆς πρὸς ἓνα σημεῖον αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τό ἀντίστροφον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς καθέτου καμπυλότητος (δηλ. τῆς $|k_n|$).

Αὕτη ή κωνικὴ τομή παρέχεται ὑπό τῶν κατωθι σχημάτων.



Σχ. 1α

Σχ. 1β

Σχ. 1γ

Εἶναι πρόφανές ἐκ τῆς ἐξίσωσεως (3) ὅτι ή δεύτερια τοῦ Dupin εἶναι παρομοία,

πρός τας τομάς του ἐγγυτάτου παραβολοειδούς υπό ἐπιπέδων παραλλήλων προς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας καὶ οὕτω τὸ σχῆμα αὐτῆς (τῆς δειυτρίας του Dupin) δίδει μίαν προσέγγισιν τοῦ σχήματος τῶν τομῶν τῆς ἐπιφανείας υπό τῶν προαναφερθέντων ἐπιπέδων.

- Ἐάν τὸ $LN - M^2 > 0$, ἡ δειυτρία εἶναι ἑλλειψις (Σχ. 1α)
- Ἐάν τὸ $LN - M^2 < 0$, ἡ δειυτρία εἶναι ἓνα σεῦχος συζυγῶν ὑπερβολῶν (Σχ. 1β).
- Ἐάν τὸ $LN - M^2 = 0$ καὶ $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$ ἡ δειυτρία εἶναι ἓνα σεῦχος παραλλήλων εὐθειῶν (Σχ. 1 γ).
- Ἐάν τὸ $L = M = N = 0$ ἡ δειυτρία δέν ὑπάρχει.

§ 7. ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΑΙ ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ - ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΑΙ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΕΣ - ΓΡΑΜΜΑΙ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΟΣ

Εἶναι γνωστόν ὅτι ἡ καμπυλότης K_n παρέχεται υπό τοῦ τύπου:

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2} \quad (1)$$

Ἐάν καθέσωμεν τὸν λόγον $\frac{du}{dv} = \lambda$, τότε διὰ καθε τιμὴ αὐτοῦ ὁρίζεται καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς καθέτου τομῆς τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ θεωρηθέν σημεῖον. Ἡ (1) λοιπὸν γράφεται:

$$K_n = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda + N}{E\lambda^2 + 2F\lambda + G} \quad (2)$$

Ἡδη ἂς ἀναστήσωμεν τὰ αἰροτάτα τῆς συναρτήσεως $K_n(\lambda)$. Πρὸς τούτοις εὐρίσκωμεν τὴν παράγωγον αὐτῆς ὡς πρὸς λ , ἥτοι:

$$\frac{1}{2} \frac{dK_n(\lambda)}{d\lambda} = \frac{(L\lambda + M)(E\lambda^2 + 2F\lambda + G) - (L\lambda^2 + 2M\lambda + N)(E\lambda + F)}{(E\lambda^2 + 2F\lambda + G)^2} = \frac{(FL - ME)\lambda^2 + (LG - EH)\lambda + (GM - FN)}{(E\lambda^2 + 2F\lambda + G)^2}$$

Ἐπειδὴ εἶναι $E\lambda^2 + 2F\lambda + G \neq 0$ αἱ σιτούμεναι τιμαὶ τοῦ λ δίδονται υπό τῆς ἐξίσωσεως:

$$(FL - ME)\lambda^2 + (LG - EH)\lambda + (GM - FN) = 0 \quad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) δίδει δύο ρίζας λ_1, λ_2 καὶ εἰς αὐτάς ἀντιστοιχοῦν δύο διευθύνσεις καλούμεναι πρωτεύουσαι διευθύνσεις καὶ διὰ τὰς ὁποίας ἔχομεν αἰροτάτας τιμὰς τῆς καμπυλότητος. Ἡ συνθήκη (3) γράφεται υπό μορφήν ὁρισούσης οὕτω:

$$\begin{vmatrix} E\lambda + F & L\lambda + M \\ F\lambda + G & M\lambda + N \end{vmatrix} = 0 \quad (4_a) \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad (4_b)$$

προκειμένου να υπολογίσωμεν τὰς πρωτεύουσας αμπτυλότητας k_n παρατηρούμεν λόγω τῆς (2) ὅτι αὐταὶ θὰ πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὴν εἰσώσιν:

$$(E k_n - L) \lambda^2 + 2(F k_n - M) \lambda + G k_n - N = 0 \quad (5)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἐκαστὴ τῶν πρωτευουσῶν αμπτυλοτήτων k_n ἀντιστοιχεῖ σὲ μίαν διευθύνσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, δηλ. εἰς μίαν τιμὴν τοῦ λ θὰ πρέπει ἡ διαμρίνουσα τοῦ ἀνωτέρω ὡς πρὸς λ τριωνύμου νὰ εἶναι μηδέν, ἥτοι θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$(F k_n - M)^2 - (E k_n - L) \cdot (G k_n - N) = 0 \quad (6) \quad \text{ἢ}$$

$$(EG - F^2) k_n^2 - (EN - 2FM + GL) k_n + (LN - M^2) = 0 \quad (7)$$

Ἡ εἰσώσις (7) δίδει τὰς πρωτεύουσας αμπτυλότητας τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ εἰσώσις (8):

$$(LN - M^2) R_n^2 - (EN - 2FM + GL) R_n + EG - F^2 = 0 \quad (8)$$

δίδει τὰς πρωτεύουσας αὐτὶνας αμπτυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

Ἐκ τοῦ τύπου (4β) προκύπτει ὅτι, ἐάν $E = \mu L$, $F = \mu M$, $G = \mu N$, τότε αὕτη αὐθιγὰ ἀδίσταται ταυτότης καὶ οὕτω εἰς τὰ σημεία αὐτά, δηλ. διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν $\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N} = \mu$ δὲν ὁρίζονται αἱ πρωτεύουσαι διευθύνσεις. Ταῦτα δὲ καλοῦνται ὀμφαλιὰ σημεία.¹⁾ Ἐνυόλως ἀποδεικνύεται ὅτι, πάντα τὰ σημεία μιᾶς σφαίρας, ἐνὸς ἐπιπέδου εἶναι ὀμφαλιὰ. Εἶναι δὲ καὶ αἱ μοναδίαι ἐπιφάνειαι μὲ αὐτὴν τὴν ιδιότητα.

Ἡ διαφορικὴ εἰσώσις (4β) γράφεται οὕτω:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{du}{dv} & \left(\frac{du}{dv}\right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

ἢ ἡ ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (4β) διαφ. εἰσώσις (3) γράφεται οὕτω:

$$(FL - ME) \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (LG - EN) \frac{du}{dv} + (GM - FN) = 0 \quad (10)$$

Ἐάν τὰ θεμελιώδη μερῶς πρῶτης καὶ δευτέρας τάξεως δίδονται ὡς συναρτήσεις τῶν u καὶ v ἡ διαφ. εἰσώσις (9) ἢ ἡ (10) ὁρίζει δύο αἰσμενείας αμπτυλῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αἱ ὁποῖαι καλύπτουν τὴν ἐπιφάνειαν. Αἱ γραμμαὶ αὗται καλοῦνται γραμμαὶ καμπτυλότητος τῆς ἐπιφανείας. Ἐπομένως εἰς κἀθε σημεῖον μιᾶς γραμμῆς αμπτυλότητος τῆς ἐπιφανείας εἶναι πρωτεύουσα διευθύνσις.

1) Ἡ δεύτερα τοῦ Dupin εἶναι τότε κύκλοι.

Ο τύπος (14) της § 3 που δίδει την συνθήκη, να δύο παραμετρικά γραμμάι τέμνονται όρθογωνίως γράφεται :

$$E \lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G = 0 \quad (11)$$

όπου έτέθη $\lambda_1 = \frac{du_1}{du}$ και $\lambda_2 = \frac{dv_1}{dv}$.

Έξ άλλου αι δύο ρίσαι λ_1, λ_2 της διαφοριής εξίσωσης (10) πληρούν ως γνωστόν τας σχέσεις :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{EN-LG}{FL-ME}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{GM-FN}{FL-ME} \quad (12)$$

Αντιμαδιστώντες τά $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \lambda_2$ εν τών (12) εις τήν (11) λαμβάνομεν :

$$F \cdot \frac{EN-LG}{FL-ME} + E \cdot \frac{GM-FN}{FL-ME} + G = 0$$

Ήθεν, αι γραμμάι αμπτυλόττος μιās επιφανείας τέμνονται όρθογωνίως.

Έάν ήδη υποθέσωμεν ότι λαμβάνομεν τας γραμμάς αμπτυλόττος μιās επιφανείας ως παραμετριάς γραμμάς, δηλ. $u = \text{σταθ.}$ και $v = \text{σταθ.}$ τότε, εξ όσον αι γραμμάι αυται ως γραμμάι αμπτυλόττος τέμνονται όρθογωνίως, θα πρέπει σύμφωνα πρός τόν τύπον (15) της § 3 να έχωμεν $F=0$. Επί πλέον αυται θα πρέπει να πληρούν την διαφοριήν εξίσωσιν :

$$(FL-ME) du^2 + (LG-EN) du dv + (GM-FN) dv^2 = 0.$$

Αλλά διά $u = \text{σταθ.}$ $du=0$ και εν της ανωτέρω διαφ. εξίσωσης λαμβάνομεν $GM=0$ (διότι $F=0$). Όμοίως διά $v = \text{σταθ.}$ $dv=0$ και εν της ανωτέρω εξίσωσης λαμβάνομεν $ME=0$. Έν τών δύο τελευταίων σχέσεων λαμβάνομεν $M=0$ (διότι εάν $M \neq 0$ θα έπρεπε $E=G=F=0$, όπερ άτοπον). Μέ τας γραμμάς αμπτυλόττος ως παραμετριάς γραμμάς η αάθετος αμπτυλόττης παρέχεται υπό του τύπου :

$$K_n = \frac{L du^2 + N du dv}{E du^2 + G dv^2} \quad (13)$$

Έάν υαλέσωμεν R_1 την αυτίνα αμπτυλόττος της γραμμάς $du=0$ και R_2 την αυτίνα αμπτυλόττος της γραμμάς $dv=0$, τότε λόγω τών ανωτέρω τύπων θα έχωμεν :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \quad (14)$$

Παράδειγμα: Νά εύρεθούν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας μέ ἐξίσω-
σιν $z = u \cdot i + v \cdot j + (u^2 + v^2) \cdot k$.

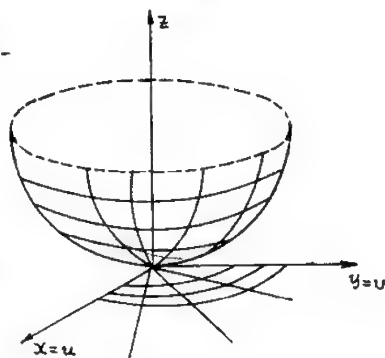
Λύσις: Εὐλόγως ὑπολορίζομεν ὅτι: $E = 1 + 4u^2$, $F = 4uv$, $G = 1 + 4v^2$, $L = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$,
 $M = 0$, $N = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$. Ἀντιταδιστώντες εἰς τὴν διαφορ. ἐξίσωσιν (10) τὰ δεμελιώ-
δη ποσὰ καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ $-8(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ ἐπιτυγχάνομεν τελευτῶς τὴν διαφ.
ἐξίσωσιν: $u v d u^2 + (u^2 - v^2) d u d v - u v d v^2 = 0$ (1).

Ἡ (1) γράφεται: $(u d u + v d v)(u d u - v d v) = 0$ (2) Ἡ ἐξί-
σωσις (2) διασπᾶται εἰς τὰς διαφορ. ἐξισώσεις.

$u d u + v d v = 0$ (3) καὶ $u d u - v d v = 0$ (4)

Ἡ γενικὴ λύσις τῆς (3) εἶναι $u^2 + v^2 = C^2$ (ὁμό-
κεντροι περιφέρειαι) καὶ ἡ γενικὴ λύσις τῆς (4)

εἶναι $u = C^* v$ (εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τῆς ἀρχῆς).
Αἱ εὐθύνες αὐτῶν τῶν γραμμῶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανεί-
ας εἶναι αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ὡς δεικνύ-
ει τὸ Σχ. 1. Ὡς σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν ἀρχὴν $u=0$, $v=0$



Σχ. 1

ἔχομεν $E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=2$, $M=0$, $N=2$. Ἐν τούτοις τὰ δεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ
δευτέρας τάξεως εἶναι ἀνάλογα καὶ οὕτω τὸ σημεῖον $u=0$, $v=0$ εἶναι ὁμφαλιόν.

Θεώρημα X-7-1. (Euler) Εἰς ἓνα σημεῖον M μιᾶς ἐπιφανείας ἡ καθετὸς κα-
μπυλότης k_n κατὰ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς ἐφαπτομένης L δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$k_n = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha,$$

ὅπου k_1 , k_2 εἶναι αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες εἰς τὸ σημεῖον M καὶ α εἶναι
ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐφαπτομένη L μετὰ μιᾶς πρωτευούσης
διευθύνσεως ἀντιστοιχοῦσης εἰς τὴν καμπυλότητα k_1 .

Ἀπόδειξις: Διὰ τὰ ὁμφαλιὰ σημεῖα τὸ θεώρημα ἰσχύει, διότι $k_1 = k_2 = k_n$. Ἐστὼ
 $\tau = \tau(u, v)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας, ὅπου ἔχομεν λάβει τὰς γραμμὰς καμπυ-
λότητος τῆς ἐπιφανείας ὡς παραμετρίαις γραμμὰς, ὅτε $F = M = 0$. Συμφώνως
πρὸς τὸν τύπον (13) τῆς § 7 ἔχομεν:

$$k_n = \frac{L du^2 + N dv^2}{E du^2 + G dv^2} \quad (1)$$

κατά τους τύπους (14) της ίδιας § 7 είναι:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} \quad \text{και} \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}$$

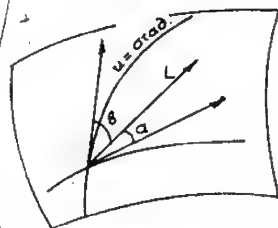
Συνεπώς ο τύπος (1) γράφεται:

$$k_n = k_1 \frac{E du^2}{E du^2 + G dv^2} + k_2 \frac{G dv^2}{E du^2 + G dv^2} \quad (2)$$

Εάν α και β είναι οι γωνίες της διεύθυνσεως L μετά των διευθύνσεων των παραμετρίων γραμμών $u = \text{σταθ.}$ και $v = \text{σταθ.}$ (βλ. Σχ.1), τότε θα έχουμε διά τα γραμμικά στοιχεία που αντιστοιχούν εις την διεύθυνσιν L και την διεύθυνσιν της $v = \text{σταθ.}$ αντιστοίχως:

$$d\tau = \tau_u du + \tau_v dv \quad \text{και} \quad d\tau_{u=c} = \tau_u du$$

$$\begin{aligned} \text{Ὅθεν:} \quad \text{συν} \alpha &= \frac{d\tau \cdot d\tau_{u=c}}{|d\tau| \cdot |d\tau_{u=c}|} = \frac{E du^2}{\sqrt{E du^2 + G dv^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E} du} = \\ &= \frac{E du}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \cdot \sqrt{E}} \quad \text{Ὁμοίως} \quad \text{συν} \beta = \frac{G dv}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \cdot \sqrt{G}} \end{aligned}$$



Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν (2) λαμβάνομεν:

$$k_n = k_1 \text{συν}^2 \alpha + k_2 \text{συν}^2 \beta \quad (3)$$

Ἀλλὰ αἱ πρωτεύουσαι διευθύνσεις εἶναι ὑάθετοι μεταξὺ των, ὅτε: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ καὶ ὁ (3) γίνεται:

$$k_n = k_1 \text{συν}^2 \alpha + k_2 \eta\mu^2 \alpha, \quad \text{ὁ. ἔ. ὁ.}$$

§ 8. ΜΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ Η ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ (ΤΟΥ GAUSS) K.

Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν (7) τῆς § 7. Τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν ταύτης παρέχεται ὡς πρῶτον ὑπὸ τῶν τύπων:

$$k_1 + k_2 = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Τοὺς ἀριθμούς $H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$ καὶ $K = k_1 k_2$ καλοῦμεν ἀντιστοίχως μέση καμπυλότητα καὶ ὀλική καμπυλότητα ἢ καμπυλότητα τοῦ Gauss. Ἐπειδὴ $EG - F^2 > 0$ ἐπεὶ εἰς τὸ πρόσημον τῆς K εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρόσημον τῆς $LN - M^2$.

Ὡς ἐν τούτῳ, ἓνα σημεῖον μίᾳς ἐπιφανείας εἶναι ἐλλειπτικόν, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $K > 0$, ὑπερβολικόν, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $K < 0$ καὶ παραβολικόν ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $K = 0$.

Ἐπειδὴ ἡ ὑάθετος καμπυλότης k_n μίᾳς ἐπιφανείας τῆς καμπύλης ἀλλοιάσει σῆμα, ἐὰν ἀλλὰ ἔη προσανατολισμὸν ἢ ἐπιφάνειαν, αἱ αὐτότατοι τιμαὶ k_1, k_2 τῆς k_n παρα-

μένουν επίσης αμρότατοι τιμαί αλλάσσουσai πρόσημον uαί ούτω τό μέριστον γίνεται ἐλάχιστον uαί αντίστροφως. Ἡ ὀδλιή uαμπυλότης προφανώς παραμένει ἀνεξάρτητος τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς ἐπιφανείας uαί ἐπὶ πλέον ὡς ἀποδεικνύεται παραμένει ἀνεξάρτητος τῆς παραμετριτικῆς παραστάσεως τῆς ἐπιφανείας.

Μία ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἔχει μέση uαί ὀδλιή uαμπυλότητα μηδέν. Ἡ σφαῖρα ἔχει μέση uαμπυλότητα εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς $1/R$ (R : ἡ αὐτὶς τῆς σφαίρας) uαί ὀδλιή uαμπυλότητα $1/R$. Οἱ κύλινδροι uαί αἱ κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἔχουν εἰς πάντα τὰ σημεῖα των ὀδλιήν uαμπυλότητα μηδέν.

Παραδέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως ἓνα βασικόν θεώρημα ἐυφράσον τὴν ὀδλιήν uαμπυλότητα μίᾳς ἐπιφανείας.

Θεώρημα X-8-1. Ἡ ὀδλιή uαμπυλότης μίᾳς ἐπιφανείας δύναται νὰ ἐυφραδῇ συναρτήσῃ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν πρώτης τάξεως uαί τῶν μερικῶν παραγῶγων αὐτῶν, ἀκριβέστερον ἴσχυει:

$$(EG-F^2)k = \begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2} E_{uv} - \frac{1}{2} G_{uv} & \frac{1}{2} E_u & F_u - \frac{1}{2} E_v \\ F_v - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix}$$

Ἡ ἄνωτέρω εἰσαγωγὴ uαλεῖται χαρακτηριστικὴ εἰσαγωγὴ τοῦ Gauss.

Ἐν τοῦ ἄνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι, δύο ἐπιφάνειαι ἔχουσai τὰ αὐτὰ θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξεως E, F, G ἔχουν ἐπίσης τὴν αὐτὴν uαμπυλότητα τοῦ Gauss.

Πρόταση X-8-1. Ἡ ὀδλιή uαμπυλότης k τοῦ Gauss εἰς ἓνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας $\tau = \tau(u, v)$ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $K \cdot (\tau_u \times \tau_v) = N_u \times N_v$.

Ἀπόδειξις: Τὰ διανύσματα N_u, N_v εἶναι κἀδετα πρὸς τὸ N συνεπῶς κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας uαί ὡς ἐν τούτου δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$N_u = \alpha \cdot \tau_u + \beta \cdot \tau_v, \quad N_v = \gamma \cdot \tau_u + \delta \cdot \tau_v$$

ὅπου τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δύνανται νὰ προσδιορισθοῦν.

$$\text{Είναι, } N_u \times N_v = (a z_u + b z_v) \times (\gamma z_u + \delta z_v) = (a\delta - b\gamma) (z_u \times z_v) \quad (1)$$

Έξ' άλλου έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} -L &= z_u \cdot N_u = z_u (a z_u + b z_v) = a E + b F \\ -M &= z_v \cdot N_u = z_v (a z_u + b z_v) = a F + b G \\ -M &= z_u \cdot N_v = z_u (\gamma z_u + \delta z_v) = \gamma E + \delta F \\ -N &= z_v \cdot N_v = z_v (\gamma z_u + \delta z_v) = \gamma F + \delta G \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Αι ανωτέρω εξισώσεις δύνανται νά γραφοῦν ὑπό μορφὴν γινομένου πινάκων ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{bmatrix} \quad (3)$$

Εν τῇ (3), ἐὰν λάβωμεν τὰς ἀντιστοίχους ὀρίζουσας, ἔχομεν:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{vmatrix} \quad (4) \quad \text{ἢ}$$

$$a\delta - b\gamma = \frac{LM - M^2}{EG - F^2} = K \quad (5)$$

Εν τῶν (1) καὶ (5) ἔχομεν τὸ ἀποδεδειγμένον.

Παράδειγμα: Νά εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες, ἡ ὀλiviή καμπυλότης, ἡ μέση καμπυλότης καθὼς καὶ αἱ γραμμαῖ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας $z = u \sin u \cdot i + u \eta \nu \cdot j + a \log (u + \sqrt{u^2 - a^2})$ κ, ἔνθα $a > 0$.

Λύσις: Εἶναι, $z_u = \sin u \cdot i + \eta \nu u \cdot j + a (u^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}} k$, $z_v = -u \eta \nu \cdot i + u \sin u \cdot j + 0 k$, $z_{uu} = 0 \cdot i + 0 \cdot j - a u (u^2 - a^2)^{-\frac{3}{2}} k$, $z_{uv} = -\eta \nu u \cdot i + \sin u \cdot j + 0 k$, $z_{vv} = -u \sin u \cdot i - u \eta \nu \cdot j + 0 k$ καὶ $N = \frac{z_u \times z_v}{|z_u \times z_v|} = -a u^{-1} \sin u \cdot i - a u^{-1} \eta \nu u \cdot j + u^{-1} (u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} k$.

Ὅθεν, $E = z_u^2 = u^2 (u^2 - a^2)^{-1}$, $F = z_u \cdot z_v = 0$, $G = z_v^2 = u^2$, $L = z_{uu} \cdot N = -a (u^2 - a^2)^{-1}$, $M = z_{uv} \cdot N = 0$, $N = a$.

Ἀντικαθιστώντες εἰς τὸν τύπον (7) τῆς § 7 εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν, ἥτις δίδει τὰς πρωτευούσας καμπυλότητας, ἥτοι: $u^4 k_1^2 - a^2 = 0$, ἐξ ἧς $k_1 = -a u^{-2}$, $k_2 = a u^{-2}$.

Ἡ μέση καμπυλότης εἶναι $H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = 0$ καὶ ἡ ὀλiviή καμπυλότης εἶναι $K = k_1 \cdot k_2 = -a^2 u^{-4}$ (τῆς ἐπιφανείας πάντα τὰ σημεῖα εἶναι ὑπερβολικὰ). Τέλος ἐπειδὴ $F = M = 0$ αἱ παραμετρικαὶ γραμμαῖ εἶναι γραμμαῖ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

§ 9. ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΠΟΣΑ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ $z=f(x,y)$.

Έστω ότι η επιφάνεια δίδεται υπό την μορφήν $z=f(x,y)$, ὅτε η διανυσματική εξίσωση τούτης είναι $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + f(x,y) \cdot \mathbf{k}$. Έν προκειμένῳ τὰ x, y θεωροῦνται ὡς αμπτυλόγραμμαι συντεταγμέναι.

Θέτομεν:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Τότε δά ἔχωμεν (βλ. σχετ. παράδειγμα 3^{ον}, § 3):

$$E = 1 + p^2, \quad F = p \cdot q, \quad G = 1 + q^2.$$

Ἡ πρώτη θεμελιώδης τετραγωνική μορφή γράφεται:

$$I = d\mathbf{r}^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pq dx dy + (1+q^2)dy^2$$

ἵνα αἱ παραμετρίαι γραμμαὶ τέμνωνται ὀρθογωνίως, ἀρκεῖ $p \cdot q = 0$.

Τό υάθετον διάνυσμα \mathbf{N} τῆς ἐπιφανείας ἔχει συντεταγμένας:

$$\mathbf{N} = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right)$$

Τό ἐμβαδινόν στοιχείον τῆς ἐπιφανείας, συμφώνως πρὸς τόν τύπον (9) τῆς § 3, εἶναι:

$$\Delta s = \sqrt{EG - F^2} dx dy = \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy.$$

Προκειμένου νά υπολογίσωμεν τὰ θεμελιώδη ποσά L, M, N δά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\mathbf{r}_{xx}'' = (0, 0, r), \quad \mathbf{r}_{xy}'' = (0, 0, s), \quad \mathbf{r}_{yy}'' = (0, 0, t)$$

καὶ ἐπὶ πλεόν δά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (7) τῆς § 4, ὅτε ἐυτελοῦντες εἰς αὐτοὺς τόν πολλοπλασιασμόν τῶν ἐσωτερικῶν γινομένων εὐρίσκουμεν τελικῶς:

$$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Ἡ δευτέρα θεμελιώδης μορφή τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$II = (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2) : \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Αἱ πρωτεύουσαι αὐτίνες αμπτυλότητες, βλ. § 7 τύπον (8) δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσως:

$$(rt - s^2) R^2 - \sqrt{1+p^2+q^2} [(1+p^2)t - 2pq s + (1+q^2)r] R + (1+p^2+q^2)^{3/2} = 0.$$

Τὰ δέ ὁμαλοῦσθαι σημεία τῆς ἐπιφανείας παρέχονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{p \cdot q} = \frac{t}{1+q^2}$$

§ 10. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ RODRIGUES.

Υποθέτομεν ότι η $\frac{du}{dv}$ είναι μία πρωτεύουσα διεύθυνσις εἰς τὸ σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας καὶ ἔστω k_n ἡ ἀντίστοιχος πρωτεύουσα καμπυλότης.

Πρότασις X-10-1. "Ενας ἀριθμὸς k_n εἶναι μία πρωτεύουσα καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον M κατὰ τὴν διεύθυνσιν $\frac{du}{dv}$ ἂν, καὶ μόνον ἂν, οἱ k_n , du καὶ dv ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} (L - k_n E) du + (M - k_n F) dv &= 0 \\ (M - k_n F) du + (N - k_n G) dv &= 0 \end{aligned} \right\} (1) \text{ ὅπου } du^2 + dv^2 \neq 0.$$

Ἀπόδειξις: Τὸ σύστημα (1) ἐπιδέχεται μὴ μηδενικὴν λύσιν ὡς πρὸς du, dv , ἂν καὶ μόνον ἂν, ἔχωμεν :

$$\begin{vmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M - k_n F & N - k_n G \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Ἀναπτύσσοντες τὴν ὀρίδουσαν (2) εὕρισκομεν :

$$(EG - F^2) k_n^2 - (EN - 2FM + GL) k_n + (LN - M^2) = 0 \quad (3).$$

Ἡ τελευταία ὁμως εἰσώσις (3) ὡς πρῶτον (βλ. σελ. 313) εἰσώσιν(7)) εἶναι ἡ δίδουσα τὰς πρωτεύουσας καμπυλότητας καὶ ἥτις ἱκανοποιεῖται ἐκ ὑποθέσεως, ἐπειδὴ ἡ k_n ὑπετέθη πρωτεύουσα καμπυλότης. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ σύστημα (1) ἐπιδέχεται μὴ μηδενικὴν λύσιν, τότε δὲ πληροῦται ἡ (2) κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ (3). Ἄρα ἡ k_n εἶναι πρωτεύουσα καμπυλότης.

• Ἡδὲ ἂς ἀντιμεταστήσωμεν τὰ δεμελιώδη ποσὰ πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως τὰ ἐμφανιζόμενα εἰς τὸ σύστημα (1) διὰ τῶν τύπων (7) τῆς § 4, ὅτε λαμβάνομεν :

$$\left. \begin{aligned} (-z_u N_u - k_n z_u z_u) du + (-z_u N_v - k_n z_u z_v) dv &= 0 \\ (-z_v N_u - k_n z_u z_v) du + (-z_v N_v - k_n z_v z_v) dv &= 0 \end{aligned} \right\} (4) \quad \ddot{n}$$

$$\left. \begin{aligned} [(N_u du + N_v dv) + k_n (z_u du + z_v dv)] \cdot z_u &= 0 \\ [(N_u du + N_v dv) + k_n (z_u du + z_v dv)] \cdot z_v &= 0 \end{aligned} \right\} (5) \quad \ddot{n}$$

$$(dN + k_n dz) \cdot z_u = 0, (dN + k_n dz) \cdot z_v = 0 \quad (6)$$

Ἐπειδὴ τὸ N εἶναι μοναδιαῖον δὲ ἔχωμεν $N \cdot N = 1$, ἐκ τῆς $2N dN = 0$, ἥτοι τὸ dN εἶναι

υάθετον πρὸς τὸ N συνεπῶς παράλληλον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον, ἔστω M . Ὀμοίως καὶ τὸ $d\tau$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας κατ' ἀπολογυδίαν καὶ τὸ διάνυσμα $dN + k_n d\tau$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας. Ὡς ἀποτέλεσμα $(dN + k_n d\tau) \cdot \tau_u = 0$ ὅα πρέπει κατ' ἀνάγκην νά εἶναι $dN + k_n d\tau = 0$. Οὕτω, κατὰ τὴν διεύθυνσιν μιᾶς πρωτεύουσας διευδύνσεως τὸ διάνυσμα dN εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ $d\tau$ καὶ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$dN = -k_n d\tau \quad (7)$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος (7) καλεῖται τύπος τοῦ Rodrigues.

Ἐάν θεωρήσωμεν τὴν πρωτεύουσαν διεύθυνσιν $u = u(t)$, $v = v(t)$, τότε ὁ τύπος (7) γράφεται:

$$\frac{dN}{dt} + k_n \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad (8)$$

Κατωτέρω παραθέτομεν μίαν σπουδαίαν ἐφαρμογὴν τοῦ τύπου τοῦ Rodrigues.

Ἐφαρμογή: Ἡ μόνη μὴ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια πού ἔχει πάντα τὰ σημεία της ὁμογενεῖα εἶναι ἡ σφαῖρα.

Ἀπόδειξις: Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν καθε καμπύλη τῆς ἐπιφανείας εἶναι μία γραμμὴ καμπυλότητος καὶ ὡς ἐκ τούτου δύναμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ Rodrigues.

Ἄς συμβολίσωμεν μὲ k ἀντὶ k_n τὴν καθετὸν καμπυλότητα. Αὕτη (ἡ καθετὸς καμπυλότης) συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (8) εἰς καθε σημεῖον εἶναι αὕτη διὰ καθε διεύθυνσιν διερχομένη διὰ τοῦ ἐν λόγῳ σημείου, δὲν γνωρίζομεν ὅμως ἀν παραμένῃ σταθερὰ διὰ τὰ σημεία τῆς ἐπιφανείας.

Κατὰ μῆκος τῶν παραμετρίων γραμμῶν u καὶ v τῆς ἐπιφανείας ὁ τύπος (8) γράφεται:

$$\left. \begin{aligned} N_u + k \cdot \tau_u &= 0 \\ N_v + k \cdot \tau_v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Διὰ παραγώσεως τῶν (1) ἀντιστοίχως ὡς πρὸς v καὶ u λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} N_{uv} + K_v r_u + k \cdot r_{uv} &= 0 \\ N_{vu} + K_u r_v + k \cdot r_{vu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Υποθέτοντες ότι η r έχει μέχρι τρίτης τάξεως μεριδιάς παραγώγους συνε-
χείς θα έχουμε $r_{uv} = r_{vu}$, $N_{uv} = N_{vu}$, και ως έυ τούτου έυ τών (2) λαμβάνομεν

$$K_v r_u - K_u r_v = 0 \quad (3)$$

Έπειδή $r_u \times r_v \neq 0$ θα πρέπει $K_u = K_v = 0$, ήτοι $k = \text{σταθερόν}$. Έυ της πρώτης
των (1) δι' όλοκληρώσεως λαμβάνομεν:

$$N + k \cdot r = a \quad (4)$$

όπου a είναι ένα σταθερόν διάνυσμα ή

$$r = \frac{a - N}{k} \quad (5)$$

Η (5) προσδιορίζει μίαν σφαίραν ακτίνας $\frac{1}{k}$ και κέντρου $\frac{a}{k}$ διότι,

$$\left| r - \frac{a}{k} \right| = \left| \frac{-N}{k} \right| = \frac{1}{k}$$

§ 11. ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ ΜΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Μία διεύθυνσις εις ένα σημείον μιās επιφανείας καλεΐται άσυμπτωτική διεύ-
θυνσις, εάν αυτή επαληθεύη την εξίσωσιν $\Pi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$. (1)

Έπειδή δέ $K_n = \frac{\Pi}{I}$, η διεύθυνσις θα είναι άσυμπτωτική, εάν $K_n = 0$, δηλ ή
κάθετος αμπτυλότης της αμπτυλης εις τό θεωρηθέν σημείον είναι μηδέν.

Προφανώς ένα έλλειπτικόν σημείον δεν έχει άσυμπτωτικής διευθύνσεις, ενώ
ένα υπερβολικόν σημείον έχει δύο άσυμπτωτικής διευθύνσεις και ένα παρα-
βολικόν σημείον έχει μίαν άσυμπτωτικήν διεύθυνσιν.

Μία αμπτυλή επί μιās επιφανείας θα καλεΐται άσυμπτωτική καμπύ-
λη, εάν εις κάθε σημείον της ή εφαπτομένη ταύτης είναι μία άσυμπτω-
τική διεύθυνσις.

(Ούτω εξ ένασπου υπερβολικοῦ σημείου της επιφανείας διέρχονται δύο
άσυμπτωτικά γραμμά και εξ ένασπου παραβολικοῦ σημείου μία.)

Δοδείξτες της επιφανείας $r = r(u, v)$ μία αμπτυλή ταύτης θα είναι άσυμ-
πτωτική γραμμή, εάν, και μόνον εάν, η διεύθυνσις της εφαπτομένης της

υαμπύλης εις υάθε σημείον ικανοποιῇ τὴν ἐξίσωσιν (1). Εἰς ἓνα ὑπερβολικὸν σημείον ἡ ἐξίσωσις (1) διασπᾶται εἰς δύο ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $Adu + Bdv = 0$ αἱ ὁποῖαι εἶναι διαφ. ἐξισώσεις πρώτης τάξεως καὶ ὁλοκληρώνονται εὐυλόως. Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφήν $z = f(x, y)$, τότε αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ αὐτῆς πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν :

$$zdx^2 + 2S dx dy + t dy^2 = 0 \quad (1')$$

- Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ u καὶ v - παραμετρικαὶ γραμμαὶ εἶναι ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανεῖας, τότε θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) $Ldu^2 = 0$ ἐξ ἧς $L = 0$ καὶ $Mdv^2 = 0$ ἐξ ἧς $M = 0$. Ὅθεν, αἱ u καὶ v - παραμετρικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανεῖας εἶναι ἀσυμπτωτικαὶ, ἔάν καὶ μόνον ἔάν $L = M = 0$.
- Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ υαμπυλότης k μιᾶς τυχούσης ἐπιφανειακῆς γραμμῆς μετὰ τῆς καθέτου υαμπυλότητος k_n συνδέονται ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$k \cos \theta = k_n = \frac{II}{I},$$

ὅπου θ ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ πρώτη καθετος τῆς υαμπύλης μετὰ τοῦ καθέτου διανύσματος H ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν (βλ. σελ. 303).

Κατὰ μῆκος δὲ τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν θὰ ἔχωμεν:

$$k \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἐπαληθεύεται εἴτε διὰ $k = 0$ (3) εἴτε διὰ $\theta = \frac{\pi}{2}$ (4). Ἡ συνθήκη (3) πληροῦται ἐφ' ὅσον αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ εἶναι εὐθεῖαι. Ἀντιστρόφως, πάσα εὐθεῖα γραμμὴ ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανεῖας εἶναι ἀσυμπτωτικὴ γραμμὴ.

Ἡ συνθήκη (4) πληροῦται, ὅταν τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς εἰς πᾶν σημεῖον αὐτῆς σχηματίζει ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν, δηλ. ὅταν συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανεῖας. Τὸ ἀντίστροφον δίδεται ὑπὸ τῆς κατωθι προτάσεως:

Πρότασις X-11-1. Εἰς πᾶν σημεῖον μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον ταύτης συμπίπτει μετὰ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανεῖας εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἐστω N ἡ καθετος τῆς ἐπιφανεῖας, τ τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς καὶ ν ἡ πρώτη καθετος ταύτης.

Άρκει νά δειξωμεν ὅτι τὰ διανύσματα τ καί ν εἶναι ὀρθογώνια πρὸς τὸ N .
κατὰ μῆκος τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς ἔχομεν:

$$N \cdot \tau = 0 \quad (1)$$

Διὰ παραγωγίσεως τῆς (1) ὡς πρὸς τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἔχομεν:

$$\dot{N} \cdot \tau + N \cdot \dot{\tau} = 0 \quad (2) \quad \text{ἢ}$$

$$\dot{N} \cdot \tau + N(k \cdot \nu) = 0 \quad (3)$$

Εἶναι ὅμως $N(k \cdot \nu) = k_n$ καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν ἀσυμπτωτικὴ γραμμὴ θὰ εἶναι $k_n = 0$. (Ὅθεν ἡ (3) γράφεται $\dot{N} \cdot \tau = 0$) (4).

Ἐκ τῶν (2) καὶ (4) λαμβάνομεν $N \cdot \dot{\tau} = 0$ ἢ $N \cdot (k \cdot \nu) = 0$. (5).

Ἐάν $k \neq 0$ (ἡ ἀσυμπτωτικὴ δὲν εἶναι εὐθεῖα), ἐκ τῆς (5) λαμβάνομεν $N \cdot \nu = 0$ (6).
ἵτοι τὸ N ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ν . Ἄρα τὰ τ καὶ ν εἶναι ὀρθογώνια πρὸς τὸ N
ἵτοι: τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς συμπίπτει μετὰ τοῦ
ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας.

• Μία διεύθυνσις $\frac{\delta u}{\delta v}$ εἰς ἓνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καλεῖται **συζυγῆς**
πρὸς τὴν διεύθυνσιν $\frac{du}{dv}$, ἐάν $d\tau \cdot \delta N = 0$ (1).

Ἐπειδὴ $d\tau = \tau_u du + \tau_v dv$ καὶ $\delta N = N_u du + N_v dv$ ἀναπτύσσοντες τὴν σχέσιν (1) λαμβάνομεν
 $L du du + M (du dv + dv du) + N dv dv = 0$ (2).

Δύο οἰογένηται καμπύλων μιᾶς ἐπιφανείας θὰ καλοῦνται **συζυγεῖς οἰο-
γένειαι καμπύλων**, ἐάν αἱ διευθύνσεις τῶν ἐφαπτομένων των εἶναι συζυγεῖς
εἰς καθεστὲς σημεῖον.

Δοθεῖστος μιᾶς αὐθαιρέτου διευδύνσεως $\frac{du}{dv}$ ἡ (2) εἶναι μιὰ γραμμικὴ ἐ-
ξίσωσις:

$$(L du + M dv) du + (M du + N dv) dv = 0 \quad (3)$$

ὡς πρὸς du , dv καὶ ἡ ὁποία ἐπιδέχεται μιὰ μόνον λύσιν ὡς πρὸς $\frac{du}{dv}$, ἐάν
 $LN - M^2 \neq 0$. (διὰ τί;). Ἡ (3) δίδει τὴν οἰογένειαν τῶν συζυγῶν διευδύνσεων (βλ.
σχετ. ἀσκήσεις).

Παραδείγματα: 1^{στ}/ θεωροῦμεν τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν (βλ. σελ 301).

$$\tau = (ρ \sin \theta) \cdot i + (ρ \eta \mu \theta) \cdot j + (\log \rho) \cdot k, \quad \rho > 0.$$

Νά εὕρεθουν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ αὐτῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ νά εὕρεθῇ ἡ ἐξί-
σωσις ταύτης μετὰ παραμετρίως γραμμὰς τὰς ἀσυμπτωτικὰς τῆς γραμμῆς.

Λύσις: Δι' ενός άπλοῦ ὑπολογισμοῦ εὐρίσκουμεν:

$$L = -P(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{1}{P}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ἀντιπαδιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τὰ L, M, N καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν: $-p d\theta + \frac{dp^2}{P} = 0$ ἢ $p^2 d\theta = dp^2$. Ἡ τελευταία διασπᾶται εἰς τὰς ἐξισώσεις $d\theta = \frac{dp}{P}$ καὶ $d\theta = -\frac{dp}{P}$. Αἱ δύο τελευταῖαι δι' ὁλοκληρώσεως δίδουν $\theta + u = \log p$, $\theta + v = -\log p$, ὅπου u καὶ v αὐθαίρετοι σταθεραί. Λαμβάνοντες τὰ u καὶ v ὡς παραμέτρους τῆς ἐπιφανείας προφανῶς αὗται δὲ εἶναι ἀσυμππτωτικαὶ γραμμαὶ ταύτης. Δι' ἐπιλύσεως τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ὡς πρὸς θ καὶ p λαμβάνομεν τελικῶς $\theta = -(u+v)/2$, $p = e^{(u-v)/2}$. Οὕτω ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας μὲ παραμέτρους τὰς ἀσυμππτωτικὰς τῆς γραμμᾶς εἶναι:

$$r = e^{(u-v)/2} \sin \frac{(u+v)}{2} \cdot i + e^{(u-v)/2} \eta \mu \frac{u+v}{2} j + \frac{u-v}{2} \cdot k.$$

22/. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀσυμππτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας $z = x^m y^n$.

Λύσις: Ἐχομεν $r = m(m-1) \cdot x^{m-2} y^n$, $s = m \cdot n \cdot x^{m-1} y^{n-1}$, $t = n(n-1) \cdot x^m y^{n-2}$ καὶ ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (1) γράφεται:

$$m(m-1) \cdot \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy} \right)^2 + 2mn \left(-\frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy} \right) + n(n-1) = 0.$$

Ἐν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἐξάγομεν δύο τιμὰς h_1 καὶ h_2 διὰ τὸν λόγον $\frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy}$. Αἱ δύο οἰσογένηται τῶν ἀσυμππτωτικῶν γραμμῶν προβαλλόμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου oxy παρέχονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων $y^{h_1} = C_1 x$ καὶ $y^{h_2} = C_2 x$.

§ 12. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ GAUSS-WEINGARTEN

Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια $\Sigma = \Sigma(u, v)$. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\tau_{uu}, \tau_{uv}, \tau_{vv}, N_u, N_v$ καὶ εἶναι συνεχεῖς. Ἐπειδὴ τὰ διανύσματα τ_u, τ_v καὶ N εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα μεταξὺ τῶν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \tau_u + \Gamma_{11}^2 \tau_v + a_{11} N \\ \tau_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \tau_u + \Gamma_{12}^2 \tau_v + a_{12} N \\ \tau_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \tau_u + \Gamma_{22}^2 \tau_v + a_{22} N \\ N_u &= \beta_1^1 \tau_u + \beta_1^2 \tau_v + \gamma_1 N \\ N_v &= \beta_2^1 \tau_u + \beta_2^2 \tau_v + \gamma_2 N \end{aligned} \right\} (1)$$

όπου οι συντελεστές Γ_{ij}^k , a_{ij} , β_i^j , γ_i δύνανται να προσδιορισθούν.

Επειδή $N \cdot dN = 0$ θα είναι $N \cdot (N_u du + N_v dv) = 0$ και επειδή τα N_u , N_v είναι γραμμικώς ανεξάρτητα θα είναι το N ορθογώνιον προς το N_u , N_v . Όθεν:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= N_u \cdot N = \beta_1' z_u \cdot N + \beta_1'' z_v \cdot N + \gamma_1 \cdot N \cdot N \\ 0 &= N_v \cdot N = \beta_2' z_u \cdot N + \beta_2'' z_v \cdot N + \gamma_2 \cdot N \cdot N \end{aligned} \right\} (2)$$

Είναι όμως $z_u \cdot N = z_v \cdot N = 0$ και $N \cdot N = 1$. Έμ τών σχέσεων (2) προκύπτει άμεσα, ότι θα πρέπει να είναι $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Εάν ήδη πολλαπλασιάσωμεν τās δύο τελευταίās τών σχέσεων (1) εσωτερικώς επί z_u , z_v , λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} -L &= z_u \cdot N_u = \beta_1' z_u z_u + \beta_1'' z_u z_v = \beta_1' E + \beta_1'' F \\ -M &= z_v \cdot N_u = \beta_1' z_v z_u + \beta_1'' z_v z_v = \beta_1' F + \beta_1'' G \\ -M &= z_u \cdot N_v = \beta_2' z_u z_u + \beta_2'' z_u z_v = \beta_2' E + \beta_2'' F \\ -N &= z_v \cdot N_v = \beta_2' z_v z_u + \beta_2'' z_v z_v = \beta_2' F + \beta_2'' G \end{aligned} \right\} (3)$$

Επιλύοντες τās δύο πρώτας τών εξισώσεων (3) ως προς β_1' , β_1'' και τās δύο τελευταίās ως προς β_2' , β_2'' λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1' &= \frac{MF - LG}{EG - F^2}, \quad \beta_1'' = \frac{LF - ME}{EG - F^2}, \quad \beta_2' = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, \quad \beta_2'' = \frac{MF - NE}{EG - F^2} \end{aligned} \right\} (4)$$

Εάν πολλαπλασιάσωμεν εσωτερικώς επί N τās τρεῖς πρώτας τών εξισώσεων (1), λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} L &= z_{uu} \cdot N = \Gamma_{11}' z_u \cdot N + \Gamma_{11}'' z_v \cdot N + a_{11} N \cdot N = a_{11} \\ M &= z_{uv} \cdot N = \Gamma_{12}' z_u \cdot N + \Gamma_{12}'' z_v \cdot N + a_{12} N \cdot N = a_{12} \\ N &= z_{vv} \cdot N = \Gamma_{22}' z_u \cdot N + \Gamma_{22}'' z_v \cdot N + a_{22} N \cdot N = a_{22} \end{aligned}$$

Όθεν, $a_{11} = L, \quad a_{12} = M, \quad a_{22} = N.$

Ήδη απομένει να προσδιορισθούν οι συντελεστές Γ_{ij}^k .

Παρατηρούμεν ότι:

$$\left. \begin{aligned} z_u \cdot z_{uu} &= \frac{1}{2} (z_u \cdot z_u)_u = \frac{1}{2} E_u, \quad z_u \cdot z_{uv} = \frac{1}{2} (z_u \cdot z_v)_u = \frac{1}{2} E_v, \\ z_v \cdot z_{uv} &= \frac{1}{2} (z_v \cdot z_v)_v = \frac{1}{2} G_v, \quad z_v \cdot z_{vv} = \frac{1}{2} (z_v \cdot z_v)_v = \frac{1}{2} G_v. \end{aligned} \right\}$$

Επί πλέον δε έχομεν:

$$F_u = (z_u \cdot z_v)_u = z_{uu} \cdot z_v + z_u \cdot z_{uv} = z_{uv} \cdot z_v + \frac{1}{2} E_v,$$

$$F_v = (z_u \cdot z_v)_v = z_{uv} \cdot z_v + z_u \cdot z_{vv} = \frac{1}{2} G_u + z_u \cdot z_{vv}.$$

$$\text{Όθεν, } z_{uu} \cdot z_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, z_u \cdot z_{vv} = F_v - \frac{1}{2} G_u.$$

Λαμβάνοντας δε τās εξισώσεις (1) και πολλαπλασιάζοντας ταύτας εσωτερικώς επί z_u, z_v και λόγω των ανωτέρω συμπερασμάτων έχομεν:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} E_u &= z_u \cdot z_{uu} = \Gamma_{11}^1 z_u z_u + \Gamma_{11}^2 z_u z_v = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ F_u - \frac{1}{2} E_v &= z_v \cdot z_{uu} = \Gamma_{11}^1 z_v z_u + \Gamma_{11}^2 z_v z_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \\ \frac{1}{2} E_v &= z_u \cdot z_{uv} = \Gamma_{12}^1 z_u z_u + \Gamma_{12}^2 z_u z_v = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\ \frac{1}{2} G_u &= z_v \cdot z_{uv} = \Gamma_{12}^1 z_v z_u + \Gamma_{12}^2 z_v z_v = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \\ F_v - \frac{1}{2} G_u &= z_u \cdot z_{vv} = \Gamma_{22}^1 z_u z_u + \Gamma_{22}^2 z_u z_v = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\ \frac{1}{2} G_v &= z_v \cdot z_{vv} = \Gamma_{22}^1 z_v z_u + \Gamma_{22}^2 z_v z_v = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Επιλύοντας τās δύο πρώτας εξισώσεις των (5) ως προς $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ την τρίτην και τετάρτην ως προς $\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2$ και τās δύο τελευταίας ως προς $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ εύρισκομεν:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{G E_u - 2 F F_u + F E_v}{2(E G - F^2)}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{G E_v - F G_u}{2(E G - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{2 G F_v - G G_u - F G_v}{2(E G - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2 E F_v - E E_v + F E_u}{2(E G - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{E G_u - F E_v}{2(E G - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{E G_v - 2 F F_v + F G_u}{2(E G - F^2)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Έν των ανωτέρω έπεται τό θεώρημα:

Θεώρημα X-12-1. Δοθείσης τής επιφανείας $z = z(u, v)$ τὰ διανύσματα z_u, z_v, N και αἱ παράγωγοι αὐτῶν ἐπαληθεύουν τās εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} z_{uu} &= \Gamma_{11}^1 z_u + \Gamma_{11}^2 z_v + L \cdot N \\ z_{uv} &= \Gamma_{12}^1 z_u + \Gamma_{12}^2 z_v + M \cdot N \\ z_{vv} &= \Gamma_{22}^1 z_u + \Gamma_{22}^2 z_v + N \cdot N \\ N_u &= \theta_1^1 z_u + \theta_1^2 z_v \\ N_v &= \theta_2^1 z_u + \theta_2^2 z_v \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

όπου οἱ συντελεσταί $\theta_i^j, \Gamma_{ij}^k$ δίδονται ὑπό των εξισώσεων (4) και (6).

Αἱ τρεῖς πρώται των ανωτέρω εξισώσεων (6) καλοῦνται εξισώσεις τοῦ Gauss, αἱ δέ δύο τελευταῖαι καλοῦνται εξισώσεις τοῦ Weingarten. Οἱ συντελεσταί Γ_{ij}^k καλοῦνται σύμβολα τοῦ Christoffel δευτέρου είδους. Παρατηροῦμεν ἐν των τύπων (6) ὅτι τὰ Γ_{ij}^k ἐξαρτῶνται μόνον ἀπό τὰ δεμελιώδη ποσά πρώτης τάξεως και τās παραγώγους αὐτῶν, ἐνῶ τὰ θ_i^j ἐξαρτῶνται ἀπό τὰ δεμελιώδη ποσά πρώτης και δευτέρας τάξεως. Τέλος ὀρίσομεν $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1$ και $\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2$. Οὕτω $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ διὰ $i, j, k = 1, 2$.

Θεωρούμετες τήν πρώτην Εξίσωσιν τών (1) καί πολλαπλασιάζοντες ταύτην ἔσω-
τεριωῶς ἐπὶ τοῦ \mathbf{z}_u εὐρίσκωμεν:

$$\mathbf{z}_{uu} \times \mathbf{z}_v = \Gamma'_{11} (\mathbf{z}_u \times \mathbf{z}_v) + L (\mathbf{N} \times \mathbf{z}_v).$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐν συνεχείᾳ ταύτην ἔσωτεριωῶς ἐπὶ \mathbf{N} εὐρίσκωμεν:

$$(\mathbf{z}_{uu}, \mathbf{z}_v, \mathbf{N}) = \Gamma'_{11} (\mathbf{z}_u, \mathbf{z}_v, \mathbf{N}).$$

Θέτοντες $H = (\mathbf{N}, \mathbf{z}_u, \mathbf{z}_v)$ ἡ ἀνωτέρω Εξίσωσις γράφεται:

$$\Gamma'_{11} = \frac{1}{H} (\mathbf{N}, \mathbf{z}_{uu}, \mathbf{z}_v)$$

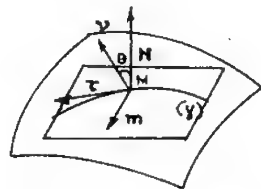
Κατ' ἀναλογίαν ἐν τῶν ἀνωτέρω Εξισώσεων εὐρίσκωμεν:

$$\left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \Gamma'_{11} = \frac{1}{H} (\mathbf{N}, \mathbf{z}_{uu}, \mathbf{z}_v) \\ \Gamma'_{12} = \frac{1}{H} (\mathbf{N}, \mathbf{z}_{uv}, \mathbf{z}_v) \\ \Gamma'_{22} = \frac{1}{H} (\mathbf{N}, \mathbf{z}_{vv}, \mathbf{z}_v) \\ \Gamma''_{11} = \frac{1}{H} (\mathbf{N}, \mathbf{z}_u, \mathbf{z}_{uu}) \\ \Gamma''_{12} = \frac{1}{H} (\mathbf{N}, \mathbf{z}_u, \mathbf{z}_{uv}) \\ \Gamma''_{22} = \frac{1}{H} (\mathbf{N}, \mathbf{z}_u, \mathbf{z}_{vv}) \end{array} \right\} \quad (7)$$

§ 13. ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΣ - ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ ΣΤΡΕΨΙΣ

Ἐστω $M(u, v)$ ἓνα σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S καὶ \mathbf{N} τὸ κάθετον διάνυσμα ταύτης εἰς τὸ M . Ἄς θεωρήσωμεν διὰ τοῦ M διερχομένην μίαν τυχούσαν ἐπιφανειακὴν καμπύλην (γ) . Συνδέομεν εἰς τὴν (γ) ἓνα τριέδρον διάφορον τοῦ τριέδρου τοῦ Frenet καὶ τὸ ὁποῖον κατασκευάζομεν ὡς ἀκολούθως:

Ἐστω $\boldsymbol{\tau}$ τὸ ἐφαπτομενικὸν διάνυσμα τῆς (γ) εἰς τὸ M καὶ ἔστω \mathbf{m} τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς S εἰς τὸ M



Σχ. 1.

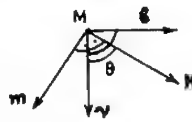
καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ \mathbf{m} νά εἶναι κάθετον εἰς τὸ $\boldsymbol{\tau}$ καὶ ἐπὶ πλεον τὸ τριέδρον $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}, \mathbf{N})$ νά εἶναι δεξιόστροφον. Ἐστω $\boldsymbol{\nu}$ ἡ πρώτη κάθετος τῆς καμπύλης (γ) εἰς τὸ M (βλ. Σχ 1) καὶ θ ἡ μὴ προσανατολισμένη γωνία τῶν $\boldsymbol{\nu}$ καὶ \mathbf{N} μεταβαλλομένη ἀπὸ 0 ἕως Π . Τὰ διανύσματα $\boldsymbol{\nu}, \mathbf{N}, \mathbf{m}$ (καθὼς καὶ τὸ θ) ὡς κάθετα

πρός τό τ είναι συνεπίεδα, τά δέ N καί m είναι ὀρθογώνια.

Θεωροῦμεν τό κλάδον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τό M · τότε δά ἔχουμεν τήν ἑναντι διάταξιν τούτων (βλ. Σχ. 2).

Ὡς γνωστόν ἔχομεν:

$$\left. \begin{aligned} N &= \nu \cdot \sin \theta + \theta \eta \mu \theta \\ m &= \nu \eta \mu \theta - \theta \sin \theta \end{aligned} \right\} (1)$$



Σχ. 2.

Εἰς τό τρίεδρον (τ, m, N) ἀποδίδομεν τήν ὀνομασίαν

γεωδαισιακόν τρίεδρον τῆς καμπύλης (γ) εἰς τό σημεῖον M ἢ τρίεδρον τῶν

Darboux-Ribaucour. Ἐάν k καί σ εἶναι ἡ καμπυλότης καί ἡ στρέψις τῆς ἐπιφανειακῆς καμπύλης (γ) εἰς τό σημεῖον M , καλοῦμεν τήν ἔκφρασιν $k_g = k \eta \mu \theta$ (2)

γεωδαισιακὴν καμπυλότητα τῆς (γ) εἰς τό M , τὴν δέ ἔκφρασιν $\sigma_g = \sigma + \frac{d\theta}{d\ell}$ (3) καλοῦμεν γεωδαισιακὴν στρέψιν τῆς (γ) εἰς τό M .

Διὰ παραγωγίσεως τῶν τύπων (1) ὡς πρὸς ℓ καί ἐφαρμογῆς ἐν συνεχείᾳ τῶν τύπων τοῦ Frenet λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\ell} &= \dot{\nu} \eta \mu \theta + \nu \sin \theta \frac{d\theta}{d\ell} - \dot{\theta} \sin \theta + \theta \eta \mu \theta \frac{d\theta}{d\ell} \\ &= (-k\tau + \sigma \cdot \theta) \eta \mu \theta + \nu \sin \theta \frac{d\theta}{d\ell} + \sigma \cdot \nu \sin \theta + \theta \eta \mu \theta \frac{d\theta}{d\ell} \\ &= -(k \eta \mu \theta) \cdot \tau + \sigma (\theta \eta \mu \theta + \nu \sin \theta) + (\nu \sin \theta + \theta \eta \mu \theta) \frac{d\theta}{d\ell} \\ &= -(k \eta \mu \theta) \tau + \sigma \cdot N + N \frac{d\theta}{d\ell} = -(k \eta \mu \theta) \tau + \left(\sigma + \frac{d\theta}{d\ell} \right) N. \end{aligned}$$

ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $k \eta \mu \theta = k_g$, $\sigma + \frac{d\theta}{d\ell} = \sigma_g$, δά ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{\frac{dm}{d\ell} = -k_g \cdot \tau + \sigma_g \cdot N} \quad (4)$$

Δι' ἀναλόγου τρόπου εὐρίσκομεν:

$$\boxed{\frac{dN}{d\ell} = -(k \sin \theta) \tau + \sigma_g \cdot m} \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν (4) ἐσωτερικῶς ἐπὶ τ λαμβάνομεν:

$$k_g = -\frac{dm}{d\ell} \cdot \tau = m \cdot \frac{d\tau}{d\ell} = (\text{διότι } \tau \cdot m = 0) \quad \eta$$

$$k_g = (N \times \tau) \cdot \frac{d\tau}{d\ell} = (N, \tau, \frac{d\tau}{d\ell}) = (N, \dot{\tau}, \ddot{\tau})$$

Ήθεν,

$$k_g = (N, \dot{\tau}, \ddot{\tau}) \quad (6)$$

Ο τύπος (6) δίδων την γεωδαισιακήν ταμпульότητα είναι άξιοσημείωτος.

Επειδή $\dot{\tau} = \tau$, $\ddot{\tau} = k \cdot v$ ο τύπος (6) γράφεται:

$$k_g = k(N, \tau, v) \quad (7)$$

Πολλαπλασιάζοντες την (5) εσωτερικῶς ἐπὶ m λαμβάνομεν:

$$\sigma_g = m \cdot \frac{dN}{d\ell} = (N \times \tau) \cdot \frac{dN}{d\ell} = (N, \tau, \frac{dN}{d\ell})$$

Ήθεν,

$$\sigma_g = (N, \dot{\tau}, \dot{N}) \quad (8)$$

Ο τύπος (8) δίδει την γεωδαισιακήν στρέψιν καὶ εἶναι πολλὰκις χρήσιμος εἰς τὰς ἐφαρμογὰς.

Πρότασις X-13-1. Ἡ γεωδαισιακή ταμпульότης μιᾶς ἐπιπέδου γραμμῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν ταμпульότητα ταύτης.

Λύσις: Ἐστω ἡ ταμпульὴ (γ) $\tau = \tau(t) = x(t)i + y(t)j$ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου οαχ. θεωροῦμεν λοιπὸν ὡς ἐπιφάνειαν τὸ ἐπίπεδον οαχ καὶ ὡς γνωστὸν ἡ ταμпульότης τῆς (γ) ἐὰν παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

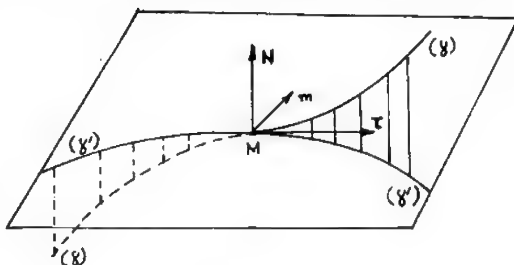
$$k = x'y'' - x''y' = \begin{vmatrix} x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k, \tau', \tau'') = k_g,$$

ὅπου $k = i \times j$.

Πρότασις X-13-2. Ἡ γεωδαισιακή ταμпульότης εἰς ἓνα σημεῖον M μιᾶς ἐπιφανείας ταμпульῆς (γ) ἰσοῦται πρὸς τὴν ταμпульότητα τῆς προβολῆς τῆς (γ) ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον M .

Ἀπόδειξις: Ἐάν θεωρήσωμεν εἰς τὸ σημεῖον M τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν διὰ

τῆς ὁποίας προβάλλεται ἡ υαμπύλη (γ) ἐπὶ τοῦ ἐφασπτομένου ἐπιπέδου (βλ. Σκ.1), αἱ γενέταιραι ταύτης δὲ ἔχουν τὴν διεύθυνσιν τῆς καθέτου N , ἡ δὲ καθέτος τῆς προβολῆς (γ') τῆς υαμπύλης (γ) δὲ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος m . Ἡ γεωδαισιακὴ υαμπυλότης λοιπὸν δὲ ἰσοῦται πρὸς τὴν καθετὸν υαμπυλότητα τῆς καθέτου



Σκ.1

τομῆς τῆς κυλινδρικοῦς ἐπιφανεῖας εἰς τὸ σημεῖον M καὶ ἥτις καθέτος τομῆ εἶναι ἡ υαμπύλη (γ') . Ὅθεν, ἡ γεωδαισιακὴ υαμπυλότης τῆς (γ) ἰσοῦται πρὸς τὴν υαμπυλότητα (ἐπίπεδος υαμπύλη) τῆς προβολῆς τῆς (γ) εἰς τὸ ἐφασπτόμενον ἐπίπεδον.

Παραδέτομεν ἄνευ ἀποδείξεως τὸ κατωθὶ θεώρημα:

Θεώρημα X-13-1. Δοθείσης τῆς ἐπιφανεῖας $\tau = \tau(u, v)$ καὶ τῆς υαμπύλης ἡ ὁποία ἔχει τὴν φυσικὴν παράστασιν $\tau = \tau(\ell) = \tau(u(\ell), v(\ell))$ ἡ γεωδαισιακὴ υαμπυλότης k_g ταύτης παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$k_g = \left[\Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{d\ell} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2) \left(\frac{du}{d\ell} \right)^2 \left(\frac{dv}{d\ell} \right) + (\Gamma_{12}^2 - 2\Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{d\ell} \right) \left(\frac{dv}{d\ell} \right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{d\ell} \right)^3 + \frac{dv}{d\ell} \cdot \frac{d^2u}{d\ell^2} - \frac{d^2v}{d\ell^2} \cdot \frac{du}{d\ell} \right] \cdot \sqrt{EG - F^2}$$

Διὰ τὴν ἀποδείξιν τούτου βλ. Differential Geometry, M Lipschutz, ed McGraw-Hill, σελ. 250.

Ἡ γεωδαισιακὴ υαμπυλότης δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς παραμ. παραστάσεως τῆς ἐπιφανεῖας.

Ἄς εὗρωμεν ἥδη τὴν γεωδαισιακὴν υαμπυλότητα τῶν παραμετριοῦν γραμμῶν τῆς ἐπιφανεῖας. Οὕτω κατὰ μῆκος μιᾶς u -παραμετριοῦς γραμμῆς τὸ v -σταθ. καὶ τὸ $\frac{dv}{d\ell} = 0$ καὶ $d\ell^2 = E du^2$ ἐξ ἧς $\frac{du}{d\ell} = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Ὀμοίως κατὰ μῆκος μιᾶς v -παραμετριοῦς γραμμῆς τὸ $\frac{du}{d\ell} = 0$ καὶ $\frac{dv}{d\ell} = \frac{1}{\sqrt{G}}$. Συνεπῶς ὁ ἀνωτέρω τύπος ὁ δίδων τὴν γεωδαισιακὴν υαμπυλότητα γίνεται ἐν προκειμένῳ:

$$(k_g)_{v=\text{σταθ}} = \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{d\ell} \right)^3 \sqrt{EG - F^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E \cdot \sqrt{E}} \quad (1)$$

$$(k_g)_{u=\text{σταθ}} = -\Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{d\ell} \right)^3 \sqrt{EG - F^2} = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G \sqrt{G}} \quad (2)$$

Ἐάν τέλος ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ παραμετριοὶ γραμμαὶ τέμνονται ὀρθογωνίως

τότε $F=0$ και οι τύποι (1) και (2) γίνονται:

$$(k_g)_{u=\sigma\tau\theta} = -\frac{E_u}{2E\sqrt{G}} \quad (3) \quad (k_g)_{u=\sigma\tau\theta} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \quad (4)$$

Παράδειγμα: Νά εύρεθῇ ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης τῶν παραμετρίων γραμμῶν τοῦ παραβολοειδούς $\tau = (\rho \sin \theta) i + (\rho \eta \mu \theta) j + \rho^2 k$, ἔνθα $0 < \rho < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$.

Λύσις: Εἶναι $\tau_\rho = (\sin \theta) i + (\eta \mu \theta) j + 2\rho k$, $\tau_\theta = (-\rho \eta \mu \theta) i + (\rho \sin \theta) j$

$$E = \tau_\rho \cdot \tau_\rho = 1 + 4\rho^2, \quad F = \tau_\rho \cdot \tau_\theta = 0, \quad G = \tau_\theta \cdot \tau_\theta = \rho^2$$

$$N = \frac{\tau_\rho \times \tau_\theta}{|\tau_\rho \times \tau_\theta|} = (1+4\rho^2)^{-1/2} (-2\rho (\sin \theta) i - 2\rho (\eta \mu \theta) j + k)$$

Αἱ θ -παραμετρίαι καμπύλαι μέ $\rho = \rho_0$ εἶναι

$$\tau = (\rho_0 \sin \theta) i + (\rho_0 \eta \mu \theta) j + \rho_0^2 k$$

κατὰ μήκος αὐτῆς τῆς καμπύλης εἶναι:

$$\tau' = (-\rho_0 \eta \mu \theta) i + (\rho_0 \sin \theta) j, \quad \tau'' = (-\rho_0 \sin \theta) i + (-\rho_0 \eta \mu \theta) j$$

και $\frac{d\ell}{d\theta} = |\tau'| = \rho_0$. Εἶναι ὁμως γνωστόν $\tau \times \tau' = (\tau' \times \tau'') \cdot \left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^3$

Ἰ, ὅθεν, $\tau \times \tau' = \left(\frac{k}{\rho_0}\right)$ Εἶναι δέ, $k_g = (N, \tau, \tau') =$ $k \sim \rho_0$ καὶ ὁμοίως $\rho^2 = \rho_0^2$
 $\rho_0 \sim \rho$ καὶ $\rho^2 \sim \rho_0^2$

$$= N \cdot (\tau \times \tau') = (1+4\rho_0^2)^{-1/2} [-2\rho_0 (\sin \theta) i - 2\rho_0 (\eta \mu \theta) j + k] \cdot \frac{k}{\rho_0} = \frac{(1+4\rho_0^2)^{-1/2}}{\rho_0}$$

Ἔε ἄλλου ἐάν ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους (3) καὶ (4) ($F=0$) καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα.

§ 14. ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ

Θεωροῦμεν τὴν ἐπιφάνειαν $\tau = \tau(u, v)$ καὶ μίαν γραμμὴν $\tau = \tau(\ell) = \tau(u(\ell), v(\ell))$ ἐπ' αὐτῆς.

Ὁρισμός X-14-1. Καλοῦμεν γεωδαισιακὴν γραμμὴν μιᾶς ἐπιφάνειας πᾶσαν ἐπ' αὐτῆς καμπύλην εἰς καθε σημείον τῆς ὁποίας ἡ πρώτη καθετος συμπίπτει μετὰ τῆς καθετου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν.

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον (7) τῆς § 13 συμπεραίνομεν ὅτι:

κατὰ μήκος μιᾶς γεωδαισιακῆς γραμμῆς ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης εἶναι

ἴση πρὸς μηδέν, ἥτοι: $k_g = (N, \tau, \tau') = 0 \quad (1).$

Ἡ ἀνωτέρω ιδιότης λαμβάνεται ὡς θάοις διὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν.

μῶν. Συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμὸν οἱ μέγιστοι κύβητοι τῆς σφαίρας εἶναι γεωδαισια-
καὶ γραμμαὶ αὐτῆς. Αἱ παράγωγοι τῆς συνθήκης (1) ἔχουν ἀνηθῆ ὡς πρὸς τὸ τό-
πον ℓ . Λόγω τῶν ιδιοτήτων τῶν ὀρισουσῶν τῇ αὐτῇ συνθήκῃ ἰσχύει καὶ ὡς πρὸς
τυχοῦσαν μεταβλητὴν t .

• Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας $\mathcal{C} = \mathcal{C}(u, v)$ ἔχομεν τὴν αμψύλην $u = u(t)$
καὶ $v = v(t)$. Ὡς γνωστὸν ἔχομεν:

$$\left. \begin{aligned} z' &= z_u \cdot u' + z_v \cdot v' \\ z'' &= z_{uu} (u')^2 + 2z_{uv} u'v' + z_{vv} (v')^2 + z_u \cdot u'' + z_v \cdot v'' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Λαμβάνοντες ὑπὸψιν τοὺς τύπους (2) τῇ εἰσαγωγῇ (1) γράφεται:

$$(N, z_u, z_v) (u'v'' - u''v') + (N, z_u, z_{uu}) (u')^3 + (N, z_v, z_{vv}) (v')^3 + u'(u')^2 [(N, z_u, z_{uv}) + \\ + 2(N, z_v, z_{uv})] + (u')^2 v' [(N, z_v, z_{uu}) + 2(N, z_u, z_{uv})] = 0 \quad (3)$$

τῇ βοήθειᾳ τῶν συμβόλων τοῦ Christoffel (βλ. τύπους (7) § 12) τῇ (3) γράφεται:

$$u' [v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2] - v' [u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2] = 0 \quad (4)$$

→ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ἐάν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν αμψύλην } u = u(v), \text{ λαμβάνοντες οὖ-} \\ \text{τω ὡς ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὴν } v, \text{ τότε θὰ ἔχωμεν: } v' = 1, v'' = 0 \text{ καὶ τῇ εἰσ-} \\ \text{αγωγῇ (4) γράφεται:} \end{array} \right.$

ΠΕΡΑ

ΥΠΕΡΕΣΤ

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dv^2} = \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dv}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \frac{du}{dv} - \Gamma_{22}^1} \quad (5)$$

Ἡ διαφορικὴ εἰσαγωγὴ (5), ἥτις εἶναι δευτέρας τάξεως, ἔχει πάντοτε λύσιν ἐντός
φυσικῶν τῶν ἀνωμαλῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας.

• Ἢδη ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν αμψύλην $u = u(\ell), v = v(\ell)$
τότε, ἐάν αὕτη εἶναι γεωδαισιακὴ αμψύλη, θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν: $z'' = \frac{d^2 z}{d\ell^2} = \frac{dz}{d\ell} = k \cdot v = k \cdot N$.

Ὁ δεῦτερος τῶν τύπων (2) γράφεται:

$$k \cdot N = z_u \frac{d^2 u}{d\ell^2} + z_v \frac{d^2 v}{d\ell^2} + z_{uu} \left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + 2z_{uv} \left(\frac{du}{d\ell}\right) \left(\frac{dv}{d\ell}\right) + z_{vv} \left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 \quad (5).$$

Ἐάν σχηματίσωμεν τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (5) πολλαπλα-
σιάζοντες πρῶτον ἐπὶ z_u καὶ δεῦτερον ἐπὶ z_v καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶναι:

$N \cdot z_u = N \cdot z_v = 0$, καταλήγουμεν εἰς τὰς εἰσιώσεις:

$$\left. \begin{aligned} E \frac{d^2 u}{d\ell^2} + F \frac{d^2 v}{d\ell^2} + \frac{1}{2} E_u \left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + E_v \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{dv}{d\ell} + \left(F_v - \frac{1}{2} G_u\right) \left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 &= 0 \\ F \frac{d^2 u}{d\ell^2} + G \frac{d^2 v}{d\ell^2} + \left(F_u - \frac{1}{2} E_v\right) \left(\frac{du}{d\ell}\right)^2 + G_u \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{dv}{d\ell} + \frac{1}{2} G_v \left(\frac{dv}{d\ell}\right)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ἐάν ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα (6) ὡς πρὸς $\frac{d^2u}{d\ell^2}, \frac{d^2v}{d\ell^2}$ καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (6) τῆς § 12 οἵτινες μᾶς δίδουν τὰ σύμβολα τοῦ Christoffel, καταστήγομεν εἰς τὰς διαφορικὰς ἑξισώσεις :

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\ell^2} + \Gamma'_{11} \left(\frac{du}{d\ell} \right)^2 + 2 \Gamma'_{12} \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{dv}{d\ell} + \Gamma'_{22} \left(\frac{dv}{d\ell} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2v}{d\ell^2} + \Gamma''_{11} \left(\frac{du}{d\ell} \right)^2 + 2 \Gamma''_{12} \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{dv}{d\ell} + \Gamma''_{22} \left(\frac{dv}{d\ell} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν διαφορικῶν ἑξισώσεων τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἔχει μίαν λύσιν εἰς τὴν περιοχὴν $\ell=0$, ἔστω τὴν $u=u(\ell), v=v(\ell)$

Ἐστω $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ ἓνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας καὶ $u=u(\ell), v=v(\ell)$ μία λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἑξισώσεων (7). Ἐστω ὅτι μᾶς δίδονται αἱ ἀρχικαὶ συνθηकाὶ :

$$u(0)=u_0, v(0)=v_0, \frac{du}{d\ell}(0)=\left(\frac{du}{d\ell}\right)_0, \frac{dv}{d\ell}(0)=\left(\frac{dv}{d\ell}\right)_0 \quad \text{ὅς: ρ. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤ}$$

Τότε διὰ τοῦ σημείου $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ διέρχεται μία καὶ μόνον μία γεωδαισιακὴ γραμμὴ ἢ $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u(\ell), v(\ell))$ κατὰ τὴν διεύθυνσιν $\left(\frac{du}{d\ell}\right)_0, \left(\frac{dv}{d\ell}\right)_0$. Οὕτω εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς σημείου M μιᾶς ἐπιφανείας ὑπάρχει μία καὶ μόνον μία γεωδαισιακὴ γραμμὴ διερχομένη διὰ τοῦ M κατὰ μίαν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

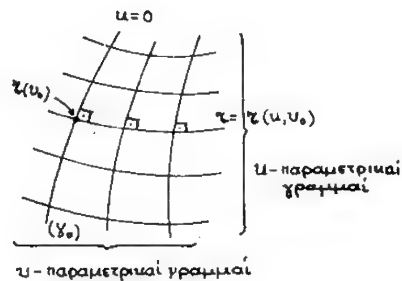
Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τὴν μορφήν $z=f(x,y)$, τότε λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 9, ἡ ἑξίσωσις (5) μετὰ τὴν ἀντιματάστασιν τῶν Γ_{ij}^k (τὰ ὁποῖα ὑπολογίζονται ὑπὸ τῶν τύπων (6) τῆς § 12) γίνεταί :

$$(1+p^2+q^2) \frac{d^2y}{dx^2} = (p \frac{dy}{dx} - q) \left[t \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2s \frac{dy}{dx} + z \right].$$

Δι' ὁλοκληρώσεως ταύτης εὐρίσκομεν ὡς γενικὴν λύσιν $\phi(y, x, c_1, c_2)=0$. Αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ προσδιορίζονται ἐκ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν.

Θά εἰσαγάγωμεν ἥδη ὡς συντεταγμένας μιᾶς ἐπιφανείας παραμετρίους γραμμάς πού ἔχουν μίαν εἰδιυτὴν ιδιότητα. Ἐάν αἱ παραμετρίαι γραμμαὶ εἶναι ὀρθογώνιοι ἀφ' ἑνός ($F=0$) καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ μία οἰσογένεια τῶν παραμετρίων γραμμῶν εἶναι γεωδαισιακὴ τὸ σύνολον τοῦτο καλεῖται σύστημα γεωδαισιακῶν συντεταγμένων. Γεωδαισιακαὶ συντεταγμένοι δύνανται νὰ εἰσαχθῶν ἐπὶ

μιας επιφάνειας κατ' ἀπειρους τρόπους. Έστω $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ είναι ένα αυθαίρετον τόξον (γ_0) επί μιας επιφάνειας $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ (βλ. Σχ.1). Από το σημείον $\mathbf{r}(u_0)$ διέρχεται, συμφώνως προς τ' ἀνωτέρω, μία καὶ μόνον μία γεωδαισιακὴ γραμμὴ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν (γ_0) κατὰ μῆκος τῆς ὁποίας τὸ u ἰσοῦται πρὸς τὸ μῆκος τοῦ τόξου καὶ τοιοῦτον ὥστε: $\mathbf{r}(0, u_0) = \mathbf{r}(u_0)$.



Σχ. 1

• Έν τῶν (7) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμὴ $v =$

σταθ. εἶναι γεωδαισιακὴ ἐὰν $\Gamma_{11}^1 = 0$, ἥτοι $\frac{2E\Gamma_{11}^1 - E\Gamma_{11}^1 - F\Gamma_{11}^1}{2(E\Gamma_{11}^1 - F^2)} = 0$

Ἐάν τὸ δίτυον εἶναι ὀρθογώνιον τότε $F=0$ καὶ ἡ ἀνωτέρω συνθήκη γίνεται $\frac{E_{11}}{G} = 0$ ἢ $E_{11} = 0$, ἥτοι ὁ συντελεστής E πρέπει νὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ u , δηλ. $E = E(u)$. Οὕτω τὸ γραμμικὸν στοιχείον τῆς ἐπιφάνειας γράφεται ἐν προκειμένῳ:

$$d\ell^2 = E(u)du^2 + G(u, v)dv^2 = I \quad (8)$$

Τώρα κατὰ μῆκος μιᾶς γεωδαισιακῆς $v = \text{σταθ.}$, $dv=0$, τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν $u=u_1, u=u_2$ θὰ εἶναι λόγῳ τῶν (8):

$$\ell = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u)} du$$

→ Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μῆκος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ v κατὰ συνέπειαν καὶ τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς.

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι τὸ μῆκος τοῦ τόξου δύναται νὰ εἰσαχθῇ πάντοτε ὡς μία παράμετρος κατὰ μῆκος τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν γεωδαισιακῶν συντεταγμένων, εἰσάγοντες οὕτω τὸν παραμετρικὸν μετασχηματισμόν:

$$\rightarrow u^* = \int_{u_1}^u \sqrt{E(t)} dt = \ell, \quad v = v$$

Ἐάν λοιπὸν ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ἐκφράζεται εἰς τὸ σύνολον τῶν γεωδαισιακῶν συντεταγμένων τοιούτων, ὥστε ἡ παράμετρος u εἶναι μία φυσικὴ παράμετρος κατὰ μῆκος τῶν γεωδαισιακῶν, τότε $E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = 1$ καὶ ὁ τύπος (8) γράφεται:

$$d\ell^2 = du^2 + G(u, v)dv^2 \quad (9)$$

Ο τύπος (9) είναι μεγάλης σημασίας και ευφράζει το γραμμικόν στοιχείον της επιφανείας εις γεωδαισιακούς συντεταγμένους, όπου ή u είναι φυσική παράμετρος.

• Έστωσαν (u_0, u_1) , (u_1, u_1) αἱ γεωδαισιακαὶ συντεταγμέναι τῶν σημείων M_0 καὶ M_1 τῆς επιφανείας μετ' ἑξισωσιν $z = z(u, v)$, ὅπου u φυσικὴ παράμετρος. Ἐνα τυχόν τόξον διερχόμενον διὰ τῶν σημείων M_0 καὶ M_1 ὁρίζεται ὑπὸ μιᾶς ἑξισώσεως τῆς μορφῆς $v = \theta(u)$ εἰς τὸ ἀνωτέρω σύστημα τῶν συντεταγμένων μετὰς ἀρχικῆς συνθήκας $v_0 = \theta(u_0)$ καὶ $v_1 = \theta(u_1)$. Τὸ γραμμικόν στοιχείον dl^2 τῆς επιφανείας, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$dl^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$$

Ἐπὶ τῆς θεωρηθεῖσης καμπύλης δὲ ἔχωμεν :

$$(\widehat{M_0 M_1}) = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{du^2 + G(u, \theta(u)) \theta'^2(u)} du = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + G(u, \theta(u)) \theta'^2(u)} du$$

Συνεπῶς $(\widehat{M_0 M_1}) \geq |u_1 - u_0|$ καὶ $\min (\widehat{M_0 M_1}) = |u_1 - u_0|$, συμβαίνει δὲ τὸ ἐλάχιστον ὅταν $\theta'(u) = 0$, δηλ. ἡ θεωρηθεῖσα καμπύλη $v = \theta(u)$ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ u , δηλ. $v = \text{σταδ.}$ Ἀλλὰ μετὰ $v = \text{σταδ.}$ ἔχουν ἀναφανῆ αἱ γεωδαισιακαὶ καμπύλαι εἰς τὸ σύστημα τῶν γεωδαισιακῶν συντεταγμένων. Ἥτοι, ἵνα τὸ τόξον $\widehat{M_0 M_1}$ ἔχῃ ἐλάχιστον μήκος, ἀρκεῖ νὰ εἶναι τοῦτο τόξον γεωδαισιακῆς γραμμῆς (τῆς $v = \text{σταδ.}$) διερχομένης διὰ τῶν σημείων M_0 καὶ M_1 .

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ἡ κατωτέρω σπουδαία ιδιότης τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν :

Θεώρημα X-14-1. Ἐπὶ ἐνὸς τμήματος μιᾶς επιφανείας ἡ γραμμὴ ἐλαχίστου μήκους πού ἐνώνει δύο σημεία M_0, M_1 , ἀποτελεῖται ἀπὸ τόξα γεωδαισιακῶν γραμμῶν (εἶναι μιὰ γεωδαισιακὴ ἂν ἡ ὅλη καμπυλότης εἶναι παντοῦ ἀρνητικὴ))

Συμφώνως πρὸς τὴν ἀνωτέρω ιδιότητα αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι εὐθεῖαι γραμμαὶ.

Ἐφαρμοαὶ 12/ Ἐπὶ μιᾶς σφαίρας δείξατε ὅτι: ἡ γεωδαισιακὴ ἢ διερχομένη ἔκ τινος σημείου καὶ τῆς ὁποίας δίδεται ἡ ἐφαπτομένη εἰς αὐτὸ εἶναι ὁ μέριτος κύκλος τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τῆς ἐν λόγῳ ἐφαπτομένης

Ἀπόδειξις: Λαμβάνοντες ὡς ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἡ εἰσώσις αὐτῆς εἶναι:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1)$$

Ἡ εἰσώσις τῶν γεωδαισιακῶν εἶναι:

$$(H, \tau, \tau') = 0 \quad (2)$$

Εἰς τὴν σφαῖραν ὁμῶς ἔχομεν:

$$\tau = R \cdot H \quad (3)$$

Ἡ (2), λόγῳ τῆς (3), γίνεται:

$$(x, y, z) = 0 \quad (4) \quad \eta'$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ d^1x & d^1y & d^1z \end{vmatrix} = 0 \quad (5) \quad \eta''$$

$$\begin{vmatrix} Ax + By + Cz & y & z \\ d(Ax + By + Cz) & dy & dz \\ d^1(Ax + By + Cz) & d^1y & d^1z \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Ἡ A, B, C σταθεραί. Ἡ εἰσώσις (6) πληροῦται διὰ $Ax + By + Cz = 0$ (7) καὶ τυχού-
σας τιμὰς τῶν σταθερῶν A, B, C . Ἡ (7) παριστᾷ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέν-
τρου τῆς σφαίρας καὶ τὸ ὁποῖον τέμνει, ὡς γνωστόν, ταύτην κατὰ μέγιστον κῆ-
ρον. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καθορίζεται πλήρως, ἐὰν δοθῇ τὸ σημεῖον ἐπὶ τῆς σφαί-
ρας καθὼς καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς αὐτό.

29. Δείξατε ὅτι αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἑλικοὺς.

Ἀπόδειξις: Ἐστω b τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα συγχρηματικὸν πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ
κυλίνδρου. Ἐστω (γ) μία γραμμὴ ἐπ' αὐτοῦ καὶ τ, ν τὸ ἐφαπτομενικὸν καὶ τὸ
κάθετον διάνυσμα ταύτης καὶ N τὸ κάθετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ γραμμὴ (γ) θά εἶναι γεωδαισιακὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $\nu = N$. Εἶναι δὲ $N \cdot b = 0$
καὶ λόγῳ τῆς προηγουμένης σχέσεως $\nu \cdot b = 0$. Ἐξ ἄλλου $\nu = \frac{t}{k}$ (k : καμπυλότης
τῆς γραμμῆς) ὅθεν $t \cdot b = 0$ ἢ $\frac{d}{dt}(\tau \cdot b) = 0$, ἔξ ἧς $\tau \cdot b = c$ (c : σταθερά) ἢ τε-
λευταία ὁμοῦς εἶναι ἡ εἰσώσις τῆς ἑλικοῦς (βλ. § 239, πρ. 29).

3ε/ Νά προσδιορισθοῦν αἱ γεωδαισιακαὶ τοῦ ὀρθοῦ κυλινδρικοῦ κώνου:

$\tau = (u \eta \mu \alpha \sin \theta) i + (u \eta \mu \alpha \mu \theta) j + (u \sin \alpha) k$, $\alpha = \text{σταθερά}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $u > 0$ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐξισώσεων (7).

Λύσις: Εἶναι $E = \tau_u \cdot \tau_u = 1$, $F = \tau_u \cdot \tau_\theta = 0$, $G = \tau_\theta \cdot \tau_\theta = u^2 \eta \mu^2 \alpha$ καὶ $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{11}^4 = 0$, $\Gamma_{12}^1 = -u \eta \mu^2 \alpha$, $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}$. Οὕτω ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (7) γίνεται: $\frac{d^2 \theta}{d\ell^2} = -\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{d\theta}{d\ell}$. Θέτοντες $\phi = \frac{d\theta}{d\ell}$ ἐν τῇ ἀνωτέρῳ ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\frac{1}{\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\ell} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{du}{d\ell}$. Ἐντεῦθεν $\log \phi = -2 \log u + k$ ἢ $\phi = \frac{d\theta}{d\ell} = \frac{c}{u^2}$ ἢ $\eta \mu^2 \alpha$, ὅπου $c = e^k \eta \mu^2 \alpha$. Ἐπειδὴ τὸ ℓ εἶναι τὸ μήκος τοῦ τόξου δὲ ἔχουμεν:

$$1 = \left| \frac{d\tau}{d\ell} \right|^2 = \left| \tau_u \cdot \frac{du}{d\ell} + \tau_\theta \cdot \frac{d\theta}{d\ell} \right|^2 = E \left(\frac{du}{d\ell} \right)^2 + 2F \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{d\theta}{d\ell} + G \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2 \quad \text{ἢ}$$

$$1 = \left(\frac{du}{d\ell} \right)^2 + u^2 \eta \mu^2 \alpha \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2. \text{ Ἀντικαθιστώντες } \frac{d\theta}{d\ell} = \frac{c}{u^2} / \eta \mu^2 \alpha \text{ λαμβάνομεν:}$$

$$\frac{du}{d\ell} = \sqrt{u^2 \eta \mu^2 \alpha - c^2} / u \eta \mu \alpha.$$

Ὅθεν, $\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{c} \cdot u \cdot \eta \mu \alpha \cdot \sqrt{u^2 \eta \mu^2 \alpha - c^2}$ ἢ $u = A \tan[(\eta \mu \alpha) \theta + B]$, ὅπου A, B σταθεραί.

4ε/ Νά εὐρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῆς ἐν περιστροφῇ ἐπιφανείας $\tau = u \sin v \cdot i + u \eta \mu v \cdot j + f(u) \cdot k$.

Λύσις: Διὰ τὴν ἐπιφάνειαν ἔχομεν:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f' \cdot f''}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^3 = -\frac{u}{1+f'^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u}, \quad \Gamma_{12}^3 = 0$$

Ἡ δευτέρα τῶν ἐξισώσεων (7) γίνεται: $\frac{d^2 u}{d\ell^2} + 2u^{-1} \cdot \frac{du}{d\ell} \cdot \frac{dv}{d\ell} = 0$ (1)

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ u^2 , ὅτε αὕτη καὶ ἀδιστάται τέλειον διαφορικὸν καὶ ἐν τῇ ὁποίᾳ λαμβάνομεν: $u^2 \frac{du}{d\ell} = c_1$ (2)

$$\text{Εἶναι δὲ } d\ell^2 = (1+f'^2) du^2 + u^2 dv^2 \quad (3)$$

Δι' ἀπαθείφης τοῦ $d\ell$ μεταξὺ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν:

$$u^2 dv^2 = c_1^2 (1+f'^2) du^2 + c_1^2 u^2 dv^2 \quad (4). \text{ Ἐπιλύοντες τὴν (4) ὡς πρὸς } dv \text{ εὐρίσκουμεν:}$$

$$dv = \pm c_1 \cdot u^{-1} \cdot \sqrt{(1+f'^2)} \cdot (u^2 - c_1^2) du \quad (5)$$

Δι' ολοκληρώσεως τῆς (5) εὐρίσκουμεν:

$$v = \pm c_1 \int \frac{1}{u} \cdot \sqrt{\frac{1+f'^2}{u^2 - c_1^2}} du + c_2, \quad c_2: \text{σταθερά}$$

Αἱ δύο σταθεραί c_1, c_2 δύνανται νά προσδιορισθοῦν ἐν τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν, ἐάν ὀρίσωμεν : α) Εἴτε δύο σημεία τῆς ἐπιφανείας διὰ τῶν ὁποίων διέρχεται ἡ γεωδαισιαική, β) Εἴτε ἓνα σημεῖον καί τήν γωνίαν τήν ὁποίαν σχηματίζει μετὰ τῆς $u = c'$ (ἡ ἄλλης σταθερᾶς διευθύνσεως διερχομένης δι' αὐτοῦ).

§ 15. ΑΝΑΠΤΥΚΤΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ.

Εἰς τήν §1 ἐδώσαμεν τόν ὀρισμόν τῆς εὐδαιορενοῦς ἐπιφανείας καί εὐρωμεν ὅτι ἡ εἰσῶσις ταύτης εἶναι :

$$z = \rho(u) + u \cdot g(u) \quad (1)$$

ὅπου $\rho = \rho(u)$ ἡ εἰσῶσις τῆς ὁδηγοῦ καί $g(u)$ δεδομένη διανυσματικὴ συνάρτησις τοῦ u , μέ $|g(u)| = 1$. Ἐάν εἰς τὴν δώσωμεν τήν τιμὴν $u = u_0$, λαμβάνομεν τὴν γενετείραν :

$$z = \rho(u_0) + u \cdot g(u_0) \quad (2)$$

Ὁρισμός X-15-1. Μία εὐδαιορενὴς ἐπιφάνεια θὰ καλεῖται ἀναπτυκτική, ἐάν τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας τῆς παραμένει σταθερόν.

Ὁ ἀνωτέρω ὀρισμός ἰσοδυναμεῖ μέ τὸν αὐτόλουτον :

Ἀναπτυκτικὴ εἶναι ἡ εὐδαιορενὴς ἐπιφάνεια εἰς τὴν ὁποίαν κατὰ μῆκος καθε γενετείρας τῆς τὸ καθετον διάνυσμα παραμένει σταθερόν.

Ἡδὴ ὥς ἀναζητήσωμεν τὴν ἱκανὴν καί ἀναρκαίαν συνθήκην, ἵνα μία εὐδαιορενὴς ἐπιφάνεια εἴναι ἀναπτυκτικὴ. Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἓνα σημεῖον τῆς γενετείρας $z = z(u_0, u)$ περιέχει τὰ διανύσματα $\tau_u(u_0, u) = \rho'_u(u_0) + u \cdot g'_u(u_0)$ καί $\tau_v(u_0, u) = g(u_0)$. Διὰ $u = 0$ αὐτὰ τὰ διανύσματα εἶναι : $\tau_u(u_0, 0) = \rho'_u(u_0)$ καί $\tau_v(u_0, 0) = g(u_0) = \tau_v(u_0, u)$. Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται, ὅτι τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας, ἔστω ἡδὲ τῆς $u = u$, παραμένει σταθερόν, ἐάν καὶ μόνον ἐάν, τὰ τρία διανύσματα $\rho'_u(u) + u g'_u(u)$, $g(u)$ καί $\rho'_u(u)$ εἶναι συνεπίπεδα, δηλ. $(\rho'_u + u g'_u, g, \rho'_u) = 0$ (3).

Δι' ἀναλήσεως τοῦ ἀνωτέρω μιουτοῦ ρινομένου λαμβάνομεν :

$$(\rho'_u, g, g'_u) = 0 \quad (4)$$

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται :

Πρόταση X-15-1. Ἡ ἑαυτή καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια $\tau = p(u) + u \cdot q(u)$ εἶναι ἀναπτυκτὴ, εἶναι νὰ πληροῦνται ἡ συνθήκη (4) ὑπὸ τὴν ὑπόθεσιν $\rho'_u \times q \neq 0$.

Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι: Κάθε ἐπιφάνεια παραγομένη ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων μίας σφαιρικοῦ καμπύλης εἶναι ἀναπτυκτὴ.

Πράγματι, ἡ εἰσῶσις τῆς ἐπιφανείας εἶναι $\tau = p(u) + u \cdot p'(u)$, ὅπου ἡ u θεωρεῖται φυσικὴ παράμετρος τῆς καμπύλης $p = p(u)$. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ἡ (4) γίνεται: $(\rho'_u, \rho'_u, \rho''_u) = 0$, ὁδὲν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτὴ.

Πρόταση X-15-2. Ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια $\tau = p(u) + u \cdot q(u)$, ὅπου $|q(u)| = 1$ καὶ $a < u < b$ εἶναι ἀναπτυκτὴ, τότε τὸ διάστημα $a < u < b$ δύναται νὰ ὑποδιαιρεθῇ εἰς ὑποδιαστήματα $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$, τοιαῦτα, ὥστε εἰς ἕαστον τούτων ἡ ἐπιφάνεια εἶναι εἴτε ἓνα ἐπίπεδον, εἴτε ἓνας κυλινδρὸς, εἴτε ἓνας κώνος εἴτε τέλος ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἐφαπτομένων μίας καμπύλης.

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτὴ, συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα ἀνωτέρω (βλ. τύπον (4)), τὰ διανύσματα: ρ'_u, q, q'_u εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα καὶ ὡς ἐν τούτου ὑπάρχουν τρεῖς συναρτήσεις $k_1(u), k_2(u), k_3(u)$, ὅπου $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$ τοιαῦται, ὥστε νὰ ἔχωμεν: $k_1 \cdot \rho'_u + k_2 \cdot q + k_3 \cdot q'_u = 0$ (1)

α). Ἐστω ὅτι εἰς ὑπόλοιπον διάστημα $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$, εἶναι $k_1(u) = 0$ καὶ κατὰ συνέ-
 ἡ σχέσις (1) γίνεται:

$$k_2 \cdot q + k_3 \cdot q'_u = 0, \quad (2), \quad \text{ὅπου } k_2^2 + k_3^2 \neq 0.$$

Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $|q(u)| = 1$, ἥτοι $q^2(u) = 1$ καὶ ὡς ἐν τούτου $q \cdot q'_u = 0$. Πολλαπλασιάζοντες τὴν (2) ἐσωτερικῶς ἐπὶ q λαμβάνομεν:

$$k_2 \cdot q \cdot q + k_3 \cdot q \cdot q'_u = 0 \quad \text{ἢ} \quad k_2 |q|^2 = 0 \quad (3)$$

Ἐν τῆς (3) συνάγεται $k_2(u) \equiv 0$ διὰ $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$. Ἐπειδὴ $k_3(u) \neq 0$ διὰ $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$, ἐν τῆς (2) ἔπεται ὅτι $q'_u = 0$ ἢ $q = \text{σταθ} = a$ (4) διὰ $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$.

Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως προκύπτει ὅτι αἱ γενέταιραι τῆς ἐπιφανείας εἶναι παράλληλοι μεταξύ των καὶ ὡς ἐν τούτου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἓνας κυλινδρὸς καὶ ὡς μερικὴ περίπτωσις ἓνα τμήμα ἐπίπεδου.

β) Ἄς ὑποθέσωμεν ἥδη ὅτι $k_1(u) \neq 0$ διὰ $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$, τότε ἡ ἔξισωσις (1) γράφεται:

$$\rho'(u) = \lambda_1 g(u) + \lambda_2 g'(u) \quad (5)$$

ὅπου ἐτέθη $\lambda_1 = -\frac{k_2}{k_1}$ καὶ $\lambda_2 = -\frac{k_3}{k_1}$.

Ἡ ἔξισωσις τῆς ἐπιφανείας δύναται νὰ γραφῇ οὕτω:

$$z = \rho(u) - \lambda_2 g + u_1 g \quad (6), \text{ ὅπου } u_1 = u + \lambda_2$$

Ἄς θέσωμεν $\rho_1(u) = \rho(u) - \lambda_2 g$ καὶ ἡ (6) γράφεται:

$$z = \rho_1(u) + u_1 g \quad (7)$$

Εἶναι δέ: $\rho'_1(u) = \rho'(u) - \lambda'_2 g - \lambda_2 g' \quad (8)$ καὶ λόγῳ τῆς (5) ἡ (8) δίδει:

$$\rho'_1(u) = \lambda_1 g + \lambda_2 g' - \lambda'_2 g - \lambda_2 g' = (\lambda_1 - \lambda'_2) g \quad (9).$$

i). Ἐστω $\lambda_1 - \lambda'_2 \equiv 0$ διὰ $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$, τότε ἐκ τῆς (8) λαμβάνομεν $\rho'_1(u) = 0$, ἔξ τῆς $\rho_1(u) = \text{σταθ.} = a$.

Ἡ ἔξισωσις (7) τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$z = a + \{u + \lambda_2(u)\} \cdot g \quad (10)$$

Ἡ (10) παριστᾷ ἓνα κῶνον ἢ ἓνα ἐπίπεδον (διὰ τί;).

ii). Ἐστω $\lambda_1 - \lambda'_2 \neq 0$ διὰ $\alpha_{i-1} < u < \beta_{i-1}$, τότε ἐκ τῆς (9) λαμβάνομεν:

$\rho'_1(u) = (\lambda_1 - \lambda'_2) \cdot g$, ὅτε ἡ ἔξισωσις (7) τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$z = \rho_1(u) + \frac{(u + \lambda_2(u))}{\lambda_1 - \lambda'_2} \cdot \rho'_1(u) \quad (11)$$

Ἡ (11) παριστᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης $\rho = \rho_1(u)$.

Ἡ ἀνάπτυκτὴ ἐπιφάνεια ὡς ἡ περιβάλλουσα μονοπαραμετρίως οἰογενείας ἐπιπέδων.

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν μονοπαραμετρίαν οἰογένειαν τῶν ἐπιπέδων:

$$A(a)x + B(a)y + \Gamma(a)z + \Delta(a) = 0 \quad (1) \quad a: \text{παραμέτρος}$$

ὥς γνωστόν (βλ. κεφ. VI § 3) ἡ περιβάλλουσα τῆς οἰογενείας (1) προκύπτει δι' ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου a μεταξὺ τῶν ἔξισώσεων:

$$\left. \begin{aligned} A(a)x + B(a)y + \Gamma(a)z + \Delta(a) &= 0 \\ A'(a)x + B'(a)y + \Gamma'(a)z + \Delta'(a) &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Δι' ἓν σταθερόν a αἱ ἐξισώσεις (2) δίδουν τὰς ἐξισώσεις μιᾶς εὐθείας γραμμῆς (La) υαθουμένης χαρακτηριστικῆς εὐθείας - υαδοῦ ἐυάστη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων παριστᾷ ἓνα ἐπιπέδον - υαί ὡς ἐυ τούτου ἡ ἐπιφάνεια S πού εἶναι ἡ περιθάλλουσα τῆς ἀνωτέρω οἰομενείας (1) θεωρεῖται ὁ γ.τ. τῶν εὐθειῶν (La) , ἥτοι: ἡ S εἶναι μία εὐδειογενῆς ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια S διὰ a -σταθ. ἐφάπτεται κάποιου ἐπιπέδου ἐυ τῆς οἰομενείας μὲ ἐξισωσιν τὴν (1) υατὰ μῆκος τῆς εὐθείας (La) , δηλ. ἡ S ἔχει τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπιπέδον υατὰ μῆκος τῆς γενετείρας (La) . Ἡτοι, ἡ S εἶναι μία ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια. Οὕτω, μία οἰομενεία ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς S ἐξαρτᾶται μόνον ἐυ τῆς παραμέτρου a υαί ἡ ὁποία (παραμέτρος) προσδιορίζει, λόγῳ τῶν (2), τὰς γενετείρας (La) , ἐνῶ ἐν γενεῖ μία οἰομενεία ἐφαπτομένων ἐπιπέδων μιᾶς τυχούσης οἰομενείας ἐξαρτᾶται, ὡς γνωστὸν, ἐυ δύο παραμέτρων.

Θά δεῖξωμεν ὅτι: Πᾶσαι αἱ χαρακτηριστικαὶ εὐθεῖαι (La) εἶναι ἐφαπτόμεναι μιᾶς υαμπύλης (γ) τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας S .

Πρὸς τοῦτοις διαφορίσωμεν ὡς πρὸς a μιαν φορὰν εἰσέτι τὴν δευτέραν τῶν (2), ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$A''(a)x + B''(a)y + \Gamma''(a)z + \Delta''(a) = 0 \quad (3).$$

Ἡ (3) εἶναι μία ἐξίσωσις ἐπιπέδου υαί ὁρίζει ἐπὶ τῆς (La) ἓνα σημεῖον M_a (τὴν μὴ εὐθείας υαί ἐπιπέδου). Ὁ γ.τ. τῶν σημείων M_a , ὅταν τὸ a μεταβάλλεται, εἶναι μία υαμπύλη, ἔστω (γ) , υειμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας υαί ἡ ὁποία υαλλεῖται γραμμὴ ἀναυάμψεως. Δι' ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων (1), (2) υαί (3) ὡς πρὸς x, y, z εὐρίσκουμεν τὰς παραμετρυὰς ἐξισώσεως αὐτῆς ἥτοι: $x = \varphi(a), y = f(a), z = \sigma(a)$, ὅπου τὸ a εἶναι παράμετρος.

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν τὸ ἐφαπτομενικὸν στοιχεῖον $d\pi$ τῆς γραμμῆς ἀναυάμψεως (γ) υαί ἔστω (dx, dy, dz) αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ. Διὰ διαφορίσεως τῶν (2) λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} A(a)dx + B(a)dy + \Gamma(a)dz &= 0 \\ A'(a)dx + B'(a)dy + \Gamma'(a)dz &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

Αι σχέσεις (4) και (2) εϋφράδουν ότι η εφαπτομένη της αμπτύλης (γ) είναι πα-
ράλληλος πρὸς τὴν γενέτειρα (La) καὶ ἐπειδὴ αὐτὰ ἔχουν κοινὸν σημεῖον θα συ-
μπίπτουν.

• Ἐν τῶν ἀνωτέρω ἐπεταὶ ὅτι: Κάθε ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ
ὥς ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ τῶν εφαπτομένων μιᾶς αμπτύλης τοῦ χώρου.

1 / Ἡ γραμμὴ ἀναυάμψεως δύναται νὰ εϋφυλισθῇ εἰς ἓνα σημεῖον πεπερασμένον
ἢ καὶ μὴ, ὅτε ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια γίνεται μία κυνιυτὴ ἢ κυλινδρική ἐπιφάνεια.

• Ἐστω, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ποὺ ὀρίσεται ὥς ἡ περιβάλλου-
σα τῆς οἰομενείας τῶν ἐπιπέδων μέ ἐξίσωσιν τὴν (1) δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν
μορφὴν $z = f(x, y)$. Τὰ διευθύνοντα συντημίονα τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν
θά εἶναι συναρτήσεις τοῦ a , ἥτοι:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = W_1(a), \quad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = W_2(a), \quad \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = W_3(a) \quad (1)$$

ὅπου $W_1^2(a) + W_2^2(a) + W_3^2(a) = 1$.

Ἀπαλείφοντες τὸ a μεταξὺ τῶν δύο πρώτων τῶν (1) (ἡ τρίτη εἶναι συνέπεια αὐτῶν)
θα λάβωμεν μίαν σχέσιν τῶν p καὶ q , ἔστω τὴν $q = \varphi(p)$ (2). Ἡ (2) δύναται νὰ ἱα-
νοποιῇται ἐφ' ὅλου μήρου τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας. Διαφορίζοντες τὴν (2) ὡς πρὸς
 x καὶ y λαμβάνομεν:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial z}{\partial y \partial x} = S = \varphi'(p) \frac{dp}{dx} = \varphi'(p) \cdot r, \quad \text{ἥτοι: } S = \varphi'(p) \cdot r \quad (3).$$

$$\text{Ὀμοίως: } \frac{dq}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y^2} = t = \varphi'(p) \frac{dp}{dy} = \varphi'(p) \cdot s, \quad \text{ἥτοι: } t = \varphi'(p) \cdot s \quad (4)$$

Ἐν τῶν (3) καὶ (4), δι' ἀπαλείψεως τῆς $\varphi'(p)$, λαμβάνομεν:

$$\boxed{rt - s^2 = 0} \quad (5)$$

Ὅθεν, τὰ σημεῖα τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰ-
νογενείας τῶν ἐπιπέδων (1), ἱκανοποιοῦν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (5)

Ἐν τῆς (5) προκύπτει, ὅτι πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας εἶναι πα-
ραβολικά.

Με τὴν βοήθειαν τῶν Διαφ. ἐξισώσεων μετὰ μεριγῶν παραγῶγων ἀποδεικνύε-
ται ὅτι, ἡ (5) παριστὰ οἰομενείαν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανείων.

ὥς γνωστόν ἡ ὀλκιή καμπυλότητα μιᾶς ἐπιφανείας παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:
 $k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ (βλ. σχετικῶς βελ. 316, § 8).

ἘΕ ἄλλου, ἐὰν ἡ ἐπιφάνεια δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξίσωσης $z = f(x, y)$, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἐμφράσεις τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως, συναρτήσει τῶν p, q, r, s, t (βλ. § 9), δὲ ἔχωμεν: $k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = rt - s^2$.

Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω.

Πρότασις X-15-3. Μία ἐπιφάνεια μέ ὀλκιή καμπυλότητα μηδέν εἰς ὅλα τῆς τάση-
μεῖα εἶναι ἀναπτυκτὴ.

Ἀπόδειξις: Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια S μέ ἐξίσωσιν: $z = z(u, v)$, ὅπου ὑποθέτομεν $k \equiv 0$ εἰς ὅλα τῆς τάση-
μεῖα. Ἐπειδὴ $k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, δὲ ἔχωμεν: $LN - M^2 = 0$ ὡς πρὸς u, v . Ἐπειδὴ ὑπο-
θέτομεν ὅτι δέν ὑπάρχουν ἐπίπεδα τιμήματα τῆς ἐπιφανείας, ἔπεται ὅτι ἕναστον σημεῖον
τῆς εἶναι παραβολικόν καὶ οὕτω σὲ καθε σημεῖον τῆς ἀντιστοιχεῖ μία μόνον ἀσυμ-
πτωτικὴ διεύθυνσις $\frac{dv}{du}$ ἱκανοποιούσα τὴν ἐξίσωσιν $\Pi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$, ἢ
τὴν $N \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2M \frac{dv}{du} + L = 0$. ἘΕ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν λύσιν: $\frac{dv}{du} = -\frac{M}{N} = -\frac{L}{M}$. Οὕτως ἔ-
χομεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S ὁρισμένον μονοσημάντως ἓνα πεδίον διευθύνσεων, τὸ ὁ-
ποῖον δημιουργεῖ μιαν οἰσογένειαν γραμμῶν γ_a ἐπὶ τῆς S καὶ ἡ ὁποία (οἰσογένεια)
καλύπτει τὴν S .

Ἐν τῆς ἐπιλύσεως τῆς διαφ' ἐξίσωσης $N dv + M du = 0$ εἰς τὸ πεδίον τῶν (u, v) ἀπο-
υτῶμεν μιαν οἰσογένειαν ὁλοκληρωτικῶν γραμμῶν $v = v(u, c)$, τῶν ὁποίων αἱ εἰσὶνες
ἐπὶ τῆς S εἶναι ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας. Λέγομεν, ὅτι κατὰ μῆκος
μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς, ἔστω γ_a , τῆς ἐπιφανείας, τὸ καθετον διάνυσμα
 $N = N(u, v(u))$ ἔχει σταθερὰν τιμὴν, ἔστω \bar{C}_a . Ἐπειδὴ ἡ διεύθυνσις εἶναι ἀσυμπτωτικὴ,
ἡ καθετος καμπυλότης $k_n = \frac{\Pi}{I}$ κατὰ μῆκος αὐτῆς εἶναι μηδέν. Ἐφαρμόζοντες δὲ
τὸν τύπον τοῦ Rodrigues (βλ. § 10, τύπον (7)), ἥτοι $dN = -k_n \cdot d\tau$ ἔχομεν ὅτι,
 $dN(u, v(u)) = 0$, δηλ. $N(u, v(u)) = \bar{C}_a$ κατὰ μῆκος τῆς γ_a . ἘΕ αὐτοῦ ἔπεται, ὅτι ἡ
 γ_a κεῖται ἐφ' ἐνός ἐπιπέδου, ἔστω Π_a , διότι πάντα τὰ ἐφαπτομενικά διανύσματα τῆς
 γ_a εἶναι καθετὰ πρὸς τὸ σταθερὸν διάνυσμα \bar{C}_a . Τὰ ἐπίπεδα Π_a ἀποτελοῦν μιαν μο-
νοπαραμετρικὴν οἰσογένειαν ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν διὰ περιβάλλουσιν τὴν S , διότι
ἡ S ἐφάπτεται καθε ἐπιπέδου Π_a κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς γ_a , παράγεται δὲ ἀπὸ

τὰς γραμμάς γ_a . Ὅθεν, συμφώνως πρὸς τὰ λεχθέντα ἀνωτέρω εἰς τὴν παροῦσαν §, ἡ S ὡς παραγομένη ὑπὸ μιᾶς μονοπαραμετρίτης οἰογενείας ἐπιπέδων εἶναι ἀναπτυκτὴ καὶ αἱ γραμμαὶ γ_a , κατὰ μήκος τῶν ὁποίων τὸ ἐφαπτομενιὸν ἐπίπεδον Π_a παραμένει σταθερόν, δὲ εἶναι εὐθεῖαι, δὲ εἶναι δὲ αὗται αἱ καλούμεναι *καρτηριστικαὶ γραμμαὶ* τῶν Π_a .

Παραδείγματα: 1% Προσδιορίσατε τὴν συνάρτησιν $\varphi(u)$ εἰς τρόπον ὥστε ἡ εὐδαιγενὴς ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ τῆς μονοπαραμετρίτης οἰογενείας τῶν εὐδαιγῶν $x=5+2u\varphi(u)+u$, $y=u\varphi'(u)-5z$ νὰ εἶναι ἀναπτυκτὴ.

Λύσις: θέτομεν $z=v$ καὶ ἡ εἰσώσις τῆς ἐπιφανείας γράφεται:

$$\begin{aligned} r &= (5+2u\varphi(u)+uv)i + (u\varphi'(u)-5v)j + v \cdot k = \\ &= \{(5+2u\varphi(u))i + u\varphi'(u)j\} + v\{u \cdot i - 5j + k\} = p(u) + v \cdot q(u). \end{aligned}$$

$$\text{Εἶναι: } p'_u = 2(\varphi(u) + u\varphi'(u))i + (\varphi''(u) + 2u\varphi(u)\varphi'(u))j, \quad q'_u = i.$$

Ἄρκει τὸ μιχτόν γινόμενον (p'_u, q, q'_u) νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν, ἥτοι ἄρκει νὰ ἔχωμεν:

$$\begin{vmatrix} 2(\varphi(u)+u\varphi'(u)) & \varphi''(u)+2u\varphi(u)\varphi'(u) & 0 \\ u & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ἀναπτύσσοντες τὴν ἀνωτέρω ὀρίσουσιν λαμβάνομεν:

$$\varphi''(u) + 2u\varphi(u)\varphi'(u) = 0, \quad \text{ἢ ἐὰν } \varphi(u) \neq 0$$

$$\text{ἔχομεν:} \quad 2u \frac{d\varphi}{du} + \varphi = 0.$$

Ἐκ τῆς ῥηθρησείας τῆς τελευταίας διαφ. εἰσώσεως λαμβάνομεν: $\varphi(u) = C \cdot u^{-\frac{1}{2}}$, $u > 0$ καὶ C : ἀνδαίρετος σταθερά.

2% Νὰ εὐρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ πρῶται καθετοὶ μιᾶς καμπύλης σχηματίζουν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν.

Λύσις: Ἐστω $p = p(\ell)$ ἡ εἰσώσις τῆς καμπύλης. Ἡ εὐδαιγενὴς ἐπιφάνεια πού σχηματίζουν αἱ πρῶται καθετοὶ δὲ ἔχῃ ὡς εἰσώσιν:

$$r = p(\ell) + v \cdot v \quad (1).$$

θά εὐρωμεν, λοιπόν, πότε πληροῦται ἡ συνθήκη :

$$(\dot{\rho}, \ell), \nu, \dot{\nu}) = 0 \quad (2)$$

Ἐν τῶν τύπων τοῦ Frenet ἔχομεν :

$$\dot{\rho} = \tau, \dot{\nu} = -k\tau + \sigma\theta \text{ καὶ ὁ (2) γίνεται:}$$

$$(\tau, \nu, -k\tau + \sigma\theta) = 0 \quad (3) \text{ ἢ}$$

$$(\tau, \nu, \sigma\theta) = 0 \quad (4)$$

Ἰνα ἰσχύῃ ἡ (4), ἀρμεῖ τό $\sigma = 0$, δηλ. ὅταν ἡ καμπύλη εἶναι ἐπίπεδος.

33/ Νά εὐρεθῇ ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη ὑπὸ τῶν ἐγγυτᾶτων ἐπιπέδων τῆς καμπύλης; $x=t, y=t^2, z=t^3$.

Λύσις: Εὐνόμως εὐρίσκουμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ ἐγγυτᾶτου ἐπιπέδου εἶναι: $t^3 - 3t^2X + 3tY - Z = 0$. (1). Ἡ (1) παριστᾷ μίαν μονοπαραμετρικὴν οἰσογένειαν ἐπιπέδων (t : παράμετρος). Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν τὴν παραγομένην ὑπὸ τῆς οἰσογενείας (1) παραγωγίζομεν ταύτην ὡς πρὸς t , ὅτε λαμβάνομεν:

$$t^2 - 2tX + Y = 0 \quad (2)$$

Δι' ἀπαλειφῆς τῆς t μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$(XY - Z)^2 - 4(X^2 - Y)(Y^2 - XZ) = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἄς σημειωθῇ ὅτι παριστοῦν τὴν ἐφαπτομένην τῆς θεωρηθείσης καμπύλης.

§ 16. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Εἰς τὴν παρούσαν παράγραφον δίδομεν, λίαν συντόμως, τινὰ περὶ τῆς ἀπεικονίσεως τῶν ἐπιφανειῶν. Πληρεστέραν μελέτην βλ. "Θεωρία Ἐπιφανειῶν, Μ. Μπρίκα, Τεύχος I, Κεφ. 43".

I. Ἰσομετρικὴ ἀπεικόνισις. Ἐστωσαν αἱ ἐπιφάνειαι S καὶ S^* τῶν ὁποίων αἱ ἀντιστοιχοὶ ἐξισώσεις εἶναι $\tau = \tau(u, v)$ καὶ $\tau^* = \tau^*(u^*, v^*)$ (1).

Μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τῆς ἐπιφανείας S ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S^* δα δίδεται ὑπὸ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων: $u^* = u^*(u, v), v^* = v^*(u, v)$ (2), τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν μονοσημάντως ἐπιλύσιμον ὡς πρὸς u, v . Οὕτω, ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας S^* ὡς πρὸς τὰς καμπυλογράμμους συντεταγμένας u, v εἶναι: $\tau^* = \tau^*(u^*(u, v), v^*(u, v))$.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἰς τὸ σημεῖον $M(u, v)$ τῆς S ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον $M^*(u^*(u, v), v^*(u, v))$ μετὰ τὸ αὐτὸ σεῦρος τιμῶν (u, v) .

Εάν η άμφιμονοσήμαντος άπειuόνισις f τής S επί τής S^* , ως ώρισθη άνωτέρω (δηλ. τά αντίστοιχα σημεία νά χαραυτηρίζονται από τό αύτό Σεύχος (u,v)), έχη τήν ιδιότητα νά διατηρή τά μήκη τών γραμμών, δηλ τό μήκος uάδε γραμμής γ τής S νά ίσοῦται μέ τό μήκος τής αντίστοίχου γραμμής γ^* επί τής S^* , τότε ή άνωτέρω άπειuόνισις καλεϊται ίσομετρίη.

Έστω ή γραμμή $\gamma: u=u(t), v=v(t)$ επί τής S καί ή αντίστοιχός της επί τής S^* ή $\gamma^*: u^*=u^*(u(t),v(t))=u^*(t), v^*=v^*(u(t),v(t))=v^*(t)$.

Εάν ή άπειuόνισις ύποτεθῇ ίσομετρίη, διά τά μήκη τών τόξων τών έν λόγω γραμμών θά έχωμεν: $l=l^*$ ή ευφράδοντες ταῦτα συναρτήσει τής πρώτης θεμελιώδους τετραγωνιῆς μορφῆς έχομεν:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[E^* \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F^* \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G^* \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \quad (3)$$

Διαφορίζοντες τήν (3), ότε διά uάδε Σεύχος (u,v) θά έχωμεν:

$$E(u,v) du^2 + 2F du dv + G dv^2 = E^*(u,v) du^2 + 2F^* du dv + G^* dv^2 \quad (4) \quad \text{οίουδήποτε όντος}$$

του λόγου du/dv . Συνεπώς ένα ισχύη ή (4), άρκει νά έχωμεν:

$$E(u,v) = E^*(u,v), \quad F(u,v) = F^*(u,v), \quad G(u,v) = G^*(u,v) \quad (5).$$

Όθεν, εάν ή άπειuόνισις τών επιφανειών S καί S^* είναι ίσομετρίη, θά ισχύουν αί σχέσεις (5) καί αντιστρόφως.

Άς υποθέσωμεν ότι αί καμπύλαι επί τών επιφανειών S καί S^* είναι προσανατολισμένες. Υπό τόν όρον γωνία τών καμπύλων $\tau = \tau(t), \xi = \xi(t)$ επί τής επιφανείας S έννοοῦμεν τήν γωνίαν θ τών διανυσμάτων $\tau'(t), \xi'(t)$, ήτοι: $\theta = \angle(\tau'(t), \xi'(t))$. λαμβάνοντες υπό όψιν τόν τύπον (15) τής §3 πού δίδει τήν γωνίαν δύο επιφανειακών γραμμών καθώς καί τούς τύπους (5) κατá τήν ίσομετρίην άπειuόνισιν συμπεραίνομεν ότι: κατá τήν ίσομετρίην άπειuόνισιν ή γωνία δύο προσανατολισμένων γραμμών γ_1, γ_2 τεμνομένων εις τό σημείον M ίσοῦται πρós τήν γωνίαν τών εἰuόνων των γ_1^*, γ_2^* εις τό αντίστοιχον σημείον τής τομῆς των M^* .

κατá τήν ίσομετρίην άπειuόνισιν αί πρωτεύουσai καμπυλότητες k_1, k_2 εις τά διάφορα σημεία M τής S δέν παραμένουν αναλλοίωτοι, δηλ τά αντίστοιχα σημεία M^* τής S^* δέν έχουνώς πρωτεύουσας καμπυλότητας τὰς k_1, k_2 .

Ἐνῷ ἡ ὀδινὴ καμπυλότης K εἰς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς S κατὰ τὴν ἰσομετρίαν ἀπεινόνειν παραμένει ἀναλλοίωτος. Τὸ ἀνωτέρω ἔπεται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Gauss (βλ. θεώρημα X-8-1). Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι: i) Μία σφαῖρα (ὀδινὴ καμπυλότης σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $K = \frac{1}{R^2}$) δὲν εἶναι ἰσομετρία ἀπεινόνισμος ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου (ὀδινὴ καμπυλότης σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $K=0$). ii) Μία σφαῖρα δὲν ἀπεινώνεται ἰσομετρία ἐπὶ μιᾶς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας πού ἔχει ὀδινὴν καμπυλότητα μηδέν.

iii) Εἰς τὸ ἐπίπεδον μόνον αἱ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι ἐνδέχεται νὰ ἀπεινώνωνται ἰσομετρία πού ἔχουν ἀμφότεραι ὀδινὴν καμπυλότητα μηδέν.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἰσομετρίαν ἀπεινόνειν τὰ σύμβολα τοῦ Christoffel Γ_{ij}^k παραμένουν ἀναλλοίωτα (βλ. τύπους (5') § 6), λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν καὶ τὸν τύπον τὸν δίδοντα τὴν γεωδαισιακὴν καμπυλότητα k_g (βλ. θεώρημα X-13-1), ἔπεται ὅτι: κατὰ τὴν ἰσομετρίαν ἀπεινόνειν ἡ γεωδαισιακὴ καμπυλότης παραμένει κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀναλλοίωτος, αἱ δὲ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἀπεινώνονται εἰς τὰς γεωδαισιακὰς γραμμὰς τῆς ἄλλης ἐπιφανείας.

II. Σύμμορφος ἀπεινόνεις. Μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεινόνεις f μιᾶς ἐπιφανείας S ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας S^* καλεῖται **σύμμορφος**, ἐάν ὑπάρχη μία συνάρτησις $\lambda(u, v)$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$E = \lambda^2 E^*, F = \lambda^2 F^*, G = \lambda^2 G^* \quad (1)$$

ὅπου τὰ E, F, G καὶ E^*, F^*, G^* εἶναι τὰ δεμελιώδη ποσὰ πρώτης τάξεως τῶν ἐπιφανειῶν S καὶ S^* με ἀντιστοίχους ἐξισώσεις: $u = u(u, v)$, $v = v(u, v)$.

Πρόταση X-16-1 κατὰ τὴν σύμμορφον ἀπεινόνειν δύο ἐπιφανειῶν διατηρεῖται ἡ γωνία τὴν ὁποῖαν σχηματίζουν εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο προσανατολισμέναι γραμμαὶ τῶν ἐπιφανειῶν (διὰ τοῦτο ἡ ἀπεινόνεις αὕτη καλεῖται καὶ ἰσογώνιος).

Ἀπόδειξις: Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια S με ἐξισωσιν: $u = u(u, v)$. θεωροῦμεν δύο προσανατολισμένας γραμμὰς ἐπ' αὐτῆς αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:

$$u = u_1(t), v = v_1(t), u = u_2(\tau), v = v_2(\tau),$$

τοιαῦται ὥστε $u_1(0) = u_2(0)$ καὶ $v_1(0) = v_2(0)$. Ἐστω δὲ M τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν.

Ἡ γωνία τούτων εἰς τὸ σημεῖον M εἶναι ἡ γωνία θ τῶν ἐφαπτομενιῶν διανυσμάτων: $\frac{d\tau}{dt}, \frac{d\tau}{d\tau}$ (δηλ. ἡ $\theta = \angle\left(\frac{d\tau}{dt}, \frac{d\tau}{d\tau}\right)$) καὶ τὰ ὁποῖα (ἐφαπτομενιᾶ διανύσματα) ὡς γνωστόν εἶναι:

$$\frac{d\tau}{dt} = \tau_u \cdot \frac{du_1}{dt} + \tau_v \cdot \frac{dv_1}{dt}, \quad \frac{d\tau}{d\tau} = \tau_u \cdot \frac{du_2}{d\tau} + \tau_v \cdot \frac{dv_2}{d\tau}$$

κατὰ τὸν τύπον (13) τῆς § 3 θὰ ἔχωμεν:

$$\text{syn}\theta = \frac{Eu_1' \cdot u_2' + F(u_1' \cdot u_2' + u_1' \cdot v_1') + G \cdot v_1' \cdot v_2'}{[Eu_1'^2 + 2Fu_1' \cdot v_1' + G \cdot v_1'^2]^{1/2} \cdot [Eu_2'^2 + 2Fv_2' \cdot u_2' + G \cdot v_2'^2]^{1/2}} \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐάν θ^* εἶναι ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομενιῶν διανυσμάτων: $\frac{d\tau^*}{dt} = \tau_u^* \cdot \frac{du_1}{dt} + \tau_v^* \cdot \frac{dv_1}{dt}$ καὶ $\frac{d\tau^*}{d\tau} = \tau_u^* \cdot \frac{du_2}{d\tau} + \tau_v^* \cdot \frac{dv_2}{d\tau}$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\text{syn}\theta^* = \frac{E^*u_1' \cdot u_2' + F^*(u_1' \cdot u_2' + u_1' \cdot v_1') + G^* \cdot v_1' \cdot v_2'}{[E^*u_1'^2 + 2F^*u_1' \cdot v_1' + G^*v_1'^2]^{1/2} \cdot [E^*u_2'^2 + 2F^*v_2' \cdot u_2' + G^*v_2'^2]^{1/2}} \quad (2)$$

Ἐξ ὑποθέσεως $E = \lambda^2 E^*, F = \lambda^2 F^*, G = \lambda^2 G^*$ καὶ λόρῳ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν: $\text{syn}\theta = \text{syn}\theta^*$ ἢ $\theta = \theta^*$.

Προφανῶς ἡ ἰσομετρίκῃ ἀπειρινόσις εἶναι μία σύμμορφος ἀπειρινόσις

Εὐνόμως διαπιστοῦται ὅτι: κατὰ τὴν σύμμορπον ἀπειρινόσιν διὰ τὰ μήκη τῶν ἀντιστοιχῶν γραμμῶν θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{\frac{d\ell^*}{d\ell} = \frac{1}{\lambda^2}} \quad (3)$$

Τὸν λόγον $\frac{1}{\lambda^2}$ καλοῦμεν κλίμακα ἀπειρινόσεως ἢ συντελεστὴν διαστολῆς.

III. Ἰσημβαδικὴ ἀπειρινόσις: Ἐστω ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀπειρινόσις f τῆς ἐπιφανείας S μέ ἐξίσωσιν $\tau = \tau(u, v)$ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S^* μέ ἐξίσωσιν $\tau^* = \tau^*(u, v)$. Ἡ ἀνωτέρω ἀπειρινόσις θὰ καλεῖται ἰσημβαδική, ἐάν οἰονόητε τμήμα μιᾶς ἐπιφανείας ἀπειρινόσεται εἰς ἓνα τμήμα ἴσου ἐμβαδοῦ τῆς ἀλλῆς ἐπιφανείας.

Ὡς γνωστόν, τὸ ἐμβαδιδιὸν στοιχεῖον μιᾶς ἐπιφανείας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\Delta S = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (1) \quad \text{βλ. τύπον (9), § 3.}$$

τὸ δὲ ἀντίστοιχον ἐμβαδιδιὸν στοιχεῖον τῆς S^* εἶναι:

$$\Delta S^* = \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} du dv \quad (3)$$

Έν τῆς σχέσεως (3) προκύπτει ὅτι: Ἡ ἰσομετρινὴ ἀπειριόνοισις εἶναι καὶ ἰσεμβαδιὴ
 Ὁμοίως, λόγῳ τῶν σχέσεων (1) τῆς συμμόρφου ἀπειριόνοισεως καὶ τῶν σχέσεων (3),
 προκύπτει ὅτι: Ἐάν μία σύμμορφος ἀπειριόνοισις εἶναι ἰσεμβαδιὴ, τότε αὕτη δὲ εἶναι
καὶ ἰσομετρινή:¹⁾

- Ἐστώ ἡ ἐπιφάνεια S :

$$x = \varphi(u, v), y = f(u, v), z = \sigma(u, v),$$

τὴν ὁποῖαν σῆτοῦμεν νὰ ἀπειριονίσωμεν ἰσεμβαδιωῶς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου:

$$X = \Phi(u, v), Y = \Psi(u, v). \text{ (σύστημα συντεταγμένων } OXY \text{).}$$

Τὸ ἐμβαδιὸν στοιχείον τῆς ἐπιφανείας S εἶναι $\sqrt{EG-F^2} du dv$ (4)

Ἡ εἰσῶσις τοῦ(τμήματος) τοῦ θεωρηθέντος ἐπιπέδου εἰς τὸ σύστημα (OXY)
 εἶναι $\tau^* = \Phi(u, v) \cdot i + \Psi(u, v) \cdot j$ (τὰ i, j εἶναι τὰ μοναδιαῖα τῶν ἀξόνων OX, OY).

$$\text{Ἐχομεν λοιπόν: } E^* = \tau_u^* \cdot \tau_u^* = (\Phi_u \cdot i + \Psi_u \cdot j)^2 = \Phi_u^2 + \Psi_u^2,$$

$$F^* = \tau_u^* \cdot \tau_v^* = (\Phi_u \cdot i + \Phi_v \cdot j) \cdot (\Phi_v \cdot i + \Psi_v \cdot j) = \Phi_u \cdot \Phi_v + \Psi_u \cdot \Psi_v$$

$$\text{καὶ } G^* = \tau_v^* \cdot \tau_v^* = (\Phi_v \cdot i + \Psi_v \cdot j)^2 = \Phi_v^2 + \Psi_v^2.$$

$$\text{Εἶναι λοιπόν } \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} du dv = (\Phi_u \cdot \Phi_v - \Phi_v \cdot \Psi_u) du dv \quad (5)$$

Ἐν τῶν (4) καὶ (5) προκύπτει: ἵνα ἔχωμεν ἰσεμβαδιὴ ἀπειριόνοισιν ἀρκεῖ νὰ
ἔχωμεν:

$$\boxed{\Phi_u \cdot \Psi_v - \Phi_v \cdot \Psi_u = \sqrt{EG-F^2}} \quad (6)$$

Ἐφαρμοαί 1²⁾. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι $\tau = u \cdot i + \eta \mu \nu \cdot j + (1 - \sigma \nu \nu) \cdot k$ καὶ
 $\tau^* = u \cdot i + v \cdot j$ ἀπειριονίσονται ἰσομετρινῶς ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Λύσις: Ἐπειδὴ αἱ ἐπιφάνειαι ἀναφέρονται εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα παραμέτρων, ἀρ-
 κεῖ νὰ δεῖξωμεν ὅτι τὰ γραμμικά των στοιχεῖα εἶναι ἴσα, ἥτοι $dl = dl^*$. Εἶναι $\tau_u = i$,
 $\tau_v = \sigma \nu \nu \cdot j + \eta \mu \nu \cdot k$ καὶ $E = \tau_u^2 = 1$, $F = \tau_u \cdot \tau_v = 0$, $G = \tau_v^2 = 1$. Διὰ τὴν δευτέραν ἐπιφάνει-
 αν δὲ ἔχωμεν: $\tau_u^* = i$, $\tau_v^* = j$ καὶ $E = \tau_u^{*2} = 1$, $F^* = \tau_u^* \cdot \tau_v^* = 0$, $G^* = \tau_v^{*2} = 1$. Ὅθεν, $dl = dl^*$. Ἡ
 πρώτη τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἕνας κυλινδρὸς τοῦ ὁποῖου ἡ εἰσῶσις εἶναι $y^2 + (z-1)^2 = 1$
 καὶ ἡ δευτέρα, ὅπου ἀπειριονίσεται ἰσομετρινῶς, εἶναι προφανῶς τὸ ἐπίπεδον xy .

1) Μεταξύ δύο ἐπιφανειῶν ὑπάρχει πάντοτε μία σύμμορφος ἀντιστοιχία, ὅτι ὅμως καὶ μία ἰσομετρινὴ τοιαύτη.

2§/ Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἀπειριόνοισις :

$$X = \int u \sqrt{1+q'^2} du, Y = u$$

τῆς ἐπιφανείας $x = u \sin v, y = u \eta \mu v, z = \varphi(u)$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου OXY εἶναι ἰσεμβαδιωτή.

Λύσις: ἔχομεν $x_u = \sin v, y_u = \eta \mu v, z_u = \varphi', x_v = -u \eta \mu v, y_v = u \sin v, z_v = 0$. Εἶναι $E = 1 + \varphi'^2, F = 0, G = u^2$ καὶ $\sqrt{EG-F^2} = u \cdot \sqrt{1+\varphi'^2}$ (1). Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $X_u = u \sqrt{1+\varphi'^2}, X_u = 0, Y_u = 0, Y_v = 1$. Εἶναι δέ, $X_u Y_v - X_v Y_u = u \sqrt{1+\varphi'^2}$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν ὅτι πληροῦται ἡ συνθήκη (6) τῆς ἰσεμβαδιότης ἀπειριόνοισις καὶ ὥς ἐκ τούτου ἡ ἀνωτέρω ἀπειριόνοισις εἶναι ἰσεμβαδιωτή.

3§/ Νά εὐρεθῇ μία σύμμορφος ἀπειριόνοισις μιᾶς σφαίρας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

Λύσις: Ἐστῶσαν εἰς πολικὰς συντεταγμένας αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς μοναδιαίας σφαίρας:

$$x = \eta \mu \varphi \sin \theta, y = \eta \mu \varphi \eta \mu \theta, z = \sin \varphi \quad (1).$$

$$\text{Ἐξ ἄλλου ἔχομεν: } d\ell^2 = d\varphi^2 + \eta^2 \varphi^2 d\theta^2 \quad (2)$$

Εἰς καρτεσιανὰς συντεταγμένας τὸ γραμμικὸν στοιχεῖον γράφεται:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3).$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν σύμμορφον ἀπειριόνοισιν ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν μίαν συνάρτησιν: $\lambda(\varphi, \theta)$ τοιαύτην, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$dx^2 + dy^2 = \lambda^2(\varphi, \theta) (d\varphi^2 + \eta^2 \varphi^2 d\theta^2) \quad (4).$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (4) γράφεται: $(dx + i dy)(dx - i dy)$, διὰ νὰ θέσωμεν καὶ τὸ δεῦτερον μέλος ὑπὸ τὴν αὐτὴν μορφήν ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἓναν ὁλοκληρώνοντα παράγοντα δι' ἑαυτὸν τῶν διαφορῶν: $d\varphi + i \eta \mu \varphi d\theta, d\varphi - i \eta \mu \varphi d\theta$.

Εἶναι φανερόν, π.χ., ὅτι ἓνας ὁλοκληρώνων παράγων εἶναι ὁ $\frac{1}{\eta \mu \varphi}$ καὶ ὥς ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ θέσωμεν: $\lambda(\varphi, \theta) = \frac{1}{\eta \mu \varphi}$. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν μίαν σύμμορφον ἀπειριόνοισιν λαμβάνοντες $\lambda^2(\varphi, \theta) = \frac{1}{\eta^2 \mu^2 \varphi}$, ὅτε δὲ ἔχωμεν: $dx \pm i dy = \frac{d\varphi}{\eta \mu \varphi} \pm i d\theta$, δηλ. $x = \log \varphi \mp \frac{\theta}{2}, y = \theta$.

Οὕτω εἰς τοὺς μεσημβρινοὺς $\theta = c$ (σταθερόν) ἀντιστοιχοῦν αἱ παράλληλοι

πρός τόν άξονα τών x καί εις τούς παραλλήλους $\varphi = c$ (σταθερόν) αί παράλληλοι πρὸς τόν άξονα τών y . Ἡ άνωτέρω άπειριόνισις υαλγείται άπειριόνισις κατά Mercator.

Διά τῆς άνωτέρω άπειριόνισεως δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν τόν γεωγραφικόν χάρτην τῆς Γῆς. ἢ υαί γενικώτερον μιᾶς έπιφανείας.

§ 17 ΠΕΡΙ ΕΠΑΦΩΝ

Ι. Έπαφή υαμπύλης καί έπιφανείας: θεωρούμεν τήν υαμπύλην $z = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ υαθώς καί τήν έπιφάνειαν $F(x, y, z) = 0$. Θά λέγωμεν ότι διά τήν τιμήν $t = t_0$ ἡ υαμπύλη καί ἡ έπιφάνεια ἔχουν έπαφήν η- τάξεως, έάν ἡ συνάρτησις $f(t) \equiv F(x(t), y(t), z(t))$ πληροῖ τὰς κατωθι συνθήκας:

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n)}(t_0) = 0 \quad \text{ένῶ} \quad f^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

• Ὡς θεωρήσωμεν μίαν υαμπύλην μέ έείσωσιν $z = z(\ell)$ (1), ὅπου ℓ φυσική παράμετρος καί έστω $z_0 = z(\ell_0)$ τυχόν σημείον ταύτης. Έάν θεωρήσωμεν τυχόν έπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ σημείου z_0 , τοῦτο ὀφείλει νά πληροῖ τήν έείσωσιν $(z - z_0) \cdot N = 0$ (2), ὅπου τό N είναι τό μοναδιαῖον καδέτον διάνυσμα τοῦ έπίπέδου. θεωρούμεν ἥδη τήν συνάρτησιν.

$$f(\ell) = (z(\ell) - z_0) \cdot N \quad (3)$$

καί διά παραγωγίσεως δις αὐτῆς λαμβάνομεν διαδοχικώς:

$$f'(\ell) = \dot{z}(\ell) \cdot N = \tau \cdot N \quad (4)$$

$$f''(\ell) = \ddot{z}(\ell) \cdot N = k \cdot \nu \cdot N \quad (5)$$

Εἶναι δέ, $f(\ell_0) = 0$ (6). Ὡδη έξετάσομεν τήν περίπτωση, πότε ἔχομεν $f'(\ell_0) = \tau(\ell_0) \cdot N = 0$ (7). Ἡ σχέση (7) ἰσχύει τότε καί μόνον τότε έάν, τό $N \perp \tau(\ell_0)$. Ὅθεν, ένα έπίπεδον έχει μετά τῆς δοθείσης υαμπύλης έπαφήν 1- τάξεως έάν καί μόνον έάν περιέχη τό εξαπτομενικόν διάνυσμα τ τῆς υαμπύλης.

Ἐστω, ότι $K(\ell_0) \neq 0$ καί ζητοῦμεν πότε εντός τῶν (6) καί (7) νά ἰσχύη καί ἡ σχέση $f''(\ell) = k \cdot \nu \cdot N = 0$ (8). Ἡ (8) ἰσχύει τότε καί μόνον τότε έάν $N \perp \nu$, τότε ὁμως πληρουμένων τῶν (6), (7) καί (8) θά ἔχωμεν έπαφήν 2-τάξεως. Ὅθεν, ένα έπίπεδον έχει μετά τῆς υαμπύλης εις ένα σημείον έπαφήν 2- τάξεως έάν, καί μόνον έάν, τό έπίπεδον είναι καδέτον πρὸς τό διάνυσμα θ καί διέρχεται διά τοῦ τ . Συμφώνως πρὸς τ' άνωτέρω τό έν λόγω έπίπεδον είναι τό έγγύστατον έπίπεδον τῆς υαμπύλης. Ἄρα: Τό

επίπεδον με τάξιν επαφής $\eta=2$ εις ένα όμαλόν σημείον τής υαμπύλης (δηλ. σημείον όπου υπάρχει ή εφαπτομένη) είναι τό έγγύτατον επίπεδον

{ Εάν τό σημείον δέν είναι όμαλόν, ή ελαχίστη τάξις επαφής του επίπεδου υαδορί-
σει πάλι τό έγγύτατον επίπεδον τής υαμπύλης. Η τάξις είναι τότε $\eta > 2$.

II. Έπαφή δύο υαμπύλων: Αι υαμπύλαι $\tau = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ καί $(F(x, y, z)=0, G(x, y, z)=0)$ έχουν επαφήν η -τάξεως διά $t=t_0$, εάν αι συναρτήσεις:

$$f(t) \equiv F(x(t), y(t), z(t))$$

$$g(t) \equiv G(x(t), y(t), z(t))$$

υανοποιούν τας συνθήκας

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n)}(t_0) = 0 \quad \text{ένω} \quad f^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

$$g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = \dots = g^{(n)}(t_0) = 0 \quad \text{ένω} \quad g^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

• Έστω ή υαμπύλη $\tau = \tau(t)$ (1) καί $M_0(\tau_0)$ ένα σημείον στής αντίστοιχόν διά $\ell = \ell_0$. Ένας υύυλος κέντρου $K(u)$ καί ακτίνας R , ως γνωστόν, έχει Είσιωσιν $(\tau - u)^2 = R^2$ (2). "Ινα ό υύυλος έχη εις τό σημείον M_0 επαφήν 2-τάξεως, αρμεί θέτοντες $f(\ell) \equiv (\tau(\ell) - u)^2 - R^2$ νά πληροῦνται αι Είσιώσεις:

$$\rightarrow f(\ell_0) \equiv (\tau_0 - u)^2 - R^2 = 0 \quad (3), \quad f'(\ell_0) \equiv 2(\tau_0 - u) \cdot \dot{\tau}_0 = 0 \quad (4) \quad \text{καί}$$

$$f''(\ell_0) \equiv 2\dot{\tau}_0^2 + 2(\tau_0 - u)\ddot{\tau}_0 = 0 \quad (5)$$

Έυ τής (4) έπεται $(\tau_0 - u) \perp \dot{\tau}_0 \implies (\tau_0 - u) \parallel \nu_0$ (διότι ή υαμπύλη είναι επί-
πεδος). Όθεν, $\tau_0 - u = \lambda \cdot \nu_0$ (6). Η (5) λόγω τής (6) γίνεται: $2\dot{\tau}_0^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \nu_0 \cdot k \cdot \nu_0 = 0$
ή $1 + k \cdot \lambda = 0$ ή $\lambda = -\frac{1}{k}$ ότε λόγω τής (6) $u = \tau_0 + \frac{\nu_0}{k}$ (7). Έυ τής τελευταίας
σχέσεως προϋπεί, ότι τό κέντρον του υύυλου συμπίπτει με τό κέντρον υαμπυ-
λότητος τής γραμμής εις τό M_0 . Λόγω τής (3), ή ακτίς του υύυλου είναι
 $(\tau_0 - \tau_0 - \frac{\nu_0}{k})^2 = R^2$ ή $R = \frac{1}{k}$ (8). Έυ τών σχέσεων (7) καί (8) συμπεραίνομεν
οτι: ή υύυλος όστις έχει μετά τής υαμπύλης εις τό θεωρηθέν σημείον M_0 επαφήν
2-τάξεως είναι ό έγγύτατος υύυλος τής υαμπύλης εις τό M_0 .

Λόγω τής (2) ή αναλυτική Είσιωσις του υύυλου δά είναι:

$$(\tau - u)^2 = \frac{1}{k^2} \quad (9) \quad \text{όπου} \quad u = \tau_0 + \frac{\nu_0}{k}.$$

III. Έπαφή δύο επιφανειών: Αι επιφάνειαι $\tau = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$ καί $F(x, y, z) = 0$

Έχουν επαφή η -τάξεις διά $u=u_0$ και $v=v_0$, εάν ή συνάρτησις

$$F(u,v) \equiv F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

έχη πάσας τας μεριυάς παραγώγους μέχρι η τάξεως ίσας πρὸς μηδέν διά $u=u_0$ και $v=v_0$ και τουλάχιστον μίαν μεριυήν παράγωγον $(n+1)$ -τάξεως διάφορον του μηδενός.

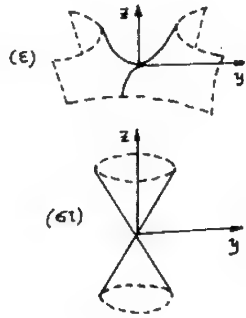
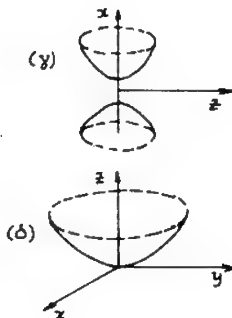
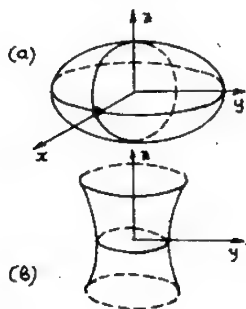
Συμπληρώματα και άσκήσεις.

1. Αί τετραγωνικαί επιφάνειαι όρίζονται υπό τής εξίσωσης:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{41}x + 2a_{42}y + 2a_{43}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

Είς τήν αναλυτικήν γεωμετρίαν αποδεικνύεται, ότι, εάν ετετελέσωμεν είς τήν εξίσωσιν (1) δύο μετασχηματισμούς, ήτοι μίαν παράλληλον μεταφοράν και μίαν στροφήν, αυτή δύναται νά λάβη μία τών κάτωδι μορφών: ¹⁾

- | | | |
|-----|--|--|
| α) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ | ήτις παριστά έλλειψοειδές βλ. Σκ. 1α. |
| β) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$ | Μονόκωνον υπερβολοειδές, βλ. Σκ. 1β. |
| γ) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$ | Δίκωνον υπερβολοειδές, βλ. Σκ. 1γ. |
| δ) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0,$ | Έλλειπτικόν παραβολοειδές, βλ. Σκ. 1δ. |
| ε) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ | Υπερβολικόν παραβολοειδές, βλ. Σκ. 1ε. |
| στ) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ | κώνον βλ. Σκ. 1στ. |



Σκ. 1.

2. Δείξατε ότι, πάντα τὰ σημεία τής επιφάνειας $z = u \cdot i + v \cdot j + f(u,v)$ κ είναι όμοια όμοιως τής επιφάνειας $z = (\alpha \eta \mu \phi \theta) i + (\beta \eta \mu \phi \theta) j + (\gamma \sigma \upsilon \nu \phi)$ κ, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $-\infty < \theta < +\infty, 0 < \phi < \Pi$.

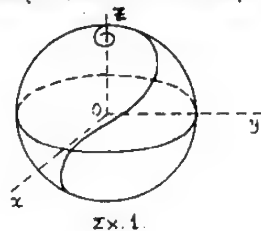
1) Αί μορφαι ενδέχεται νά ευρηθίζωνται εις κυλινδρους ή επίπεδα.

3. Νά εὑρεθῇ τὸ ἑφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας $z = x^3 - y^2 + a$ εἰς τὸ σημεῖον $M(-1, 1, a)$. Ποῖα τὰ διευθύνοντα συντημίονα τοῦ μαθῆτου διανύσματος εἰς τὸ θεωρηθὲν σημεῖον;

• 4. Δίδεται ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια $z = u \sin v \cdot i + u \eta \mu v \cdot j + \sigma(u) \cdot k$.

Νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων ἀπὸ τὸ ἑφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἓνα σημεῖον τῆς θεωρηθείσης ἐπιφανείας.

5. Δίδεται ἡ σφαῖρα $z = (\sin \theta \eta \mu \varphi) i + (\eta \mu \theta \eta \mu \varphi) j + (\sin \varphi) \cdot k$. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τὴν αμψύλην $\theta = \log t$, $\varphi = 2 \tan \epsilon \varphi t$, $t > 0$. Δείξατε ὅτι ἡ ἐν λόγῳ αμψύλη τέμνει τοὺς μεσημβρινούς τῆς σφαίρας, ὁπλ. τὰς φ - παραμετριάς αμψύλης ὑπὸ μίαν σταθεράν γωνίαν καὶ ἴσην πρὸς $\frac{\pi}{4}$ (βλ. ἐναντι σχήμα 1).



6. Δίδεται ἐπιφάνεια $z = (u^2 + v) i + (u + v) \cdot j + 2uv \cdot k$ καὶ αἱ παραμετριάς γραμμαὶ ἐπ' αὐτῆς $u = t$, $v = t^2$ καὶ $u = 1 - \tau^2$, $v = 1 + \tau$. Νά εὑρεθῇ ἡ γωνία τούτων εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς τιμὰς $t = 0$ καὶ $\tau = -1$.

7. Δείξατε ὅτι, τὸ ἑφαπτόμενον ἐπίπεδον παραμένει σταθερόν κατὰ μήκος μίᾳ γενετείρας τῆς κυλινδρική ἐπιφανείας $z = \rho(t) + u \cdot g$, ὅπου $g = \text{σταθερόν} \neq 0$ καὶ $\rho' \times g \neq 0$.

• 8. Δίδεται ἡ ἐν περιστροφῇ ἐπιφάνεια $z = (f(t) \sin \theta) i + (f(t) \eta \mu \theta) \cdot j + \sigma(t) \cdot k$, $f(t) > 0$. Νά εὑρεθῇ τὸ μαθῆτον διάνυσμα N αὐτῆς.

9. Δίδεται ἡ ἐν περιστροφῇ ἐπιφάνεια $z = (f(t) \sin \varphi) i + (f(t) \eta \mu \varphi) \cdot j + \varphi(t) \cdot k$. Νά προσδιορισθῇ ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα θεμελιώδης τετραγωνική μορφή αὐτῆς.

• 10. Νά εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῆς πρώτης μαθῆτου μαθῶς καὶ τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου μίᾳ αμψύλης τοῦ χώρου.

11. Δείξτε ότι πάντα τα σημεία της ευδαισθενούς επιφάνειας $\mathbf{r} = \rho(\ell) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}(\ell)$ με $|\dot{\rho}(\ell)| = 1$ και $|\mathbf{g}(\ell)| = 1$, όπου $\dot{\rho} \times \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, είναι άμαλά.

12. Δίδεται η επιφάνεια $\mathbf{r} = \varphi(u, v) \sin v \mathbf{i} + \varphi(u, v) \eta \mu v \mathbf{j} + \psi v \mathbf{k}$.

Ζητείται να προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις φ εἰς τρόπον, ὥστε αἱ παραμετρικαὶ γραμμαὶ ταύτης νὰ τέμνονται ὑπὸ σταθεράν γωνίαν, ἔστω θ . Εἰδιυή περίπτωσις $\theta = \frac{\pi}{2}$.

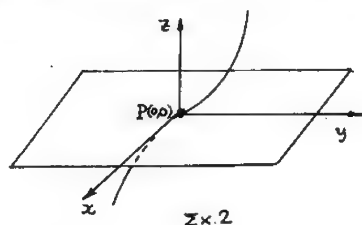
13. Δίδεται ἡ ευδαισθενής επιφάνεια $\mathbf{r} = \rho(u) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}(u)$.

Νά εὐρεθῇ ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα θεμελιώδης τετραγωνική μορφή αὐτῆς καὶ ὡς καὶ τὸ γραμμικὸν καὶ τὸ ἔμβαδινὸν στοιχεῖον ταύτης. Νά εὐρεθῇ ἡ γωνία τῶν συνεταγμένων καμπύλων.

14. Θεωροῦμεν τὴν σφαῖραν $\mathbf{r} = (\sin \theta \eta \mu \varphi) \mathbf{i} + (\eta \mu \theta \eta \mu \varphi) \mathbf{j} + (\sin \varphi) \mathbf{k}$ καὶ τὴν καμπύλην αὐτῆς $\theta = \log \sigma \varphi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right)$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Νά εὐρεθῇ τῇ βοηθείᾳ τῆς πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικῆς μορφῆς τὸ μήκος τοῦ τόξου τῆς ἐν λόγω καμπύλης.

15. Δίδεται ἡ επιφάνεια $\mathbf{r} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (u^2 + v^2) \mathbf{k}$ καὶ ἡ καμπύλη ἐπ' αὐτῆς $u = t^2$, $v = t$. Νά εὐρεθῇ ἡ αἰθέτος καμπυλότης τῆς θεωρηθείσης καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον $t = 1$.

16. Δείξτε ὅτι ἡ επιφάνεια $\mathbf{r} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (u^2 + v^2) \mathbf{k}$ ἔχει τὰ σημεῖα τῆς ἐλλειπτικῆς ἐάν $u > 0$, ὑπερβολικῆς ἐάν $u < 0$ καὶ παραβολικῆς ἐάν $u = 0$. Ἐν συνεχείᾳ δείξατε ὅτι ἡ επιφάνεια καίται ἐνατέρωθεν τοῦ ἑφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς καθε περιοχὴν τοῦ παραβολικοῦ σημείου $\rho(0, 0)$ (βλ. Σκ. 2).



17. Νά εὐρεθῇ ἡ δεύτερη τοῦ Dupin τῆς επιφάνειας: $\mathbf{r} = (u+v) \mathbf{i} + (u-v) \mathbf{j} + u \cdot v \mathbf{k}$.

18. Θεωρούμεν τὴν ἐπιφάνειαν $\mathbf{r} = u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + (u^2 - v^2) \cdot \mathbf{k}$. Νὰ εὐρεθῇ ἡ κλίση τοῦ καμπυλότητος κ_n τῆς ἐπιφάνειας εἰς τὸ σημεῖον $u=0, v=0$ (εἰς τὴν ἀρχήν) καὶ νὰ δεῖ-
χθῇ, ὅτι αὕτη μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν τιμῶν -2 καὶ 2 .
19. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες τῆς ἐπιφάνειας $\mathbf{r} = u \cdot \mathbf{i} + v \cdot \mathbf{j} + (u^2 + v^2) \cdot \mathbf{k}$.
20. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς ἐπιφάνειας $e^* = \sin x \cdot \sin y$.
21. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι καμπυλότητες τῆς ἐπιφάνειας $xyz = 1$.
- 22. Νὰ εὐρεθῇ ἡ διαφορικὴ εἰσώσις τῶν ἐπιφανειακῶν γραμμῶν αἱ ὁποῖαι τέμνουν
ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν, ἔστω θ , τὰς u -παραμετρίκας γραμμὰς τῆς ἐπιφάνειας
 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, ὅταν τὸ διῦτον τῶν παραμετρίων γραμμῶν ταύτης εἶναι ὀρθογώ-
νιον ($F=0$).
23. Δίδεται ἡ ἐπιφάνεια $\mathbf{r} = (u+v) \cdot \mathbf{i} + (u-v) \cdot \mathbf{j} + u \cdot v \cdot \mathbf{k}$.
Εὕρετε τὴν μέσην καμπυλότητα H καὶ τὴν ὀλιγὴν καμπυλότητα K αὐτῆς εἰς τὸ
σημεῖον $u=1$ καὶ $v=1$.
24. Νὰ εὐρεθῇ ἡ ὀλιγὴ καμπυλότης καθὼς καὶ ἡ διαφ. εἰσώσις τῶν γραμμῶν
καμπυλότητος τῆς ἐπιφάνειας $\mathbf{r} = u \sin v \cdot \mathbf{i} + u \eta \mu v \cdot \mathbf{j} + v^2 \cdot \mathbf{k}$.
- 25. Δείξατε ὅτι, ἡ μέση καμπυλότης H εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐκ περιστροφῆς
ἐπιφάνειας $\mathbf{r} = (\cosh u \sin \theta) \cdot \mathbf{i} + (\cosh u \eta \mu \theta) \cdot \mathbf{j} + u \cdot \mathbf{k}$ εἶναι μηδέν.
26. Ἐὰν τὸ διῦτον τῶν παραμετρίων γραμμῶν μιᾶς ἐπιφάνειας εἶναι ὀρθογώ-
νιον, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right]$$

27. Δείξτε ότι, η Είσωσις του Gauss δύναται να τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\sqrt{EG-F^2} K = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F \cdot E_v - E G_u}{2E \sqrt{EG-F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2E F_u - F E_v - E E_v}{2E \sqrt{EG-F^2}} \right).$$

28. Δείξτε, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς:

$$z = u (\sin \theta) i + u (\eta \mu \theta) j + f(v) \cdot k$$

ὅπου $u = c_1 \cdot e^{\frac{v}{a}} + c_2 \cdot e^{-\frac{v}{a}}$ καὶ $f(v) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{du}{dv}\right)^2} dv$ εἶναι μία ἐπιφάνεια με σταθερά ὀλίγη ἀρνητικὴ καμπυλότητα καὶ ἴση πρὸς $K = -\frac{1}{a^2}$.

29. Προσδιορίσατε τὰς πρωτεύουσας διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας $z = u \cdot i + v \cdot j + (u^2 + v^2) \cdot k$ εἰς τὸ σημεῖον $u=1, v=1$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐπαληθεύσατε τὸν τύπον τοῦ Rodrigues εἰς ἐκείνην τῶν ἀνωτέρω διευθύνσεων.

30. Νὰ εὐρεθῶν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας $z = (1+u) \sin v \cdot i + (1-u) \eta \mu v \cdot j + u \cdot k$.

31. Νὰ εὐρεθῶν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς σπειροειδοῦς ἐπιφανείας (τύπου σαρπρελάς) παραγομένης ὑπὸ ἐνὸς κύβου στρεφομένου περὶ μιᾶς ἐφαπτομένης του.

32. Δείξτε, ὅτι αἱ ἀσυμπτωτικαὶ διευθύνσεις τῆς ἐπιφανείας $f(x, y, z) = c$ ἐπαληθεύουν τὴν διαφορικὴν Εἰσωσιν $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$. Ἐν συνεχείᾳ εὑρετε τὰς ἀσυμπτωτικὰς γραμμὰς τῆς ἐπιφανείας $z = x \eta \mu y$.

33. Δείξτε ὅτι, ἐάν μιᾶς ἐπιφανείας αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ εἶναι ὀρθογώνιοι οἱ-υογένειαι καμπύλων, ἡ μέση καμπυλότης θὰ εἶναι μηδέν.

34. Δείξτε ὅτι, ἐάν δύο ἐπιφάνειαι τέμνονται κατὰ μήκος μιᾶς καμπύλης ἢ ὁποία εἶναι γραμμὴ καμπυλότητος ἀμφοτέρων, τότε αἱ ἐπιφάνειαι τέμνονται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν κατὰ μήκος αὐτῆς τῆς καμπύλης. (Θεώρημα τοῦ Bonnet).
(ὑπόδ): Ἐστωσαν S_1 καὶ S_2 αἱ ἐπιφάνειαι καὶ N_1 καὶ N_2 τὰ καθετὰ διανύσματα αὐτῶν εἰς ἓνα σημεῖον τῆς τομῆς των. θὰ εἶναι $N_1 \cdot N_2 = \text{σταθ.}$ Διὰ παραγωγίσεως

τῆς ἀνωτέρω σχέσεως λαμβάνομεν: $0 = \frac{d}{dt} (N_1 \cdot N_2) = \frac{dN_1}{dt} \cdot N_2 + \frac{dN_2}{dt} \cdot N_1$. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόσατε τὸν τύπον τοῦ Rodrigues, ὑαδοῦτι ἡ τομή εἶναι γραμμὴ καμπυλότητος κ.τ.λ).

35. Δείξατε ὅτι, ἓνα ἐπίπεδον ἢ μία σφαῖρα τέμνει μίαν ἐπιφάνειαν ὑπὸ μίαν σταθεράν γωνίαν, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν, ἡ καμπύλη εἶναι γραμμὴ καμπυλότητος τῆς ἐπιφανείας.

36. Δείξατε ὅτι ἡ u καὶ v -παραμετριαὶ γραμμαὶ μιᾶς ἐπιφανείας εἶναι συζυγεῖς ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σημείον τῆς ἐπιφανείας εἶναι $M=0$.

(Λύσις: Ἡ ἐξίσωσις (3) τῆς σελ. 324 πρέπει νὰ ἱκανοποιῖται διὰ $du=1, dv=0$ καὶ $du=0, dv=1$. Ἀντιδιαδιστώντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν $M=0$. Ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφον).

37. Δείξατε ὅτι αἱ παραμετριαὶ καμπύλαι τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(u) + \mathbf{r}_2(v)$ εἶναι συζυγεῖς οἰμογένειαι καμπύλων.

38. Νὰ δευχθῇ ὅτι αἱ παραμετριαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφανείας $\mathbf{r} = (\sin u + \sin v)\mathbf{i} + (\eta_1 u + \eta_2 v)\mathbf{j} + \frac{c}{2}(\eta_1^2 u + \eta_2^2 v)\mathbf{k}$ εἶναι συζυγεῖς.

39. Ὅρίζομεν ὡς *τρίτην θεμελιώδη τετραγωνικὴν μορφήν* τὴν $\text{III} = d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{N}$. Δείξατε ὅτι $\text{III} - 2\text{H} \cdot \text{II} + \text{K} \cdot \text{I} = 0$, ὅπου H καὶ K εἶναι ἡ μέση καὶ ἡ ὀλίγη καμπυλότης ἀντιστοίχως.

(Υπόδ: θεωρήσατε ἓνα σημεῖον M ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ ὑποθέσατε ὅτι αἱ u καὶ v -παραμετριαὶ γραμμαὶ εἶναι πρωτεύουσαι διευδύνσεις. Ἐν συνεχείᾳ ἐφαρμόσατε τὸν τύπον τοῦ Rodrigues, ὅτε θὰ λάβετε $N_u = -k_1 \mathbf{r}_u$ καὶ $N_v = -k_2 \mathbf{r}_v$ ἢ τ.λ).

40. Δείξατε ὅτι, εἰς τὴν αὐτὴν σημείον μιᾶς ἀσυμπτωτικῆς γραμμῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ, ἡ στρέψις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\sigma^2 = -K$ (θεώρημα τῶν Beltrami - Enneper).

41. Νά εύρεθῇ ἡ διαφ. ἑξίσωσης τῶν ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν τῆς ἐπιφανείας $z = f(x, y)$ καθὼς καὶ ἡ στρέψις αὐτῶν.
42. Νά εύρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τοῦ ὀρθοῦ κυλινδρικοῦ κώνου τοῦ ὁποίου αἱ γενέτειραι σχηματίζουν μὲ τὸν ἄξονα αὐτοῦ γωνίαν ω .
43. Νά εύρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῶν ἐν περιστροφῇ ἐπιφανειῶν.
44. ^αΝά εύρεθῇ ἡ διαφ. ἑξίσωσης τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν τῆς σπείρας (κυλινδρ. σαμπρέλλας).
45. Νά εύρεθοῦν αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ: α) τοῦ ἐν περιστροφῇ ἐλλειψοειδοῦς β) τοῦ ἐν περιστροφῇ παραβολοειδοῦς, γ) τοῦ μονοκώνου ὑπερβολοειδοῦς, δ) τῆς ἁλυσσοειδοῦς ἐν περιστροφῇ.
- 46. Νά δειχθῇ, ὅτι μία ἐπίπεδος γεωδαισιακὴ γραμμὴ εἶναι καὶ γραμμὴ καμπυλότητος. Ἀντιστρόφως. Πᾶσα γραμμὴ καμπυλότητος εἶναι ἐπίπεδος.
(Ἀποδ. Ἐὰν ἡ γεωδαισιακὴ γραμμὴ εἶναι ἐπίπεδος δὲ εἶναι καὶ γραμμὴ καμπυλότητος, διότι ἡ στρέψις τῆς γεωδαισιακῆς ἔχει ὡς ἔμφρασιν:
- $$\sigma = \frac{1}{d\tau} (H, dH, d\tau) \quad (1)$$
- Ὅταν ἡ γεωδαισιακὴ εἶναι ἐπίπεδος τότε δὲ ἔχουμεν $\tau = 0$, ἐπομένως $(H, dH, d\tau) = 0$ (2).
Ἡ τελευταία ἔμφρασις μᾶς δίδει τὴν ἑξίσωσιν τῶν γραμμῶν καμπυλότητος.
Ἐὰν ἡ γεωδαισιακὴ εἶναι καὶ γραμμὴ καμπυλότητος, δὲ εἶναι ἐπίπεδος, διότι δὲ ἐπαληθεύῃ τὴν (2) καὶ κατὰ συνέπειαν, λόγῳ τῆς (1), δὲ εἶναι $\sigma = 0$.
- 47. Νά δειχθῇ, ὅτι ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ, ποὺ εἶναι συγχρόνως καὶ γεωδαισιακαὶ, εἶναι εὐθεῖαι.
48. Νά εύρεθοῦν αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰσογενείας τῶν ἐπιπέδων $z = ax + yq(a) + R \sqrt{1 + a^2 + q^2(a)}$, ὅπου

a είναι παράμετρος και $\varphi(a)$ μία παραγωγισίμος συνάρτηση του a και R μία σταθερά.

49. Δείξτε ότι τα σημεία μίας εὐδαισθενοῦς, ἐπιφανείας είναι ἢ ὑπερβολικά ἢ παραβολικά

→ 50. Δίδεται ἡ κυλινδρική στερὰ ἔλλιε $\mathbf{r} = (a \cos t) \mathbf{i} + (a \sin t) \mathbf{j} + (bt) \mathbf{k}$, $b > 0$. Δείξτε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῶν πρώτων καθετῶν εἰς τὰ σημεία τῆς καμπύλης δὲν εἶναι ἀναπτυκτὴ (αὕτη καλεῖται ἑλλυσοειδὴς ἐπιφάνεια).

51. Δίδεται ἡ γραμμὴ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\ell)$ εἰς τὸν χώρον. Νά εὐρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐδαισθενοῦντων ἐπιπέδων ταύτης.

→ 52. Δείξτε ὅτι αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῶν κυλινδρικών ἐπιφανειῶν εἶναι ἑλλυσοειδῆς

→ 53. Δείξτε ὅτι αἱ γεωδαισιακαὶ γραμμαὶ τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν δι' ὀλοκληρώσεως.

54. Δείξτε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ἐν περιστροφῇ $S: \mathbf{r} = (a \cosh u) \mathbf{i} + (a \sinh u) \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 < \theta < 2\pi$, $-\infty < v < +\infty$

καὶ ἡ κωνοειδὴς $S^*: \mathbf{r}^* = (u \cosh v) \mathbf{i} + (u \sinh v) \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < u < +\infty$ ἀπεικονίζεται ἰσομετρικῶς.

→ 55. Νά εὐρεθῇ ἡ σύμμορφος ἀπεικόνισις τῆς σφαίρας (κοινῶς σφαιρὸς) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (βλ. παράδειγμα 3^ο, σελ. 351).

(Υπόδ.: Ἐχομεν $d\ell^2 = (a + a \cosh \varphi)^2 [d\theta^2 + \frac{a^2 d\varphi^2}{(a + a \cosh \varphi)^2}]$, ἐν συνεχείᾳ θέσατε:

$$X = \theta, Y = \int_0^\varphi \frac{a d\varphi}{a + a \cosh \varphi} \text{ κ.τ.λ.}$$

56. Ὑπὸ ποίας συνθήκας αἱ εἰσώσεις $X = a_1 x + a_2 y + a_3$, $Y = b_1 x + b_2 y + b_3$ ὀρίσων ἰσοβαθιτὴν ἀπεικόνισιν τοῦ ἐπιπέδου (x, y) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (X, Y) .
(Ἀπάντ. Πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = 1$).

57. Δι' ἐφαρμογῆς τῶν εἰσώσεων τοῦ Weingarten δείξτε ὅτι: $N_u \times N_v = K(EG - F^2) \cdot N$.

57) (Θεώρημα του Catalan). Έστω S μία αναπτυγτή επιφάνεια ισομετρουώς απεικονισι-
 μος εις τό επίπεδον Π . Μία γραμμή γ τής S μετασχηματίζεται εις μίαν επίπεδον
 γραμμήν γ^* ίσου μήκους επί του Π . Η γ^* ιαλείται μετασχηματισμένη τής γ . Έστω M έ-
 να σημείον τής γ ιαί φ_M ή γωνία του έγγυτάτου επιπέδου τής γ εις τό M ιαί τής ιαδέτου
 επί τήν επιφάνειαν εις τό αυτό σημείον. Έάν R_M ιαί R_M^* είναι αι αύτεινες ιαμπυλότητος
 τών γ ιαί γ^* εις τό M δείξατε ότι: $R_M^* = R_M / \sin \varphi_M$ (Συχυρίνατε μέ τό θεώρημα του Meu-
 snier). Αιολούδως δείξατε ότι όρθός ιυυλιός ιώνος αύτεινος βάσεως P ιαί ύψους
 h , είναι ισομετρουώς απεικονισιμος εις τό επίπεδον. Εύρετε τήν αύτινα ιαμπυ-
 λότητος τής μετασχηματισμένης τής βάσεως, εις τυχόν σημείον αύτής.
 Μέ τήν βοήθειαν τών προτάσεων Euler, Meusnier, Catalan δώσατε τόν τρόπον
 ιατασιευτής τής έφαπτομένης τής μετασχηματισμένης τυχούσης ιαμπύλης επί
 του ιώνου εις τυχόν σημείον αύτής.

58. Νά εύρεθ ή τάεις τής έπαφής τής ιαμπύλης $z = t \cdot i + t^2 j + t^3 k$ μετά τής επιφάνειας
 $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ (παραβολοειδές) εις τό σημείον $t = 0$.
- 59. Νά εύρεθ ή είίωσις τής έφαπτομένης μιās γραμμής ύποδέτοντες ότι αύτη έχει έ-
 παφήν πρώτης τάξεως μετά τής γραμμής.
- 60. Δείξατε ότι τό έγγύτατον επίπεδον έχει έπαφήν 3-τάξεως μέ μίαν ιαμπύλην εις έ-
 να σημείον M εάν ιαί μόνον εάν, είτε ή ιαμπύλη είτε ή στρέψις τής ιαμπύλης μη-
 δένίδονται εις τό M .
61. Δίδεται ή ιυυλοιειδής $x = a(\varphi - \eta \mu \varphi)$, $y = a(1 - \sin \varphi)$. Ζητείται νά εύρεθ ή παρα-
 βολή ή όποία έχει μετά τής ιαμπύλης έπαφήν 3-τάξεως εις τό σημείον $\varphi = \pi$.
62. Νά εύρεθ ή είίωσις τής έγγυτάτης σφαίρας μιās γραμμής ύποδέτοντες, ότι αύ-
 τη έχει έπαφήν 3-τάξεως μετά τής γραμμής.
- 63) Δείξατε ότι, εάν μία επιφάνεια S έφαπτεται ενός επιπέδου P ιατά μίαν ιαμπύ-
 λην (γ) του επιπέδου, τότε ή έφαπτομένη τής ιαμπύλης εις τυχόν σημείον αύ-
 τής έχει έπαφήν 3-τάξεως μετά τής επιφάνειας.

- Δίδεται ἡ αμψύλη (γ) εἰς τὸν χώρον μέ ἐξίσωσιν $z = z(\ell)$. Ζητεῖται νά εὐρεθῶσιν:
- 1^α/ Ἡ περιβάλλουσα τῆς μονοπαραμετριῆς οἰμογενείας τῶν μαθέτων ἐπιπέδων αὐτῆς.
 - 2^α/ Ἡ περιβάλλουσα τῆς μονοπαραμετριῆς οἰμογενείας τῶν εὐδαιοποιούντων ἐπιπέδων αὐτῆς.
 - 3^α/ Ἐξετάσατε τὸ εἶδος τῆς εὐδαιογενοῦς ἐπιφανείας τοῦ 1^{ου} ἐρωτήματος

Λύσις: 1^α/ Ὡς γνωστόν ἡ ἐξίσωσις τοῦ μαθέτου ἐπιπέδου τῆς αμψύλης (γ) εἰς τὸ τυχόν σημεῖον $M(z)$ αὐτῆς εἶναι $(z^* - z) \cdot \tau = 0$ (1), ὅπου ἡ διανυσματικὴ αὐτῆς z^* ἀντιστοιχεῖ εἰς τυχόν σημεῖον τοῦ μαθέτου ἐπιπέδου τῆς αμψύλης.

Ἐπειδὴ τὰ z καὶ τ εἶναι συναρτήσεις τοῦ τόξου ℓ , ἡ (1) παριστᾷ μίαν μονο-παραμετριῆν οἰμογενεῖαν ἐπιπέδων. Διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς περιβαλλούσης τῆς οἰμογενείας ταύτης, παραγωγίζομεν τὴν (1) ὡς πρὸς ℓ καὶ εὐρίσκουμεν:

$$(z^* - z) \cdot \dot{\tau} - \dot{z} \cdot \tau = 0 \iff (z^* - z) \frac{1}{R} \nu - 1 = 0 \implies (z^* - z) \cdot \nu = R \quad (2)$$

Ἡ (2) παριστᾷ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην μαθετον εἰς τὸ σημεῖον $M(z)$ τῆς (γ) ἀπέχον τούτου ἀπόστασιν R , ἄρα διερχομένου διὰ τοῦ ἀντιστοίχου κέντρου αμψυλότητος. Ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων (1) καὶ (2) εἶναι προφανῶς ὁ πολικὸς ἄξων τῆς (γ). Συνεπῶς ἡ περιβάλλουσα ἐπιφάνεια τῶν (1) δὲ εἶναι ἡ πολικὴ ἐπιφάνεια τῆς αμψύλης (γ).

Διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς περιβαλλούσης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ (1) γράφεται $(z^* - z) \cdot (\nu \times \theta) = 0$ ἐν τῇ ὁποίᾳ ἔπεται ὅτι τὰ διανύσματα $z^* - z, \nu, \theta$ εἶναι συνεπίπεδα δηλ. δὲ εἶναι:

$z^* - z = t\nu + u\theta$. (3), ὁπότε ἡ (2) δὲ εἶναι: $(z^* - z) \cdot (\theta \times \tau) = R$ ἐν τῇ ὁποίᾳ, λόγῳ τῆς (3), $(t\nu + u\theta, \theta, \tau) = R$ ἢ $(t\nu, \theta, \tau) + (u\theta, \theta, \tau) = R$ ἢ $t(\nu, \theta, \tau) = R$ ἢ $t = R$. Ὅθεν ἡ (3) δὲ εἶναι τελικῶς $z^* = z(\ell) + R\nu + u\theta$ (4) ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης ὅπου τὰ ℓ καὶ u θεωροῦνται αἱ παράμετροι τῆς ἐπιφανείας.

2^α/ Ἡ ἐξίσωσις τῶν εὐδαιοποιούντων ἐπιπέδων ὡς γνωστόν εἶναι:

$$(z^* - z) \cdot \nu = 0 \quad \text{ἢ} \quad (z^* - z) \cdot (\theta \times \tau) = 0 \quad \text{ἢ} \quad (z^* - z, \theta, \tau) = 0 \quad (1)$$

Ἡ ζητούμενη περιβάλλουσα δὲ πληροῖ ὡς γνωστόν τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προϋπάρχουσαν διὰ παραγωγίσεως ὡς πρὸς ℓ δηλ. τὴν $(-\dot{z}, \theta, \tau) + (z^* - z, \dot{\theta}, \tau) + (z^* - z, \theta, \dot{\tau}) = 0$, ἡ ὁποία ἐν τῶν τύπων τοῦ Frenet λαμβάνει τὴν μορφήν: $(-\tau, \theta, \tau) + (z^* - z, -\sigma\nu, \tau) + (z^* - z, \theta, k\nu) = 0$ ἢ $(z^* - z, \nu, \sigma\tau) + (z^* - z, \nu, k\theta) = 0$ ἢ $(z^* - z, \nu, \sigma\tau + k\theta) = 0$ ἢ τὴν ἰσοδύναμον $z^* - z = t\nu + u(\sigma\tau + k\theta)$ (2)

Δυνάμει της (2) ή (1) γράφεται $(\tau v + v\sigma\tau + vk\theta, \theta, \tau) = 0$ ή $t(v, \theta, \tau) + v\sigma(\tau, \theta, \tau) + vk(\theta, \theta, \tau) = 0$ ή $t(v, \theta, \tau) = 0 \Rightarrow t = 0$.

Όθεν, η (2) λαμβάνει τελειώς την μορφήν: $\zeta^* = \zeta(\ell) + v(\sigma\tau + k\theta)$, η οποία είναι η ζητούμενη εξίσωσις της περιβαλλούσης.

3^α. Η εξίσωσις (4) του 1^{ου} ερωτήματος παριστᾷ προφανῶς εὐδαιογενήν ἐπιφάνειαν διότι λαμβάνει τὴν μορφήν $\zeta^* = \rho(\ell) + v g(\ell)$, ὅπου $\rho(\ell) = \zeta + Rv$ καὶ $g(\ell) = \theta$. Παραγωγίζομεν αὐτὴν ὡς πρὸς ℓ λαμβάνομεν:

$$\dot{\rho}_\ell = \dot{\zeta} + R\dot{v} + R\dot{v} = \dot{\zeta} + R\dot{v} + R(-k\tau + \sigma\theta) = \dot{\zeta} + R\dot{v} - \tau + R\sigma\theta = R\dot{v} + \sigma\theta \text{ καὶ } \dot{g}_\ell = \dot{\theta} = -\sigma v.$$

Θεωροῦντες τὸ μιῦτό γινόμενο $(\dot{\rho}_\ell, g, \dot{g}_\ell) = (R\dot{v} + R\sigma\theta, \theta, -\sigma v) = (R\dot{v}, \theta, -\sigma v) + (R\sigma\theta, \theta, -\sigma v) = 0$, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ εὐδαιογενὴς ἐπιφάνεια εἶναι ἀναπτυκτὴ.

65. Νὰ εὐρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν ἔγχυτᾶτων ἐπιπέδων τῆς υαμπύλης με' ἐξίσωσιν $\zeta = \zeta(\ell)$. Τί εἶδους ἐπιφάνεια εἶναι αὕτη;

66. Δίδεται ἡ γραμμὴ με' ἐξίσωσιν $\zeta = \zeta(\ell)$ καὶ θεωροῦμεν τὴν περιβάλλουσα τῶν εὐδαιοποιούντων ἐπιπέδων αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ $\zeta = \zeta(\ell)$ εἶναι γεωδαισιαυὴ τῆς περιβαλλούσης.

Ἰπὸδ: Συμφώνως πρὸς τὴν ἄσκησιν 64 (ἐρωτ. 2^α) ἡ ἐξίσωσις τῆς περιβαλλούσης εἶναι $\zeta^* = \zeta(\ell) + v(\sigma\tau + k\theta)$, ὅπου παράμετροι εἶναι τὰ ℓ καὶ v . Ἀνολούτως δεῖξατε ὅτι, τὸ υἰαδετον διάνυσμα N τῆς ἐπιφάνειας κατὰ μῆκος τῆς γραμμῆς $v = 0$ δηλ. τῆς $\zeta = \zeta(\ell)$ εἶναι τὸ $-kv$. Ἐν συνεχείᾳ δεῖξατε ὅτι, πληροῦται ἡ ἐξίσωσις $K_g \equiv (N, \zeta, \zeta) = 0$ τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν διὰ τὴν γραμμὴν $\zeta = \zeta(\ell)$ τὴν υειμένην ἐπὶ τῆς περιβαλλούσης.

67. Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς ἐπιφάνειας $z = \phi(\frac{y}{x})$.

Λύσις: Θέτομεν $x = u$, $y = uv$, ὅποτε $z = \phi(v)$ καὶ ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀσυμπτ. γραμμῶν γίνεται: $u\phi''(v)du^2 - 2\phi'(v)du dv = 0$ (1). Μία λύσις αὐτῆς εἶναι: $du = 0 \rightarrow v = c$ (u -παραμετριυὴ γραμμὴ). Ἐπὶ πλὴρον ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $\frac{\phi''(v)dv}{\phi'(v)} = \frac{2dv}{u} \rightarrow u^2 = c\phi'(v)$. Αἱ προβολαὶ τῶν τελευταίων ἀσυμπτωτικῶν γραμμῶν εἰς τὸ Oxy ἐπιπέδον ἔχουν ἐξίσωσιν: $x^2 = c\phi'(\frac{y}{x})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΧΙ

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

§1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΣΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ (Α^α Εΐδους)

Ἐστω (γ) μία λεία καμπύλη τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 με ἀρχὴν τὸ σημεῖον $A(a_1, a_2, a_3)$ καὶ πέρας τὸ σημεῖον $B(b_1, b_2, b_3)$. Ἐστωσαν δὲ $x = \varphi(\ell)$, $y = f(\ell)$, $z = \sigma(\ell)$, $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$ αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης με παράμετρον τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτῆς. Ἡ καμπύλη (γ) ὑποδέτομεν ὅτι διαγράφεται κατὰ μίαν ὠρισμένην φοράν. Ἐπειδὴ ἡ (γ) ὑπετέθη λεία, αἱ συναρτήσεις $\varphi(\ell)$, $f(\ell)$, $\sigma(\ell)$ ἔχουν, ὡς πρὸς ℓ , παραγώγους α^α-τάξεως συνεχεῖς, διὰ $\ell_1 \leq \ell \leq \ell_2$.

Ἐστω ἐπὶ πλεον ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $F(M) \equiv F(x, y, z)$ ὠρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ τόξου \widehat{AB} τῆς καμπύλης (γ) .

Θεωροῦμεν μίαν διαμέρισιν \mathcal{D} τοῦ τόξου \widehat{AB} διὰ τῶν σημείων $A \equiv M_0, M_1, M_2, \dots, M_n \equiv B$. Ἄς παραστήσωμεν διὰ $\Delta \ell_p$ τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1} M_p}$. Ἐφ' ἐκάστου τόξου $\widehat{M_{p-1} M_p}$ λαμβάνομεν καὶ ἀπὸ ἑνὸς τυχόν σημείου $H_p(x_p, y_p, z_p)$ καὶ ἀπολούδως σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα:

$$\sum_{p=1}^n F(H_p) \Delta \ell_p = \sum_{p=1}^n F(x_p, y_p, z_p) \Delta \ell_p \quad (1)$$

τὸ ὁποῖον καλεῖται ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν F καὶ τὴν διαμέρισιν \mathcal{D} .

Ἐστω $x_p = \varphi(\ell_p^*)$, $y_p = f(\ell_p^*)$, $z_p = \sigma(\ell_p^*)$, ὅπου $\ell_p^* \in [\ell_{p-1}, \ell_p]$, τότε τὸ ἄθροισμα (1) γράφεται:

$$\sum_{p=1}^n F(\varphi(\ell_p^*), f(\ell_p^*), \sigma(\ell_p^*)) \Delta \ell_p \quad (2).$$

Ἐπειδὴ αἱ F , $\varphi(\ell)$, $f(\ell)$, $\sigma(\ell)$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις ἐπὶ τοῦ τόξου \widehat{AB} , ἔπεται οὖν καὶ ἡ συνάρτησις $F(\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell))$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ ℓ .

Ἐὰν ἤδη θεωρήσωμεν μίαν ἀπολούδιαν διαμερίσεων τοῦ τόξου \widehat{AB} ταύτην, ὥστε $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0$, ὅταν $n \uparrow \infty$, τότε τὸ ἄθροισμα (2) ἔχει πάντοτε ὅριον καὶ ἐξ ὁρίσμου καλεῖται τοῦτο ἐπικαμπύλιον ὁλοκληρώμα α^α εἴδους

της συναρτήσεως $F(x, y, z)$ επί του τόξου \overline{AB} της καμπύλης (γ) ορίζεται ούτω:
$$\int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dl.$$

Όστε εξ ορισμού:

$$\int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dl \stackrel{\text{ο.ο.}}{=} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta \ell_p \rightarrow 0}} \sum_{p=1}^n F(\varphi(\ell_p^*), f(\ell_p^*), \sigma(\ell_p^*)) \Delta \ell_p \quad (3)$$

Η $F(x, y, z)$ θα ονομάζεται τότε οδοιμηρώσιμος κατά μήκος του τόξου \overline{AB} .

Έξ άλλου, το όριον του ανωτέρω άθροίσματος είναι:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta \ell_p \rightarrow 0}} \sum_{p=1}^n F(\varphi(\ell_p^*), f(\ell_p^*), \sigma(\ell_p^*)) \Delta \ell_p = \int_{\ell_1}^{\ell_2} F(\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell)) d\ell \quad (4)$$

Εν τών (3) και (4) λαμβάνομεν:

$$\boxed{\int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dl = \int_{\ell_1}^{\ell_2} F(\varphi(\ell), f(\ell), \sigma(\ell)) d\ell} \quad (5)$$

Εάν η καμπύλη είναι επίπεδος έχουσα εξισώσεις: $x = \varphi(\ell)$, $y = f(\ell)$, τότε ο τύπος (5) γράφεται:

$$\int_{\overline{AB}} F(x, y) dl = \int_{\ell_1}^{\ell_2} F(\varphi(\ell), f(\ell)) d\ell \quad (6)$$

Είς την περίπτωση όπου το τόξον \overline{AB} είναι η υδιστή καμπύλη (γ) , τότε το επι-καμπύλιον οδοιμήρωμα θα το συμβολίζωμεν ούτω: $\oint_{\gamma} F(x, y, z) dl$.

§2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Α^{ου} ΕΙΔΟΥΣ

Θεώρημα XI-2-1. Έστω η λεία καμπύλη (γ) έχουσα τās παραμετριάς εξισώσεις:

$$x = \varphi(t), \quad y = f(t), \quad z = \sigma(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

και η $F(x, y, z)$ μία συνάρτησις ώρισμένη και συνεχής επί του τόξου \overline{AB} της (γ) . Τότε έχουμε:

$$\int_{\overline{AB}} F(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + f'^2(t) + \sigma'^2(t)} dt \quad (1).$$

Τό επιμαμπύλιον ὁλομήρωμα ὑπάρχει ἐάν, καί μόνον, ἐάν, τό ὠρισμένον ὁλομήρωμα τοῦ δευτέρου μέλους ὑπάρχη.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή τό τόξον \widehat{AB} ὑπετέθη λεῖο, αἱ συναρτήσεις $\varphi(t)$, $f(t)$, $\sigma(t)$ εἶναι παραγωγίσιμοι καί μέ συνεχεῖς παραγώγους εἰς τό διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$.

Ἐπὶ ἡλῆον δέ θά εἶναι: $\varphi'(t) + f'(t) + \sigma'(t) > 0$

Θεωροῦντες τὰς παραμετρίους ἐξισώσεις τῆς καμπύλης, τό ὁλομήρωμα (1) γράφεται:

$$\sum_{p=1}^n F(x_p, y_p, z_p) \Delta \ell_p = \sum_{p=1}^n F(\varphi(t_p^*), f(t_p^*), \sigma(t_p^*)) \sqrt{\varphi'^2(t_p) + f'^2(t_p) + \sigma'^2(t_p)} \cdot \Delta t_p$$

ὅπου $t_p^* \in [t_{p-1}, t_p]$ καί εἶναι τοιοῦται, ὥστε νά ἔχωμεν:

$x_p = \varphi(t_p^*)$, $y_p = f(t_p^*)$, $z_p = \sigma(t_p^*)$, τό δέ $t_p \in [t_{p-1}, t_p]$.

Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0 \Rightarrow \max_{1 \leq p \leq n} \Delta t_p \rightarrow 0$, ὅτε καί $n \uparrow \infty$, τότε τό πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος τείνει πρὸς τό $\int_{\widehat{AB}} F(x, y, z) d\ell$, ἐνῶ τό δεύτερον μέλος τείνει πρὸς τό $\int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + f'^2(t) + \sigma'^2(t)} dt$.

$$\text{Ὅθεν, } \int_{\widehat{AB}} F(x, y, z) d\ell = \int_{t_1}^{t_2} F(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + f'^2(t) + \sigma'^2(t)} dt.$$

• Ἐάν ἡ καμπύλη (γ) εἶναι ἐπιπεδος ἔχουσα ἐξίσωσιν $y = y(x)$, $a \leq x \leq \beta$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x, y) d\ell = \int_a^\beta F(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (2)$$

• Ἐάν ἡ καμπύλη (γ) εἶναι ἐπιπεδος ἔχουσα ἐξίσωσιν $\rho = \rho(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x, y) d\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta \quad (3)$$

• Ἐάν $F(x, y) \equiv 1$ καί ἡ καμπύλη (γ) εἶναι λεῖα, τότε σύμφωνα μέ τόν τύπον (3), § 1, τό δεύτερον μέλος τούτου θά παριστᾷ τό μήκος τῆς καμπύλης (γ), ὥ-

$$\text{τέ } \lim_{\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0} \sum_{p=1}^n \Delta \ell_p = L, \text{ ὁπλοδή θά ἔχωμεν } L = \int_{\gamma} d\ell.$$

Είδιως, τόμῃος L μίας υδιστῆς υαμπύλης γ παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$L = \oint_{\gamma} d\ell \quad (4)$$

Ἰδιότητες τοῦ ἐπιυαμπυλίου ὁδουληρώματος α^ω εἴδους.

Αἱ βασικαὶ ἰδιότητες τοῦ ἐπιυαμπυλίου ὁδουληρώματος α^ω εἴδους προϋπτοῦν ἐκ τοῦ τύπου (5) §1. Εἶναι δέ αὗται ἀνάλογοι πρὸς αὐτάς τοῦ ὠρισμένου ὁδουληρώματος, θά ἀναφέρωμεν δὲ ἀπλῶς αὐτάς ἄνευ ἀποδείξεως.

Πρὸς τούτοις ἔστω ἡ συνάρτησις $F(x, y, z)$ τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὁδουληρώσιμον κατὰ μήκος τοῦ τόξου \overline{AB} τῆς λείας υαμπύλης (γ). Ἰσχύουν αἱ κατωθι ἰδιότητες:

I. Ἐάν C_1, C_2 εἶναι σταθεραὶ καὶ αἱ $F(x, y, z) = F(M)$ καὶ $\phi(x, y, z) = \phi(M)$, $M = (x, y, z)$ εἶναι ὁδουληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ τόξου \overline{AB} , τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\overline{AB}} \{C_1 F(M) + C_2 \phi(M)\} d\ell = C_1 \int_{\overline{AB}} F(M) d\ell + C_2 \int_{\overline{AB}} \phi(M) d\ell.$$

II. Ἐάν $F(M) \geq 0$ καὶ εἶναι ὁδουληρώσιμος ἐπὶ τοῦ τόξου \overline{AB} , τότε $\int_{\overline{AB}} F(M) d\ell \geq 0$.

III. Ἐάν τὸ \overline{AB} ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τόξα $\overline{A\Gamma}$ καὶ $\overline{\Gamma B}$, τότε θά ἔχωμεν:

$$\int_{\overline{AB}} F(M) d\ell = \int_{\overline{A\Gamma}} F(M) d\ell + \int_{\overline{\Gamma B}} F(M) d\ell$$

IV. Ἐάν ἡ $F(M)$ εἶναι ὁδουληρώσιμος ἐπὶ τοῦ \overline{AB} , τότε καὶ ἡ $|F(M)|$ εἶναι ὁδουληρώσιμος ἐπὶ τοῦ \overline{AB} καὶ ἰσχύει:

$$\left| \int_{\overline{AB}} F(M) d\ell \right| \leq \int_{\overline{AB}} |F(M)| d\ell$$

→ V. Εάν η $F(M)$ είναι συνεχής επί του \widehat{AB} , υπάρχει ένα σημείο $M^* \in \widehat{AB}$ τοι-
 ούτον, ώστε: $\int_{\widehat{AB}} F(M) d\ell = F(M^*) \cdot L$, όπου L είναι το μήκος του τόξου \widehat{AB} . (Θεώρη-
 μα της Μέσης τιμής).

VI. Έχομεν $\int_{\widehat{AB}} F(M) d\ell = \int_{\widehat{BA}} F(M) d\ell$. Ούτως η αλλαγή της διεύθυνσης του τόξου \widehat{AB} δεν
 αλλάσσει την τιμήν του ολοκληρώματος διά μίαν αυθαίρετον πραγματινή συν-
 αρτησιν $F(M)$ ώρισμένη κατά μήκος αυτού.

Παράδειγματα υπολογισμού επιυαμπυλίων ολοκληρωμάτων α^ο είδους.

1^ο/ Νά υπολογισθῇ τὸ επιυαμπύλιον ολοκληρώμα $\int_{\widehat{AB}} (x-z) ds$, ὅπου τὸ \widehat{AB} εἶναι
 τόξον τῆς ἐλλειπσοειδοῦς με ἐξίσωσιν: $x = \cos t$, $y = \eta \mu t$, $z = t$ καὶ $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, \frac{\pi}{2})$.

Λύσις: Τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ τόξου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς $t_1 = 0$ καὶ $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Ἐν
 συνεχείᾳ ἐφαρμόσομεν τὸν τύπον (1) καὶ ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}} (x-z) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - t) \cdot \sqrt{\eta^2 \cos^2 t + \sin^2 t + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - t) dt = \sqrt{2} (1 - \frac{\pi^2}{9})$$

2^ο/ Νά υπολογισθῇ τὸ επιυαμπύλιον ολοκληρώμα $\int_{\widehat{AB}} y d\ell$, ὅπου τὸ \widehat{AB} εἶναι τὸ τόξον
 με ἐξίσωσιν $y = 2\sqrt{x}$ καὶ τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $x=3$ ἕως $x=24$.

Λύσις: Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (2) ἔχομεν:

$$\int_{\widehat{AB}} y d\ell = \int_3^{24} 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 2 \int_3^{24} \sqrt{x+1} dx = \frac{4}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_3^{24} = 156.$$

3^ο/ Νά υπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς ἐλλείψεως: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Λύσις: Αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως θὰ εἶναι προφανῶς
 $x = a \eta \mu t$, $y = b \sigma \nu t$, $0 \leq t < 2\pi$ καὶ τὸ μήκος αὐτῆς παρέχεται ὑπὸ τοῦ ἐπι-

υαμπυλίου όδουληρώματος $L = \oint dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 \eta \mu^2 t + a^2 \sigma \nu^2 t} dt =$
 $= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \eta \mu^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2 \eta \mu^2 t} dt$, όπου έτέθη $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Τό άνω-
 τέρω είναι ένα έλλειπτιυόν όδουλήρωμα και διά τόν ύπολογισμόν του
 βλ. Τόμος Ι, σελ. 655, Παράδειγμα 3^{ον}.

$$\text{Είναι } \frac{L}{4} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right).$$

§3. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ Α^{ου} ΕΙΔΟΥΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

Ι. Προσδιορισμός της μάδης ύδλιυής γραμμής εκ της γραμμικής πυκνότητος αυτής.

Μία ύδλιυή γραμμή θά νοήται ως μία τμηματιυώς δεία υαμπύλη κατά μήκος
 της όποιας είναι υατανεμημένη ή μάδα. Η μάδα θά είναι συνάρτησις (συναλλοσυκάρτησις) του τόξου ℓ αυ-
 τής, ήτοι $m = m(\ell)$.

Έε όρισμού υαλοϋμεν γραμμικυήν πυκνότητα $\delta(M)$ της έν λόγυ υαμπύλης
 εις τό σημείον $M(x, y, z)$ αυτής τό όριον του λόγου της μάδης $\Delta m(\ell)$ της φερο-
 μένης επί του τόξου $\widehat{MM'}$ αυτής πρός τό μήκος $\Delta \ell$ του τόξου $\widehat{MM'}$, όταν τό $M' \rightarrow M$.

$$\text{Ήτοι: } \delta(M) = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\ell)}{\Delta \ell} = \frac{dm(\ell)}{d\ell} \quad (1)$$

Προσεγγιστιυώς λοιπόν ή μάδα ή φερομένη επί του τόξου $\widehat{MM'}$ μήκους $\Delta \ell$
 θά είναι $\delta(M) \cdot \Delta \ell$.

Έάν ήδη, ζητούμεν την ύδλιυήν μάσαν m την φερομένην επί του τόξου \widehat{AB}
 της έν λόγυ ύδλιυής γραμμής, έυτελοϋμεν επί του τόξου \widehat{AB} μίαν διαμέρισιν
 $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$, όπου τό μήκος του τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p} = \Delta \ell_p$, και έν συνεχεία
 σσηματίσομεν τό άθροισμα:

$$\sum_{p=1}^n \delta(M_p) \cdot \Delta \ell_p \quad (2), \text{ όπου } M_p \in \widehat{M_{p-1}M_p}$$

Τό άθροισμα (2) δίδει προσεγγιστιυώς την μάσαν την φερομένην υπό της
 ύδλιυής γραμμής μεταξύ των σημείων A και B αυτής.

Έάν ήδη τό $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0$, ότε και $n \rightarrow \infty$, τό άθροισμα (2) τείνει πρός ένα όρι-
 ον τό όποϊον μάς δίδει την φερομένην μάσαν υπό της ύδλιυής γραμμής μετα-

Εὐ τῶν σημείων A καὶ B αὐτῆς. Ἐξ ἄλλου αὐτό τό ὅριον δέν εἶναι τίποτ' ἄλλο παρὰ τό $\int_{\widehat{AB}} \delta(x, y, z) d\ell$.

$$\text{Ὅθεν:} \quad m = \int_{\widehat{AB}} \delta(x, y, z) d\ell \quad (3).$$

II. Εὐρεσις τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου βάρους μιᾶς ὑδλικῆς γραμμῆς.

Ἐστω μία μᾶσα εἶναι κατανεμημένη ἐπὶ μιᾶς ὑδλικῆς γραμμῆς μέ γραμμικὴν πυκνότητα $\delta(x, y, z)$. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς καμπύλης μιαν διαμέρισιν καὶ ἔστω $\Delta\ell_p$ τό μήκος τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$ αὐτῆς. Προσεγγιστικῶς ἡ μᾶσα ἡ φερομένη ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$ εἶναι ἴση πρὸς $\delta(x_p, y_p, z_p) \cdot \Delta\ell_p$. Ταύτην τὴν μᾶσαν τὴν θεωροῦμεν συγκεντρωμένην εἰς τό σημεῖον (x_p, y_p, z_p) . Οὕτω ἔχομεν ἓνα σύστημα ἐξ n -ὑδλικῶν σημείων καὶ ὡς πρὸς τὸν ἐν τῆς Μηχανικῆς, αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους (κ.β.) αὐτοῦ τοῦ ὑδλικοῦ συστήματος εἶναι:

$$x_k = \frac{\sum_{p=1}^n x_p \cdot \delta(x_p, y_p, z_p) \Delta\ell_p}{\sum_{p=1}^n \delta(x_p, y_p, z_p) \Delta\ell_p}, \quad y_k = \frac{\sum_{p=1}^n y_p \cdot \delta(x_p, y_p, z_p) \Delta\ell_p}{\sum_{p=1}^n \delta(x_p, y_p, z_p) \Delta\ell_p}$$

$$z_k = \frac{\sum_{p=1}^n z_p \cdot \delta(x_p, y_p, z_p) \Delta\ell_p}{\sum_{p=1}^n \delta(x_p, y_p, z_p) \Delta\ell_p}$$

Αἱ ἀνωτέρω ἐκφράσεις δύνανται νά θεωρηθῶν, ὅτι δίδουν προσεγγιστικῶς τὰς συντεταγμένας τοῦ κ.β. τῆς ὑδλικῆς γραμμῆς \widehat{AB} .

Ἐάν ᾗσῃ $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta\ell_p \rightarrow 0$ ὅτε καὶ $n \rightarrow \infty$ καὶ μεταβαίνοντες εἰς τὰ ὅρια, λαμβάνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων:

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \frac{\int_{\widehat{AB}} x \cdot \delta(x, y, z) d\ell}{\int_{\widehat{AB}} \delta(x, y, z) d\ell}, & y_k &= \frac{\int_{\widehat{AB}} y \cdot \delta(x, y, z) d\ell}{\int_{\widehat{AB}} \delta(x, y, z) d\ell} \\ z_k &= \frac{\int_{\widehat{AB}} z \cdot \delta(x, y, z) d\ell}{\int_{\widehat{AB}} \delta(x, y, z) d\ell} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Εάν δε η γραμμή είναι ομογενής οι τύποι (1) γίνονται :

$$x_k = \frac{\int_{\bar{A}\bar{B}} x \, d\ell}{\int_{\bar{A}\bar{B}} d\ell}, \quad y_k = \frac{\int_{\bar{A}\bar{B}} y \, d\ell}{\int_{\bar{A}\bar{B}} d\ell}, \quad z_k = \frac{\int_{\bar{A}\bar{B}} z \, d\ell}{\int_{\bar{A}\bar{B}} d\ell} \quad (2)$$

• Είς την περίπτωση επιπέδου υδίουτης γραμμής οι τύποι γίνονται :

$$x_k = \frac{\int_{\bar{A}\bar{B}} x \, d\ell}{\int_{\bar{A}\bar{B}} d\ell} \text{ και } y_k = \frac{\int_{\bar{A}\bar{B}} y \, d\ell}{\int_{\bar{A}\bar{B}} d\ell} \quad (1')$$

Πολλαπλασιάζοντας τον δεύτερον των ανωτέρω τύπων (1') επί 2π και λαμβανόμενου υπ' όψιν ότι $\int_{\bar{A}\bar{B}} d\ell = L$ (μήκος του τόξου της καμπύλης) έχουμε :

$$2\pi \cdot y_k \cdot L = 2\pi \int_{\bar{A}\bar{B}} y \cdot d\ell \quad (2')$$

Το δεύτερον μέλος του τύπου (2') παριστᾷ τὸ ἔμβασδόν S τῆς ἐπιφανείας τῆς διαγραφομένης ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τόξου $\bar{A}\bar{B}$ περιστρεφομένου περὶ \bar{E} τοῦ ἄξονος τῶν x (βλ. Τόμος I, σελ. 581, τύπον (6)).

Ὅθεν, $S = 2\pi y_k \cdot L$, ἐξ οὗ τὸ θεώρημα :

Θεώρημα XI - 3-1. (Πάππου) Τὸ ἔμβασδόν τῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ ἐνὸς δείου τόξου $\bar{A}\bar{B}$ περιστρεφομένου περὶ \bar{E} τοῦ ἄξονος τῶν x , ὅστις δὲν τέμνει τοῦτο, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου $\bar{A}\bar{B}$ ἐπὶ τὸ μήκος τῆς περιφερείας τὴν ὁποίαν διαγράφει τὸ κ.β. αὐτοῦ τοῦ τόξου.

III. Ὑπολογισμός τῆς ροπῆς ἀδρανείας ὑδίουτης γραμμῆς.

Ὡς γνωστόν, ἐκ τῆς Μηχανικῆς, ἡ ροπή ἀδρανείας ὑδίου σημείου μάσης πρὸς ἓνα ἄλλο σημεῖον ἢ ἄξονα ἀπέχοντος ἀπὸ αὐτοῦ ἀπόστασιν τ εἶναι $m\tau^2$.

Ἀκολουθοῦντες ἑνανάλωρον συλλογισμόν ὡς προηρουμένως ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς ὑδίουτης γραμμῆς $\bar{A}\bar{B}$, ἥτις ἔχει γραμμικὴν πυκνότητα $\delta(x,y,z)$,

ως προς τους άξονες ox, oy, oz θα παρέχεται υπό των υάτωδι όλουθηρωμάτων:

$$I_x = \int_{\overline{AB}} (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) d\ell, \quad I_y = \int_{\overline{AB}} (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) d\ell, \quad I_z = \int_{\overline{AB}} (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) d\ell.$$

Εάν δέ έχωμεν επίπεδον ύδιωήν γραμμήν \overline{AB} , τότε ή ροπή άδρανείας ως προς τους άξονες ox, oy είναι:

$$I_x = \int_{\overline{AB}} y^2 \delta(x, y) d\ell, \quad I_y = \int_{\overline{AB}} x^2 \delta(x, y) d\ell.$$

Εφαρμογαι 1%. Νά υπολογισθῇ ή ροπή άδρανείας του τόξου \overline{AB} της καμπύλης $y=x^3$ από του σημείου $A(0,0)$ μέχρι του σημείου $B(1,1)$ ως προς την εύθειαν $y=x$, όταν ή πυκνότης του τόξου είναι $\delta(x, y) = \frac{2x}{y\sqrt{1+9x^4}}$.

Λύσις: Άς υαλήσωμεν d τήν άπόστασιν του σημείου $M(x, y)$ της καμπύλης από την διχοτόμον $y=x$. Θα είναι τότε $d^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$. Επομένως ή ροπή άδρανείας δά είναι: $I = \int_{\overline{AB}} \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-y)^2 \cdot 2x}{y\sqrt{1+9x^4}} d\ell.$

$$\text{Είναι δέ } d\ell = \sqrt{1+y'(x)^2} dx = \sqrt{1+(3x^2)^2} dx.$$

$$\text{Οθεν, } I = \int_0^1 \frac{(x-x^3)^2 x}{x^3 \sqrt{1+9x^4}} \cdot \sqrt{1+9x^4} dx = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx = \frac{8}{15}.$$

2%. Νά εύρεθῇ τό υ.β. της κυκλολειδοϋς καμπύλης:

$$x=a(t-\eta\mu t), y=a(1-\sigma\omega t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

θεωρουμένης ως όμορνεοϋς ύδιωής γραμμής.

Λύσις: Επειδή ή κυκλολειδής είναι συμμετρίωή ως προς την εύθειαν $x=\eta \cdot a$, άρκει νά εύρωμεν τό y_x .

$$\text{Είναι: } y_x = \frac{\phi y \cdot d\ell}{\phi a \ell} \quad (1)$$

Είναι δέ $d\ell = 2a\eta\mu \frac{t}{2} dt$ και ό (1) γίνεται:

$$y_x = \frac{\int_0^{2\pi} a(1-\sigma\omega t) \cdot 2a\eta\mu \frac{t}{2} dt}{2a \int_0^{2\pi} \eta\mu \frac{t}{2} dt} = \frac{4a^2 \int_0^{2\pi} \eta\mu \frac{t}{2} dt}{2a \int_0^{2\pi} \eta\mu \frac{t}{2} dt} = \frac{4}{3} a.$$

Άρα $x_x = \eta a$ και $y_x = \frac{4}{3} a$.

§ 4. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ (Β³ ΕΙΔΟΥΣ)

Ἐστω (γ) μία προσανατολισμένη λεία καμπύλη τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 καὶ τὸ τόξον \widehat{AB} αὐτῆς, ὅπου $A(a_1, a_2, a_3)$ καὶ $B(b_1, b_2, b_3)$ καὶ ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις $\vec{F}(x, y, z) = i P(x, y, z) + j Q(x, y, z) + k R(x, y, z)$ ὁρισμένη κατὰ μήκος τοῦ τόξου \widehat{AB} .

Διαιροῦμεν τὸ τόξον \widehat{AB} τῆς (γ) εἰς n -τεμήματα διὰ μιᾶς διαμερίσεως ϕ διὰ τῆς παρεμβολῆς τῶν σημείων $A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n=B$ καὶ ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον M_p αὐτῆς ἔχει συντεταγμένους (x_p, y_p, z_p) . Θετόμεν ὡς, $\Delta x_p = x_p - x_{p-1}$, $\Delta y_p = y_p - y_{p-1}$, $\Delta z_p = z_p - z_{p-1}$ καὶ ἐπὶ πλέον ὑποθέτομεν $(x_0, y_0, z_0) \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $(x_n, y_n, z_n) \equiv (b_1, b_2, b_3)$. Τέλος λαμβάνομεν εἰς ἕαστον τῶν τόξων $\widehat{M_{p-1}M_p}$ τῆς καμπύλης καὶ ἀπὸ ἑνὸς τυχόν σημείου $(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \in \widehat{M_{p-1}M_p}$ καὶ ἀμολούδως σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα:

$$\sum_{p=1}^n \left\{ P(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta x_p + Q(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta y_p + R(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta z_p \right\} \quad (1)$$

Τὸ (1) καλεῖται ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν \vec{F} καὶ τὴν διαμέρισιν ϕ ἐπὶ τοῦ τόξου \widehat{AB} .

Ἐστω $\Delta \ell_p$ τὸ μήκος τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$. Ἐὰν τὸ $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0$, τότε τὸ $n \rightarrow \infty$. Ἐὰν τὰ $\Delta \ell_p \rightarrow 0$, τότε καὶ $\Delta x_p \rightarrow 0$, $\Delta y_p \rightarrow 0$, $\Delta z_p \rightarrow 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ὁρισμός XI-4-1. Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἄθροισμα (1) τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν J καθὼς $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0$, ἐὰν διὰ πάδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχῃ ἀριθμὸς $\delta(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε ὅταν ὑπάρχῃ διαμέρισις μέ $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p < \delta(\varepsilon)$ νὰ ἔχωμεν:

$$\left| J - \sum_{p=1}^n \left\{ P(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta x_p + Q(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta y_p + R(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta z_p \right\} \right| < \varepsilon.$$

Θὰ γράφωμεν τότε:

$$J = \lim_{\substack{\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n \left\{ P(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta x_p + Q(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta y_p + R(\xi_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta z_p \right\} \quad (2)$$

ὁ ἀριθμὸς J καλεῖται ἐπιεκαμπύλιον ὁλοκληρώμα τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως \vec{F} κατὰ μήκος τοῦ τόξου \widehat{AB} τῆς καμπύλης (γ) (β³ εἶδους).

Ο αριθμός J συμβολίζεται ούτω:

$$J = \int_{\overline{AB}} P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz \quad (3),$$

όπου M είναι το σημείο (x, y, z) .

Έστω η διανυσματική αυτής $\vec{r} = i x + j y + k z$, τότε υαί $d\vec{r} = i dx + j dy + k dz$.

ΈΕ άλλου: $\vec{F} = i \cdot P(x, y, z) + j \cdot Q(x, y, z) + k \cdot R(x, y, z)$.

Ένενα τών άνωτέρω έυφράσεων έχομεν:

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

Συνεπώς ο συμβολισμός (3) του έπιυαμπτυλίου όλοκληρώματος γράφεται:

$$J = \int_{\overline{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4)$$

Έάν τó τόΕον \overline{AB} είναι μία κλειστή καμπύλη, τότε γράφεται:

$$J = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

Προφανώς τó έπιυαμπτυλίου όλοκληρώμα (3) δύναται νά θεωρηθῇ ως τó άθροισμα τών τριών έπιυαμπτυλίων όλοκληρώματων.

$$\int_{\overline{AB}} P(M) dx, \quad \int_{\overline{AB}} Q(M) dy, \quad \int_{\overline{AB}} R(M) dz$$

των διανυσματιων συναρτήσεων $(P, 0, 0)$, $(0, Q, 0)$, $(0, 0, R)$.

Έάν η καμπύλη (γ) είναι έπίπεδος υαί έχομεν τήν διανυσματικήν συνάρτησιν $\vec{F} = i \cdot P(x, y) + j \cdot Q(x, y)$, έχομεν πάλιν τόν ανάλογον όρισμόν του έπιυαμπτυλίου όλοκληρώματος.

Ούτω δά έχωμεν:

$$J = \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \text{ κ.τ.λ.}$$

§5. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ Β' ΕΙΔΟΥΣ

Θεώρημα XI-5-1. Έστω τó κλειτό τόΕο \overline{AB} της καμπύλης (γ) έχούσης παρα-

μετρικῆς ἐξισώσεις $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, $z = \sigma(t)$, $a = t = \theta$.

Ἐστω ἐπὶ πλῆθον $\vec{F} = i \cdot P(x, y, z) + j \cdot Q(x, y, z) + k \cdot R(x, y, z)$ ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις ὁρισμένη καὶ συνεχὴς ἐπὶ τοῦ \overline{AB} .

Τότε δὲ ἔχουμεν:

$$\int_{\overline{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left\{ P(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) f'(t) + R(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \sigma'(t) \right\} dt$$

Ἀπόδειξις Ἐστω $A \equiv M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n \equiv B$ μία διαμέρισις τοῦ τόξου \overline{AB} τὰ σημεῖα τῆς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \theta$ τῆς μεταβλητῆς t . Αἱ τιμαὶ αὗται ἀποτελοῦν ἐπίσης μίαν διαμέρισιν τοῦ διαστήματος $[a, \theta]$. Ἄς θεσωμεν $x_p = \varphi(t_p)$, $y_p = f(t_p)$, $z_p = \sigma(t_p)$ καὶ ἀπολοῦθως ἀσχηματίζωμεν τὸ ἄθροισμα:

$$\sum_{p=1}^n \left\{ P(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta x_p + Q(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta y_p + R(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta z_p \right\} \quad (1),$$

τὸ ὁποῖον διασπᾶται εἰς τρία ἄθροισματα. Ἄς θεωρήσωμεν τὸ πρῶτον ἐξ αὐτῶν, ἦτοι:

$$\sum_{p=1}^n P(E_p, \eta_p, \zeta_p) (x_p - x_{p-1}) = \sum_{p=1}^n P(\varphi(\tau_p), f(\tau_p), \sigma(\tau_p)) \varphi'(\theta_p) \cdot (t_p - t_{p-1}) \quad (2)$$

ὅπου: $E_p = \varphi(\tau_p)$, $\eta_p = f(\tau_p)$, $\zeta_p = \sigma(\tau_p)$ καὶ $t_{p-1} < \theta_p < t_p$.

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως ὅτι τὸ τόξον \overline{AB} εἶναι λείον, ἔπεται ὅτι ὑπάρχουν αἱ παράγωγοι $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\sigma'(t)$ εἶναι δέ καὶ συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ $[a, \theta]$ καὶ ἐπειδὴ τὸ διάστημα $[a, \theta]$ εἶναι κλειστόν δὲ εἶναι καὶ ὁμαλῶς συνεχεῖς ἐπ' αὐτοῦ, ἦτοι: διὰ τὰδε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\eta(\varepsilon)$ τοιοῦτον, ὥστε: $|\varphi'(\theta_p) - \varphi'(\tau_p)| < \varepsilon$ διὰ τὰδε $\theta_p, \tau_p \in [a, \theta]$ ποὺ πληροῦν τὴν σχέσιν: $|\theta_p - \tau_p| < \eta(\varepsilon)$.

Ἡ συνάρτησις $P(x, y, z)$ οὖσα συνεχὴς ἐπὶ τοῦ \overline{AB} δὲ εἶναι καὶ φραγμένη ἐπ' αὐτοῦ, ἦτοι: ὑπάρχει $M > 0$ τοιοῦτον, ὥστε $|P(x, y, z)| \leq M$ διὰ τὰδε $(x, y, z) \in \overline{AB}$.

Ἐυλόγημεν μίαν διαμέρισιν τοῦ $[a, \theta]$ τοιαύτην, ὥστε, $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta t_p < \eta(\varepsilon)$. Τὸ ἄθροισμα (2) γράφεται:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n P(E_p, \eta_p, \zeta_p) (x_p - x_{p-1}) &= \sum_{p=1}^n P(\varphi(\tau_p), f(\tau_p), \sigma(\tau_p)) \varphi'(\tau_p) \Delta t_p + \\ &+ \sum_{p=1}^n P(\varphi(\tau_p), f(\tau_p), \sigma(\tau_p)) (\varphi'(\theta_p) - \varphi'(\tau_p)) \Delta t_p. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι δε } \left| \sum_{p=1}^n P(\varphi(\tau_p), f(\tau_p), \sigma(\tau_p)) (\varphi'(\theta_p) - \varphi'(\tau_p)) \Delta t_p \right| \leq M \cdot \varepsilon \cdot \sum_{p=1}^n \Delta t_p = M \cdot (\beta - \alpha) \cdot \varepsilon.$$

Συνεπώς:

$$\left| \sum_{p=1}^n P(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta x_p - \sum_{p=1}^n P(\varphi(\tau_p), f(\tau_p), \sigma(\tau_p)) \varphi'(\tau_p) \Delta t_p \right| \leq M(\beta - \alpha) \cdot \varepsilon \quad (3)$$

Λαμβάνοντας τα όρια της (3) όταν $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta t_p \rightarrow 0$, τότε και $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta x_p \rightarrow 0$,

θα έχουμε:

$$\left| \lim_{\substack{\max_{1 \leq p \leq n} \Delta x_p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n P(E_p, \eta_p, \zeta_p) \Delta x_p - \lim_{\substack{\max_{1 \leq p \leq n} \Delta t_p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n P(\varphi(\tau_p), f(\tau_p), \sigma(\tau_p)) \varphi'(\tau_p) \Delta t_p \right| \leq M \cdot (\beta - \alpha) \cdot \varepsilon \quad \eta$$

$$\left| \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z) dx - \int_{\widehat{AB}} P(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq M \cdot (\beta - \alpha) \cdot \varepsilon, \text{ διά κάθε } \varepsilon > 0.$$

$$\text{Ήθαεν: } \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z) dx = \int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \varphi'(t) dt \quad (4)$$

Κατ' αναλογία έχουμε:

$$\int_{\widehat{AB}} Q(x, y, z) dy = \int_{t_1}^{t_2} Q(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) f'(t) dt \quad (5)$$

$$\int_{\widehat{AB}} R(x, y, z) dz = \int_{t_1}^{t_2} R(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \sigma'(t) dt \quad (6)$$

Διά προσθέσεως των (4), (5) και (6) έχουμε το άποδεικτέον.

Παρατηρήσεις:

19/ Τ'άνωτέρω ισχύουν και διά την περίπτωσην υλειστής καμπύλης γραμμής.

20/ Διά να υπολογίσωμεν το επιυκαμπύλιον όλουμήρωμα είναι αναγκαίον να γνωρίσωμεν τας παραμετρικάς εξισώσεις της καμπύλης.

33/ Εάν τό τόξον \widehat{AB} αποτελήται από ένα πεπερασμένον πλήθος λείων τόξων

$\widehat{AA_1}, \widehat{A_1A_2}, \dots, \widehat{A_nB}$ τότε θα έχουμε:

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AA_1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\widehat{A_1A_2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \dots + \int_{\widehat{A_nB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

I. Τό επικαμπύλιον ολοκλήρωμα εις τό επίπεδον.

Ἐάν ἀναφερώμεθα εἰς τό επίπεδον oxy καί ἡ καμπύλη (γ) ἔχη τὰς παραμετρί-
κὰς ἐξισώσεις:

$$x = \varphi(t), y = f(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

ἡ δέ συνάρτησις $\vec{F}(x, y) = i \cdot P(x, y) + j \cdot Q(x, y)$ εἶναι ὠρισμένη καί συνεχὴς ἐπὶ τοῦ
τόξου \widehat{AB} τῆς (γ) , τότε θὰ ἔχωμεν κατ' ἀναλογία πρὸς τό ἐπικαμπύλιον ολοκλή-
ρωμα τοῦ \mathbb{R}^2 :

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{ P(\varphi(t), f(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), f(t)) f'(t) \} dt \quad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἔχομεν τὴν ἐπίπεδον καμπύλην με ἐξίσωσιν $y = \psi(x)$,
 $\alpha \leq x \leq \beta$, τότε λαμβάνοντες ὡς παραμετρίκας ἐξισώσεις τῆς καμπύλης τὰς
 $x = x, y = y(x), \alpha \leq x \leq \beta$, ὁ τύπος (1) γίνεταί:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{ P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x) \} dx \quad (2)$$

II Ἐξάρτησις τοῦ ἐπικαμπυλίου ολοκληρώματος ἐκ τῆς φορᾶς τοῦ τόξου.

Τό ἐπικαμπύλιον ολοκληρώμα β^ο εἶδους ἐξαρτᾶται καί ἀπὸ τὴν φορὰν δια-
γραφῆς τῆς καμπύλης. Σχετικῶς (ισχύει ἡ κατωθι πρότασις:

Πρότασις XI - 5-1. Ἐάν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ καμπύλη δια-
γράφεται, τότε καί τό ἐπικαμπύλιον ολοκληρώμα ἀλλάσσει πρόσημον, ἥτοι:

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = - \int_{\widehat{BA}} P dx + Q dy + R dz$$

Ἀπόδειξις: πράγματι, ἐάν θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$ καί εὕρωμεν τὸ πρι-
μογενὲς σημεῖον M' εὐρισκόμενον πρὸς τὴν φορὰν διαγραφῆς τῆς καμπύλης,
θὰ πρέπει τότε εἰς τὰ x, y, z νὰ δώσωμεν ἀντιστοίχως τὰς αὐξήσεις $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Εάν ήδη αλλάξωμεν τὴν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης διὰ νά εὕρωμεν τὸ γειτονικόν σημεῖον M' εὐρισκόμενον πρὸς τὴν νέαν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης θά πρέπει τώρα εἰς τὰ x, y, z νά δώσωμεν τὰς αὐξήσεις $-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z$ ἀντιστοίχως, ὅτε ἀλλάσσει πρόσσημον καὶ τὸ ὁλοκληρωτικὸν ἀθροισμα καὶ ὡς ἐν τούτῳ καὶ τὸ ὅριον αὐτοῦ, ὅτλ. τὸ ἐπιγαμψύλιον ὁλοκληρώμα. θά ἔχωμεν λοιπόν :

$$\int_{\overline{AB}} Rdx + Qdy + Rdz = - \int_{\overline{BA}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Παρατήρησις : Ἡ ιδιότης αὕτη εὐρίσκεται εἰς ἀντίθεσιν μετὰ τὴν ἀντιστοιχὸν ιδιότητα VII τῶν ἐπιγαμψυλίων ὁλοκληρωμάτων α^{ου} εἵδους, ὅπου εἰς αὐτά, ἂν αλλάξωμεν τὴν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης, τὸ ἐπιγαμψύλιον ὁλοκλήρωμα δὲν μεταβάλλεται.

III. Ἰδιότητες τοῦ ἐπιγαμψυλίου ὁλοκληρώματος β^{ου} εἵδους.

I. Εάν αἱ διανυσματικαὶ συναρτήσεις $\vec{F}(x, y, z)$ καὶ $\vec{\Phi}(x, y, z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμοι ἐπὶ τοῦ τόξου \overline{AB} καὶ C_1, C_2 εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε καὶ ἡ $C_1 \vec{F}(x, y, z) + C_2 \vec{\Phi}(x, y, z)$ εἶναι ὁλοκληρώσιμος ἐπὶ τοῦ \overline{AB} καὶ ἰσχύει :

$$\int_{\overline{AB}} \{C_1 \vec{F} + C_2 \vec{\Phi}\} d\vec{r} = C_1 \int_{\overline{AB}} \vec{F} d\vec{r} + C_2 \int_{\overline{AB}} \vec{\Phi} d\vec{r}.$$

II. Εάν Γ εἶναι ἓνα τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου \overline{AB} , τότε

$$\int_{\overline{AB}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\overline{A\Gamma}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\overline{\Gamma B}} \vec{F} d\vec{r} \Rightarrow \int_{\overline{A\Gamma}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\overline{\Gamma B}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\overline{B\Lambda}} \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

III. Εάν ἡ (γ) εἶναι κλειστὴ καμπύλη καὶ ἡ \vec{F} εἶναι συνεχὴς μετὰ μερικὰς παραγώγους συνεχεῖς ἐπὶ τῆς (γ) , τότε τὸ ἐπιγαμψύλιον ὁλοκληρώμα $\oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως.

Πράγματι,

$$\int_{\overline{AB}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\overline{B\Gamma}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\overline{\Gamma A}} \vec{F} d\vec{r} = \oint_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\overline{B\Gamma}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\overline{\Gamma A}} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\overline{A B}} \vec{F} d\vec{r}.$$

IV. Παραδείγματα υπολογισμού επιβαμπυλίων δρομοληρωμάτων β^ο είδους.

19/ Να υπολογισθῇ τὸ επιβαμπύλιον δρομολήρωμα $\int_{\vec{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ τῆς $\vec{F} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$ ἀπὸ τὸ σημεῖον A(0,0,0)

μέχρι τοῦ σημείου B(1,1,1) κατὰ μήκος τῆς καμπύλης (γ) ἐκούσης τὰς παραμετρίων ἐξισώσεις $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

Λύσις: Τὰ σημεία (0,0,0) καὶ (1,1,1) ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς $t=0$ καὶ $t=1$ τῆς παραμέτρου t . Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ θεωρήματος XI-5-1 ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \left\{ 3t^2 - 6t^2 \cdot t^3 \right\} \cdot 1 \cdot dt + \left\{ 2t^2 + 3t \cdot t^3 \right\} \cdot 2t \cdot dt + \left\{ 1 - 4t \cdot t^2 \cdot (t^3)^2 \right\} \cdot 3t^2 dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 6t^5 + 4t^3 + 6t^5 + 3t^2 - 12t^7) dt = \int_0^1 (6t^2 + 4t^3 - 12t^7) dt = 2. \end{aligned}$$

20/ Να υπολογισθῇ τὸ δρομολήρωμα $\int_{\vec{AB}} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy$.

κατὰ μήκος: α) τῆς εὐθείας ποῦ ἐνώνει τὰ σημεία (0,0) καὶ (1,1). β) τοῦ τόξου τῆς παραβολῆς ἐνώνοντος τὰ αὐτὰ σημεία γ). Κατὰ μήκος τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεία (0,0), (1,0) καὶ (1,1).

Λύσις: Διὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις βλ. Σχ.1 τὸν τρόπον συνδέσεως τῶν σημείων (0,0) καὶ (1,1).

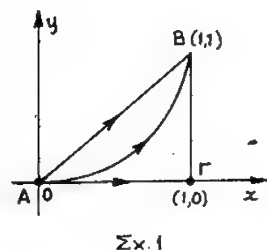
α) Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἶναι $y=x$.

$$\text{Ὅθεν, } \int_{\vec{AB}} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 3x^2x dx + (x^3 + 1) dx = \int_0^1 (4x^3 + 1) dx = 2.$$

β) Ἡ ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς εἶναι $y=x^2$.

$$\text{Ὅθεν, } \int_{\vec{AB}} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 3x^2x^2 dx + (x^3 + 1) \cdot 2x dx = \int_0^1 (5x^4 + 2x) dx = 2.$$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Εἶναι, } \int_{\vec{AB}} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy &= \int_{\vec{AF}} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy + \int_{\vec{FB}} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy \\ &= 0 + \int_0^1 (1^3 + 1) dy = 2 \int_0^1 dy = 2. \end{aligned}$$



3ε/. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐπιγαμπίλιον ὁδομήρωμα $\int_{\vec{AA'}} \frac{dy}{x^2+x^2+1}$,

ὅπου $\vec{AA'}$ εἶναι τὸ τόξον τῆς παραβολῆς $x^2=2y$ τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸ α^ο τεταρτημόριον.

Λύσις: Αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς παραβολῆς εἶναι $y=t$ καὶ $x=\sqrt{2t}$, $0 \leq t < \infty$. Τὸ ὁδομήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{AA'}} \frac{dy}{x^2+x^2+1} &= \int_0^\infty \frac{dt}{4t^2+2t+1} = \int_0^\infty \frac{dt}{(2t)^2+2 \cdot 2t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{(2t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{1/2}^\infty \frac{du}{u^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \left(\text{ἐτεῖον } 2t+\frac{1}{2}=u \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \tau\omega\epsilon\epsilon\phi \left. \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right|_{1/2}^\infty = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tau\omega\epsilon\epsilon\phi\infty - \tau\omega\epsilon\epsilon\phi \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

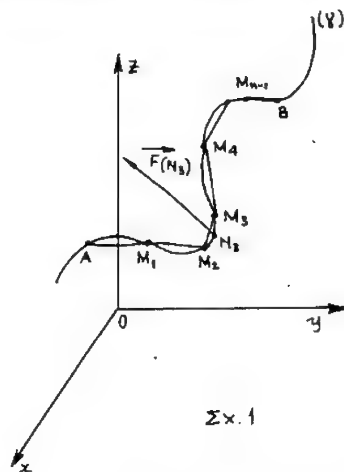
§ 6. ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

Ὡς γνωστὸν, ἐκ τῆς Μηχανικῆς, τὸ ἔργον W τὸ παραρόμενον ὑπὸ μιᾶς δυνάμεως \vec{F} σταθερᾶς ἐντάσεως F ἥτις μετατοπίζει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ τὸ διάνυσμα $\vec{AA'}$ παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου $W = \vec{F} \cdot \vec{AA'} = |\vec{F}| \cdot |\vec{AA'}| \cdot \sigma\omega\theta$, ἔνθα θ ἡ γωνία (σταθερά) ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν διανυσμάτων \vec{F} καὶ $\vec{AA'}$.

Ἐστω ἥδη μία δύναμις $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z) \cdot \vec{i} + Q(x,y,z) \cdot \vec{j} + R(x,y,z) \cdot \vec{k}$, ἥτις μετατοπίζει τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπὶ τῆς καμπύλης (γ) ἐκ τοῦ σημείου $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ μέχρι τὸ σημεῖον $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Ἐστωσαν δὲ $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς καμπύλης (γ) . Ἐτελοῦ-

μεν ἐπὶ τοῦ τόξου \widehat{AB} τῆς (γ) μίαν διαμέρισιν $A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}, M_n=B$ (βλ. Σχ.1) εἰς ἑκαστον τόξον $\widehat{M_{p-1}M_p}$ λαμβάνομεν καὶ ἀπὸ ἑνὸς τυχόν σημείου $N_p(x_p, y_p, z_p)$ καὶ



Έστω $F(E_p, n_p, \eta_p)$ η τιμή της συναρτήσεως (έντασις της δυνάμεως) εις τό ἐν λόγω σημείον. θεωρούμεν τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν μὲ κορυφὰς ἐπὶ τῆς καμπύλης $AM, M_1, M_2, \dots, M_{p-1}, B$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι, ἡ δύναμις \vec{F} κινεῖ τό σημεῖον ἐφαρμογῆς της κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν αὐτῆς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς καὶ ἐπὶ πλεον (ὑποθέτομεν) ὅτι, ἐφ' ἑκάστης χορδῆς ἔχει σταθεράν έντασιν ἡ δύναμις καὶ ἴσων μὲ τὴν τιμὴν ποὺ λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς ἓνα τυχόν σημεῖον τοῦ τόξου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς αὐτὴν τὴν χορδὴν. ἥτοι, ἐπὶ τῆς χορδῆς $\overline{M_{p-1}M_p}$ ἔχει έντασιν ἡ δύναμις ἴσων πρὸς $\vec{F}(E_p, n_p, \eta_p)$. Τότε τό ἔργον τό παραγόμενον ὑπὸ τῆς σταθερᾶς δυνάμεως έντάσεως $F(E_p, n_p, \eta_p)$ κατὰ μῆκος τῆς χορδῆς $\overline{M_{p-1}M_p}$ θά εἶναι:

$$\Delta W_p = \vec{F} \cdot \overline{M_{p-1}M_p} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ προβολαὶ τοῦ $\overline{M_{p-1}M_p}$ εἶναι $\Delta x_p, \Delta y_p, \Delta z_p$ τῆς δὲ δυνάμεως \vec{F} αἱ προβολαὶ εἶναι P, Q, R ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$\Delta W_p = P(E_p, n_p, \eta_p) \Delta x_p + Q(E_p, n_p, \eta_p) \Delta y_p + R(E_p, n_p, \eta_p) \Delta z_p \quad (2)$$

Ἀπολλούδως εὐρίσκειμεν τό ἄθροισμα τῶν ἀνωτέρω ἔργων κατὰ μῆκος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, ὅτε λαμβάνομεν:

$$W_n = \sum_{p=1}^n \left\{ P(E_p, n_p, \eta_p) \Delta x_p + Q(E_p, n_p, \eta_p) \Delta y_p + R(E_p, n_p, \eta_p) \Delta z_p \right\} \quad (3)$$

Ἐάν ὑποθέσωμεν τῆς ἀνωτέρω διαμερίσεως τό $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \rho_p \rightarrow 0$ ($\Delta \rho_p$ εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$) ὅτε καὶ $n \rightarrow \infty$ καὶ $\Delta x_p \rightarrow 0, \Delta y_p \rightarrow 0, \Delta z_p \rightarrow 0$ τότε, ἐάν ὑπάρχῃ τό ὅριον τοῦ ἀθροίσματος (3) πῶτο καλεῖται ἔργον τῆς δυνάμεως \vec{F} μετακινούσης τό σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπὶ τῆς καμπύλης (γ) ἐκ τοῦ σημείου Α μέχρι τοῦ σημείου Β.

$$\text{Ὡστε, } W = \lim_{\substack{\max \Delta \rho_p \rightarrow 0 \\ 1 \leq p \leq n \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{p=1}^n \left\{ P(E_p, n_p, \eta_p) \Delta x_p + Q(E_p, n_p, \eta_p) \Delta y_p + R(E_p, n_p, \eta_p) \Delta z_p \right\} \quad (4)$$

Ἐξ ἄλλου αὐτό τό ὅριον εἶναι τό $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Ὅθεν,

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

Έφαρμογή. Να εύρεθῇ τὸ ἔργον τὸ παραρόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως $\vec{F} = (3x - 4y + 2z)\vec{i} + (4x + 2y - 3z^2)\vec{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\vec{k}$, ἥτις μετακινεῖ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της ἐπὶ τῆς Ἐλλείψεως $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Λύσις: Αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς ἐλλείψεως εἶναι $x = 4 \cos t, y = 3 \sin t, z = 0$:

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Εἶναι δὲ, $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, ὅτε ἔχομεν:

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \{ (3x - 4y)\vec{i} + (4x + 2y)\vec{j} - 4y^2\vec{k} \} (dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}) \\ &= \oint_C (3x - 4y) dx + (4x + 2y) dy. \end{aligned}$$

Ἀντικαθιστώντες τὰς παραμετρίαις ἐξισώσεις τῆς Ἐλλείψεως λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \{ 3(4 \cos t) - 4(3 \sin t) \} 4 \cdot (-\sin t) dt + \{ 4 \cdot (4 \cos t) + 2(3 \sin t) \} \cdot (3 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (48 - 30 \sin t \cos t) dt = (48t - 15 \sin^2 t) \Big|_0^{2\pi} = 96\pi. \end{aligned}$$

§ 7. ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΛΟΦΟΡΩΝΤΑ ΤΑ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΨ ΕΔΟΥΣ

Θεώρημα XI - 7-1. Ἐστω \overline{AB} μία λεία καμπύλη (γ) ἥτις ἔχει ἐξισώσεις
 $x = \varphi(\ell), y = f(\ell), z = \sigma(\ell)$
καὶ τὴ διανυσματικὴ συνάρτησις

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} \cdot P(x, y, z) + \vec{j} \cdot Q(x, y, z) + \vec{k} \cdot R(x, y, z)$$

ὁρισμένη καὶ φραγμένη ἐπὶ τοῦ τόξου \overline{AB} τῆς (γ)

Ἐάν $\sigma\alpha, \sigma\omega\beta, \sigma\omega\gamma$, εἶναι τὰ διευθύνοντα συντεταγμένα τῆς εφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$ τοῦ τόξου \overline{AB} (ἡ εφαπτομένη προσανατολίζεται ὡς πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐθιγῆς τοῦ τόξου ℓ) τότε δὲ ἔχουμεν:

$$\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\overline{AB}} [P \sigma\alpha + Q \sigma\omega\beta + R \sigma\omega\gamma] d\ell.$$

Ἐπὶ πλεον τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ ἀριστεροῦ μέλους ὑπάρχει ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιῦ μέλους (ὁλοκλήρωμα αΨ εἶδους) ὑπάρχη

Απόδειξις: Κατ' αρχάς αποδεικνύομεν ότι :

$$\int_{AB} P dx = \int_{AB} P \sigma u n a d \ell \quad (1)$$

Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ τόξου \widehat{AB} τῆς καμπύλης (γ) μίαν διαμέρισιν $A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_n=B$ καὶ ἐπὶ τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$ μήκους $\Delta \ell_p$, λαμβάνομεν ἓν τυχόν σημεῖον $N_p(x_p, y_p, z_p)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα

$$S_n = \sum_{p=1}^n P(N_p) \cdot \Delta x_p \quad (2)$$

ὅπου $\Delta x_p = x(\ell_p) - x(\ell_{p-1})$.

Τὸ (2) εἶναι ὁδοιθηρωτικὸν ἄθροισμα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ὁδοιθηρωμα $\int_{AB} P dx$.

Ἀναλόγως σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα

$$T_n = \sum_{p=1}^n P(N_p) \sigma u n a \cdot \Delta \ell_p \quad (3)$$

ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν αὐτὴν διαμέρισιν καὶ τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ὁδοιθηρωμα $\int_{AB} P \sigma u n a d \ell$.

Ἐπειδὴ, $\frac{dx}{d\ell} = \sigma u n a$, ἔπεται ὅτι :

$$\Delta x_p = \int_{\ell_{p-1}}^{\ell_p} \sigma u n a d \ell \quad (4)$$

Συμφώνως δὲ πρὸς τὸ θεώρημα τῆς Μέσης τιμῆς ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν :

$$\Delta x_p = \sigma u n a^* \cdot \Delta \ell_p \quad (5)$$

ὅπου $\sigma u n a^*$ εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ διευθύνοντος συνημιτόνου μιᾶς ὥρισμένης ἐφαπτομένης τοῦ τόξου $\widehat{M_{p-1}M_p}$.

Ὅθεν λόγῳ τῆς (5), τὸ ὁδοιθηρωτικὸν ἄθροισμα (2) γράφεται :

$$S_n = \sum_{p=1}^n P(N_p) \cdot \sigma u n a^* \cdot \Delta \ell_p \quad (6)$$

λόγῳ τῆς (3) καὶ (6) ἔχομεν :

$$\begin{aligned} |S_n - T_n| &= \left| \sum_{p=1}^n \{ P(N_p) \cdot \sigma u n a^* - P(N_p) \sigma u n a \} \Delta \ell_p \right| \\ &\leq \sum_{p=1}^n |P(N_p)| \cdot |\sigma u n a^* - \sigma u n a| \cdot \Delta \ell_p \quad (7) \end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτησις $\sigma u v a$ ($a = a(x, y, z)$) είναι συνεχής επί του τόξου \overline{AB} θα είναι και ομαλώς συνεχής ἐπ' αὐτοῦ, ἐπομένως δοθέντος ἑνός $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει μία διαμέρισις τοῦ τόξου \overline{AB} τοιαύτη ὥστε νά ἔχωμεν $|\sigma u v a^* - \sigma u v a| < \varepsilon$ (8).

Ἐπὶ πλέον $|P(H_p)| \leq M$ (ἡ F ὑπετέθη φραγμένη ἐπὶ τοῦ \overline{AB}).

Ἡ (7) γράφεται τότε:

$$|S_n - T_n| \leq \varepsilon \cdot M \cdot \sum_{p=1}^n \Delta \ell_p = \varepsilon \cdot M \cdot \ell \quad (9)$$

λαμβάνοντες τὰ ὅρια τῆς (9) ὅταν τὸ $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta \ell_p \rightarrow 0$, ὅτε καὶ $\max_{1 \leq p \leq n} \Delta x_p \rightarrow 0$ καὶ $n \uparrow \infty$, θά ἔχωμεν:

$$\left| \lim_{\substack{\max \Delta x_p \rightarrow 0 \\ \text{ἡ ῥητὴ} \\ n \rightarrow \infty}} S_n - \lim_{\substack{\max \Delta \ell_p \rightarrow 0 \\ \text{ἡ ῥητὴ} \\ n \rightarrow \infty}} T_n \right| \leq \varepsilon \cdot M \cdot \ell \quad \eta$$

$$\left| \int_{\overline{AB}} P dx - \int_{\overline{AB}} P \sigma u v a d\ell \right| \leq \varepsilon \cdot M \cdot \ell \quad (10), \text{ διὰ τὰδε } \varepsilon > 0.$$

Ἐκ τῆς (10) συμπεραίνομεν ὅτι:

$$\int_{\overline{AB}} P dx = \int_{\overline{AB}} P \sigma u v a d\ell \quad (11)$$

Κατ' ἀναλογίαν εὐρίσκουμεν:

$$\int_{\overline{AB}} Q dx = \int_{\overline{AB}} Q \sigma u v \beta d\ell \quad (12)$$

$$\int_{\overline{AB}} R dz = \int_{\overline{AB}} R \sigma u v \gamma d\ell \quad (13)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (11), (12), (13) ἔχομεν τὸ ἀποδεικτέον.

Παρατηρήσεις 12/. Ἐστω $\vec{r} = (\sigma u v a, \sigma u v \beta, \sigma u v \gamma)$ τὸ μοναδιαῖον ἐφαπτομενιὸν διάνυσμα τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$ καὶ $\vec{F} = (P, Q, R)$ αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως \vec{F} . Τότε τὸ $P \sigma u v a + Q \sigma u v \beta + R \sigma u v \gamma$ ἰσσοῦται πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον $\vec{F} \cdot \vec{r}$ τῶν διανυσμάτων \vec{F} καὶ \vec{r} . Εἶναι δὲ $\vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}|$, ὅπου $|\vec{F}|$ τὸ μέτρον τῆς προβολῆς τῆς \vec{F} ἐπὶ τοῦ \vec{r} .

Ὅθεν, κατὰ τὸ θεώρημα ἔχομεν:

$$\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\overline{AB}} |\vec{F}| d\ell \quad (1)$$

2%. Εάν $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$ και επειδή, $dx = d\ell \sin\alpha$, $dy = d\ell \sin\beta$, $dz = d\ell \sin\gamma$ τότε, $[P \sin\alpha + Q \sin\beta + R \sin\gamma] d\ell = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

Όθεν, κατά το θεώρημα έχουμε:

$$\int_{\vec{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\vec{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (2).$$

Θεώρημα XI-7-2. Η τιμή του επισημπτύιου ολοκληρώματος:

$$\int_{\vec{AB}} P dx + Q dy + R dz$$

είναι ανεξάρτητος της παραμετρίωσης του τόξου \vec{AB} .

Απόδειξις: Έστωσαν $x = \varphi(t)$, $y = f(t)$, $z = \sigma(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ οι παραμετρίωσις \vec{AB} . Επειδή δέ το τόξον \vec{AB} είναι λείο οι $\varphi'(t)$, $f'(t)$, $\sigma'(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$ υπάρχουν είναι δέ και συνεχείς. Κάθε άλλη παραμετρίωσις του \vec{AB} δύναται να θεωρηθῇ ως προκύπτουσα ἐκ τῆς πρώτης διὰ τῆς ἀντιμεταστάσεως $t = g(u)$, $\gamma \leq u \leq \delta$, ὅπου ἡ $g(u)$ εἶναι συνεχὴς μετὰ παράγωγον συνεχὴν ἐπὶ τοῦ $[\gamma, \delta]$.

Όθεν, αἱ $x = \varphi(g(u))$, $y = f(g(u))$, $z = \sigma(g(u))$, ὅπου $\gamma \leq u \leq \delta$, εἶναι συνεχείς καὶ μετὰ παραγώγους συνεχείς ἐπὶ τοῦ $[\gamma, \delta]$.

Τὸ ὁλοκληρῶμα $\int_{\vec{AB}} P(x, y, z) dx$ (1), ὡς γνωστὸν ἰσχύει πρὸς τὸ:

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), f(t), \sigma(t)) \varphi'(t) dt \quad (2)$$

Διὰ τῆς δευτέρας ἀντιμεταστάσεως εἰς τὸ (1) λαμβάνομεν:

$$\int_{\gamma}^{\delta} P(\varphi(g(u)), f(g(u)), \sigma(g(u))) \varphi'_g \cdot g'(u) du \quad (3)$$

Τὰ ὁλοκληρώματα (2) καὶ (3) εἶναι ἴσα, καθ' ὅσον τὸ (3) προκύπτει ἐκ τοῦ (2) διὰ τῆς ἀντιμεταστάσεως $t = g(u)$, $\gamma \leq u \leq \delta$.

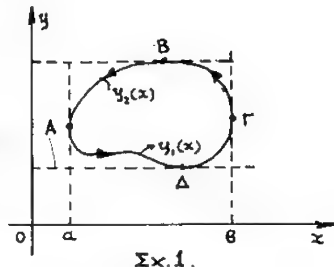
Ἀναλόγως ἀποδεικνύομεν καὶ διὰ τὰ ὁλοκληρώματα:

$$\int_{\vec{AB}} Q(x, y, z) dy, \quad \int_{\vec{AB}} R(x, y, z) dz. \quad \text{Ἄρα ἰσχύει τὸ θεώρημα.}$$

Ἡ ἀναγνώστῃς δύναται νὰ εὕρῃ μίαν ἀριθμητικὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀνωτέρου θεωρήματος.

§8. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ GREEN (εἰς τὸ ἐπίπεδον)

Ἐστω ἓνα χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου oxy περιυλαιομένην ὑπὸ μιᾶς υλαιοτῆς υαμπύλης L ἀποτελουμένης ἀπὸ πεπερασμένα γ πλῆθος ἀεῖα τόξα. Ὑποθέτομεν ἐπὶ πλῆθον ὅτι τὸ χωρίον D εἶναι τοιοῦτον, ὥστε πᾶσαι αἱ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἀξονας ox ἀντ. oy νὰ τέμνουν τὴν L εἰς δύο το πολὺ σημεῖα (κανονικὸν χωρίον). Ὑποθέτομεν ὅτι αὐτὸ τὸ χωρίον περιορίζεται κατωθεν ὑπὸ τῆς υαμπύλης $y=y_1(x)$ καὶ ἄνωθεν ὑπὸ τῆς υαμπύλης $y=y_2(x)$ ὅπου $y_1(x) \leq y_2(x)$, $a \leq x \leq b$ καὶ ὅτι αὐταὶ αἱ δύο υαμπύλεις ἀποτελοῦν τὴν προσανατολισμένη υλαιοτῆν υαμπύλιν L (βλ. Σκ. 1).



Ἐστώσαν αἱ συναρτήσεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$ τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ υλαιοτοῦ καὶ φραγμένου χωρίου D ἔχουσας μεριμὰς παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ συνεχεῖς (καὶ φραγμένας) ἐπὶ τοῦ D . Θεωροῦμεν τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐχομεν: } \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \\ &= \int_{\overrightarrow{AB\Gamma}} P(x, y) dx - \int_{\overrightarrow{\Delta\Lambda\Gamma}} P(x, y) dx \\ &= - \int_{\overrightarrow{\Gamma\Delta\Lambda}} P(x, y) dx - \int_{\overrightarrow{\Lambda\Delta\Gamma}} P(x, y) dx \\ &= - \oint_L P(x, y) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Ἵσως, } \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx \quad (1)$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὐρίσκειμεν:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy \quad (2)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

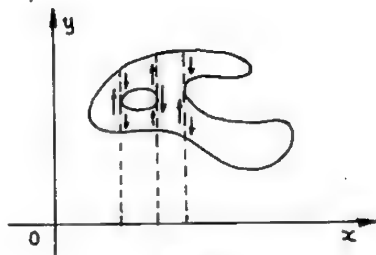
$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad (3)$$

Ἔξεσθ' τὸ θεώρημα :

Θεώρημα II-8-1. Ἐστω D ἓνα υαονιυόν χωρίον μέσυχρον τὴν υαμπύλῃν L καὶ αἱ συναρτήσεις $P(x,y)$ καὶ $Q(x,y)$ ὅπου αὐταὶ υαθῶς καὶ αἱ πρῶται μεριυαὶ παράγωγοι αὐτῶν $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ εἶναι συνεχεῖς καὶ φραγμέναι ἐπὶ τοῦ D . Τότε ἰσχύει :

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

Παρατήρησις: Ἐάν τὸ χωρίον δὲν εἶναι υαονιυόν, τότε τὸ χωρίσομεν διὰ υαταλ-
λήλων διαχωριστιυῶν γραμμῶν εἰς ἓνα
πεπερασμένον πλῆθος υαονιυῶν χωρί-
ων - ἐάν τοῦτο εἶναι δυνατόν - καὶ ἐφαρ-
μόσομεν εἰς ἕναστον τούτων τὸ θεώρη-
μα τοῦ Green. (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2.

Ἐφαρμογαί: 1ῃ/. Ἐστω τὸ υαονιυόν χωρίον D περιυλδιόμενον ὑπὸ τῆς δει-
ας υαμπύλης L .

αῃ/. Ἐάν θέσωμεν $P(x,y)=0$ καὶ $Q(x,y)=x$ ὁ τύπος τοῦ Green δίδει :

$$\oint_L x dy = \iint_D dx dy = S, \quad \text{ἐνθα } S \text{ τὸ ἐμβαδόν τοῦ } D.$$

$$\text{Ἀναλόγως} - \oint_L y dx = \iint_D dx dy = S.$$

Ὅθεν,

$$S = \oint_L x dy = - \oint_L y dx \quad (1)$$

βῃ/. Ἐάν θέσωμεν, $Q(x,y)=x$ καὶ $P(x,y)=-y$, ὅτε $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ καὶ ὁ

τύπος του Green δίδει:

$$2 \iint_D dx dy = \oint_L x dy - y dx \quad \eta$$

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx \quad (2)$$

Παράδειγμα 1^ο: Να υπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου τοῦ φρασσομένου ὑπὸ τῆς ἀστεροειδοῦς: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντας τὸν τύπον (2) ἔχομεν:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \eta \mu^2 t \cos^3 t [\cos^2 t + \eta \mu^2 t] dt = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \eta \mu^2 t^2 dt = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

2^ο/Ἡδὴ δ' ἀποδείξαμεν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου τοῦ Green τὸ θεώρημα VII-9-1 σελ. 179.

Ἀπόδειξις: θ' ἀποδείξαμεν ὅτι:

$$\text{ἐμβ. } D = S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv,$$

ὅπου $x = \varphi(u,v)$ καὶ $y = \sigma(u,v)$, $u, v \in D^*$

ἴσως πρῶτον ἔχομεν:

$$S = \iint_D dx dy = \oint_L x dy = \oint_{L^*} \varphi(u,v) d\sigma = \oint_{L^*} \varphi(u,v) \left[\frac{\partial \sigma}{\partial u} du + \frac{\partial \sigma}{\partial v} dv \right] \quad \eta$$

$$S = \oint_{L^*} \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial u} du + \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial v} dv \quad (1)$$

Ἄς θέσωμεν $P = \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial u}$, $Q = \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial v}$, ὅτε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \varphi \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u} - \varphi \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v \partial u} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| \end{aligned}$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Green ὁ τύπος (1) δίδει:

$$S = \oint_{L^*} \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial u} du + \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial v} dv = \iint_{D^*} \left[\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right] du dv = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv.$$

31/. Νά επαληθεύσετε τὸ θεωρήμα τοῦ Green ὅταν $P(x,y)=2y$, $Q(x,y)=3x$ καὶ D εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος $x^2+y^2=1$.

Λύσις: Ἐχομεν: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3-2=1$.

Ὅθεν, $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy = \pi \cdot 1^2 = \pi$.

Αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς περιφέρειας Γ εἶναι:

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι: } \oint_{\Gamma} (P dx + Q dy) &= \int_0^{2\pi} \{ 2\sin \theta (-\sin \theta) + 3 \cos \theta (\cos \theta) \} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta) d\theta = 6\pi - \frac{5}{2} \cdot 2\pi = \pi. \end{aligned}$$

42/. Ἐάν D εἶναι ὁ μοναδιαῖος κύκλος καὶ Γ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ, δὲ ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green νά υπολογίσετε τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} (x^2 y^3) dx + (y^3 x^3) dy$.

Λύσις: Εἶναι, $P=x^2 y^3$, $Q=y^3 x^3$ καὶ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)$.

Ὅθεν, $\oint_{\Gamma} (x^2 y^3) dx + (y^3 x^3) dy = \iint_D 3(x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{3\pi}{2}$.

§9. ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΙΝΑ ΕΝΑ ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΔΕΙΞΕΤΑΙ ΕΚ ΤΟΥ ΔΡΟΜΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ.

Θεωροῦμεν τὸ ἐπιγαμπίλιον ὁλοκλήρωμα:

$$\int_{AB} P(x,y,z) dx + Q(x,y,z) dy + R(x,y,z) dz \quad (1)$$

Τοῦτο προφανῶς εἶναι συνάρτησις τοῦ δρόμου \overline{AB} , τῶν σημείων A καὶ B καθὼς καὶ τῶν συναρτήσεων P, Q, R . θὰ εἰδῶμεν κατωτέρω ὑπὸ ποίας συνθήκας τὸ ἄνω-τέρω ὁλοκλήρωμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου \overline{AB} καὶ ἐξαρτᾶται ἀποκλειστι-κῶς καὶ μόνον ἐκ τῶν σημείων A καὶ B . Σχετικῶς ἰσχύουν τὰ κατωτέρω θεωρή-ματα:

Κατωτέρω θεωροῦντες τὸ ἐπιγαμπίλιον ὁλοκλήρωμα (1) δὲ ὑποθέτωμεν ὅτι,

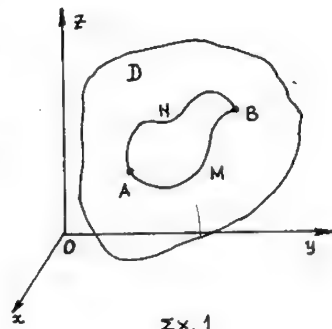
αί συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ έχουν μεριμνά παραγώγους συνεχείς επί του πεδίου D εντός του οποίου μετρά το τόξον \widehat{AB} .

Θεώρημα XI-9-1. Η ευανή και άναρμια συνθήκη να το ολοκληρώμα:

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz$$

δέν εξαρτάται έυ του δρόμου της ολοκληρώσεως \widehat{AB} αλλά έυ των σημείων A και B είναι να είναι τουτο μηδέν διά υάδε υλειστήν υαμπύλην γραμμήν (γ) υειμένην έντός του D , ήτοι:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0.$$



Άπόδειξις: (Άναρμια) Έφ' όσον το ολοκληρώμα δέν εξαρτάται έυ του δρόμου, εάν θεωρήσωμεν δύο τυχούσας υαμπύλας ένούσας τά A και B , θα έχωμεν:

$$\int_{\widehat{AMB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AHB}} P dx + Q dy + R dz \quad (1).$$

Η αξίσις (1) γράφεται:

$$\int_{\widehat{AMB}} P dx + Q dy + R dz - \int_{\widehat{AHB}} P dx + Q dy + R dz = 0 \quad \eta$$

$$\int_{\widehat{AMB}} P dx + Q dy + R dz + \int_{\widehat{BHA}} P dx + Q dy + R dz = 0 \quad \eta$$

$$\int_{\widehat{AMBHA}} P dx + Q dy + R dz = 0, \text{ όηλ. } \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Ήτανόν: Έστω διά μιά τυχούσα υλειστή υαμπύλη γ , το ολοκληρώμα είναι μηδέν. Θα έχωμεν λοιπόν:

$$\int_{\widehat{AMBHA}} P dx + Q dy + R dz = 0 \quad \eta$$

- 1) Ένα πεδίο $D \subseteq \mathbb{R}^3$ καλεΐται άπλως συνευκτικό άν διά υάδε υλειστή υαμπύλη υειμένη έντός του D υπάρχει επιφάνεια έχουσα ως σύνορον την άνωτέρω υαμπύλη και μετρά έξ όλοκληρώου έντός του D .

$$\int_{AMB} P dx + Q dy + R dz + \int_{BMA} P dx + Q dy + R dz = 0 \quad \eta$$

$$\int_{AMB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AMB} P dx + Q dy + R dz$$

Θεώρημα XI-9-2. Η αναγκασία και ικανή συνθήκη να το επιταμπύλιον
όλουλήρωμα:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$$

είναι ανεξάρτητον του δρόμου εν D, είναι να υπάρχει μια συνάρτησις $V(x,y,z)$ με
μεριώς παραγώγους εν D τοιαύτη, ώστε: $dV(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$,
δηλ. η $Pdx + Qdy + Rdz$ να είναι ολικόν (τέλειον) διαφοριόν.

Άπόδειξις: (Αναγκαϊόν) Έστω, ότι το $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ είναι ανεξάρτητον του δρό-
μου της όλουλήρωσεως. Τότε εάν θεωρήσωμεν το σημείον A σταθερόν, τό όλο-
υλήρωμα δύναται να θεωρηθῇ ως συνάρτησις τών συντεταγμένων (x,y,z) τοῦ
σημείου M.

Οὕτω θέτομεν:

$$V(x,y,z) = \int_{AM} P dx + Q dy + R dz$$

Θά δειξωμεν, ότι η συνάρτησις $V(x,y,z)$ είναι διαφορίσιμος και επί πλέον

$$dV = P dx + Q dy + R dz.$$

Διά να δειξωμεν τοῦτο αρμεῖ να δειξωμεν ότι αἱ μεριωὶ παράγωγοι $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$
υπάρχουν και είναι ἀντιστοιχῶς ἴσαι πρὸς τὰς συναρτήσεις $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$.

Ἐς υπολογίσωμεν τό όριον:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Εἶναι:

$$\begin{aligned} V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) &= \int_{AM'} P dx + Q dy + R dz - \int_{AM} P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{MM'} P dx + Q dy + R dz = \int_{MM'} P(x,y,z) dx, \end{aligned}$$

διότι, αφού τό όλουλήρωμα είναι ἐξ υποθέσεως ανεξάρτητον τοῦ δρόμου όλο-
υλήρωσεως, τό MM' δύναται να εὐλεχῇ παράλληλον πρὸς τόν ἄξονα Ox και συνε-

πώς κατά μήκος του $\overline{MM'}$ τα y και z είναι σταθερά και ως εκ τούτου $dy=dz=0$.

$$\begin{aligned}\text{Έχομεν λοιπόν: } V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z) &= \int_x^{x+\Delta x} P(t, y, z) dt \\ &= \Delta x \cdot P(x+\theta \Delta x, y, z), \quad 0 < \theta < 1.\end{aligned}$$

$$\text{και} \quad \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = P(x+\theta \Delta x, y, z).$$

$$\text{Όθεν, } \frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x+\theta \Delta x, y, z) = P(x, y, z).$$

$$\text{Όμοιως, } \frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z).$$

$$\text{Είναι λοιπόν } dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = P dx + Q dy + R dz.$$

Ίσχυρόν: Έστω ότι η έκφρασις $P dx + Q dy + R dz$ είναι όλοκληρόν διαφοριμόν, ήτοι ύπάρχει μία συνάρτησις $V(x, y, z)$ τοιαύτη, ώστε $\frac{\partial V}{\partial x} = P, \frac{\partial V}{\partial y} = Q, \frac{\partial V}{\partial z} = R$. Έστω δέ $x = \varphi(t), y = f(t), z = \sigma(t), a \leq t \leq b$ ή παραμετρητή έκφρασις του τόξου \overline{AB} και έστω $A(a_1, a_2, a_3)$ αντιστοιχεί εις την τιμήν $t=a$, τό δε $B(b_1, b_2, b_3)$ αντιστοιχεί εις την τιμήν $t=b$ και τό τυχόν σημείον $M(x, y, z)$ αντιστοιχεί εις την τιμήν $t=\tau \in [a, b]$.

$$\text{Έχομεν: } I = \int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_a^b \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right] dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right] dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} [V(\varphi(t), f(t), \sigma(t))] dt$$

$$= V(\varphi(\tau), f(\tau), \sigma(\tau)) - V(\varphi(a), f(a), \sigma(a))$$

$$= V(M) - V(A), \text{ δηλ. τό έπισημύηριον όλοκληρώμα έξαρτάται μό-$$

νον έκ των σημείων M και A .

Η συνάρτησις $V(x, y, z)$ καλείται έν προειρημένω **δυναμιμόν** της διανυσματικής συναρτήσεως $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Θεώρημα XI-9-3. Η αναγκαία και ίσχυρή συνθήκη, ίνα τό όλοκληρώμα:

$$\int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz$$

πρός τόν oy καί μεταξύ τῶν τεταγμένων β καί γ καί τέλος ἑνός τμήματος $\Gamma\bar{M}$ παραλλήλου πρὸς τόν ox καί μεταξύ τῶν τεταγμένων α καί x . Υποθέτομεν φυσικά, ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμὴ δὲν ἐξέρχεται τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῶν P, Q, R . Ἀπολοῦθως τὴ $V(x, y, z)$ ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \int_{\bar{AM}} P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{\bar{AB}} R dz + \int_{\bar{BF}} Q dy + \int_{\bar{FM}} P dx \\ &= \int_{\beta}^{\gamma} R(\alpha, \beta, t) dt + \int_{\delta}^{\gamma} Q(\alpha, t, z) dt + \int_{\alpha}^x P(t, y, z) dt + c. \quad (1) \end{aligned}$$

Διὰ τὸν χώρον τῶν δύο διαστάσεων ἔχομεν:

$$V(x, y) = \int_{\delta}^{\gamma} Q(\alpha, t) dt + \int_{\alpha}^x P(t, y) dt. \quad (2)$$

Ἐφαρμογαι. 17/ Ἐσῶ ὅτι $dV = (2xy+1) dx + (x^2+3y^2) dy$. Νά εὕρεθῇ τὸ $V(x, y)$.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι πληροῦται ἡ συνθήκη $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ διότι ἔχομεν $2x=2x$.

$$\text{Εἶναι } V(x, y) = \int_{\delta}^{\gamma} Q(\alpha, t) dt + \int_{\alpha}^x P(t, y) dt$$

Δι' ἀντιδιαστάσεως εἰς τὸν (1) λαμβάνομεν:

$$V(x, y) = \int_{\delta}^{\gamma} (\alpha^2 + 3t^2) dt + \int_{\alpha}^x (2ty + 1) dt \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha^2 y - \alpha^2 \delta + y^3 - \delta^3 + x^2 y + x - \alpha^2 y - \alpha \\ &= y^3 + x^2 y + x - \alpha^2 \delta - \delta^3 = y^3 + x^2 y + x + c, \end{aligned}$$

ὅπου ἐτέθη $c = -\alpha^2 \delta - \delta^3$.

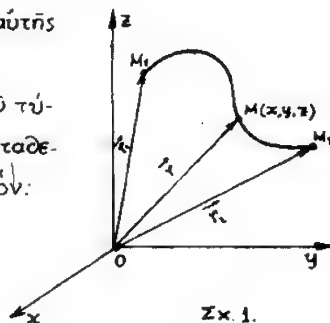
Κατωτέρω δίδομεν ἓνα παράδειγμα, ὅπου τὸ παραγόμενον ἔργον εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου ὁλοκληρώσεως καὶ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν ὁρίων αὐτοῦ.

28/ Νά ὑπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως τοῦ Νεύτωνος τῆς ἀσυνουμένης ὑπὸ μιᾶς αἰωνήτου μάσης m , ἐπὶ μιᾷ s μοναδιαίᾳ μάσῃ m_0 μετακινουμένης μεταξύ δύο σημείων $M_1(x_1, y_1, z_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Λύσις: λαμβάνομεν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων ὡς κέντρον ἐλῆξεως (βλ. Σχ. 1).
 Παριστῶμεν διὰ \vec{r} τὴν διανυσματικὴν αὐτῆς \vec{OM} τὴν
 ἀγομένην εἰς τὸ σημεῖον M ὅπου εὐρίσκεται ἡ μοναδι-
 αῖα μᾶσα καὶ ἔστω \vec{r}_0 τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα αὐτῆς
 τῆς διευθύνσεως.

Ὡς γνωστόν ἡ δύναμις ἐλῆξεως δίδεται ὑπὸ τοῦ τύ-
 που $\vec{F} = -\frac{km}{r^2} \cdot \vec{r}_0$, ὅπου k εἶναι ἡ παρυόσμιος σταθε-
 ρά. Αἱ συντεταγμέναι τῆς δυνάμεως δὲ εἶναι λοιπὸν:

$$\begin{aligned} X &= -km \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{x}{r} \\ Y &= -km \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{y}{r} \\ Z &= -km \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{z}{r} \end{aligned}$$



Τὸ ἔργον τῆς \vec{F} κατὰ μῆκος τοῦ τόξου $\vec{M_1M_2}$ δὲ εἶναι:

$$W = \int_{\vec{M_1M_2}} Xdx + Ydy + Zdz = -km \int_{\vec{M_1M_2}} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3}$$

$$\text{Εἶναι ὅμως } x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad xdx + ydy + zdz = r dr.$$

Ὅθεν, ὁ ἀνωτέρω τύπος γράφεται:

$$W = -km \int_{\vec{M_1M_2}} \frac{r dr}{r^3} = -km \int_{\vec{M_1M_2}} \frac{dr}{r^2} = km \left[d\left(\frac{1}{r}\right) \right] = km \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Ἐν τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐπιμαμπύλιον ὁλοκληρώμα δὲν ἐξαρτᾶ-
 ται ἐκ τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, ἀλλὰ μόνον ἐκ τῶν σημείων M_1 καὶ M_2 .

Ἡ συνάρτησις $V(x, y, z) = \frac{km}{r}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ὡς γνωστόν εἶναι τὸ δυναμιζὸν τῆς
 μᾶσσης m .

$$\text{Εἶναι δὲ } X = \frac{\partial V}{\partial x}, Y = \frac{\partial V}{\partial y}, Z = \frac{\partial V}{\partial z}. \quad \text{Ὅθεν, } W = V(M_2) - V(M_1).$$

Ἦτοι τὸ ἔργον μεταξὺ τῶν σημείων M_1 καὶ M_2 ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν δυ-
 ναμίου μεταξὺ τῶν σημείων αὐτοῦ.

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Green θὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα XI-9-3 εἰς τὸν κῶ-
 ρον τῶν δύο διαστάσεων.

Θεώρημα XI-9-4. Ἡ ἀναγκασία καὶ ἰσάνη συνθήκη, ἵνα τὸ ὁλοκληρώμα:

$$\int_{\lambda\beta} Pdx + Qdy \quad \text{εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, εἶναι } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Απόδειξις: (Αναγκαῖον) Ἐστω ὅτι τὸ $\int_{\lambda} P dx + Q dy$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως, τότε συμφωνῶς πρὸς τὸ θεώρημα XI-9-1 διὰ καθεστὸς υἱειστής καμπύλης λ θὰ ἔχωμεν $\oint_{\lambda} P dx + Q dy = 0$. θὰ δείξωμεν ὅτι θὰ εἶναι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ καὶ ἔστω δὲ ἐν σημείῳ (x_0, y_0) ἔχομεν $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$. Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ εἶναι συνεχὴς, αὕτη θὰ εἶναι καὶ δετιυή εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου (x_0, y_0) , συνεπῶς θὰ ὑπάρῃ ἀριθμὸς $\delta > 0$ τοιοῦτος, ὥστε διὰ πάντα τὰ σημεία ἐνὸς πεδίου D' ἀρμετὰ μικροῦ καὶ περιέχοντος τὸ σημεῖον (x_0, y_0) νὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > \delta \quad \text{διὰ καθεστὸς } (x, y) \in D'$$

Ἐν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἔπεται ὅτι:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > \iint_{D'} \delta dx dy = \delta \cdot \text{εμβ.}(D') > 0 \quad (1)$$

Ἐστω L' τὸ σύνορον τοῦ D' , συμφωνῶς πρὸς τὸν τύπον τοῦ Green ἔχομεν:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L'} P dx + Q dy = 0 \quad (2)$$

Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) εὐρίσκονται εἰς ἀντίθεσιν.

Ὅθεν, θὰ πρέπει $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Ἰκανόν Ἐστω ὅτι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ καὶ ἔστω μία τυχοῦσα υἱειστή καμπύλη L' περιυλίουσα ἓνα πεδίου D' .

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ Green ἔχομεν:

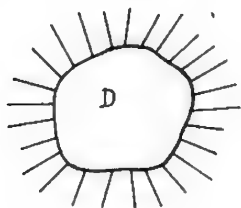
$$\oint_{L'} P dx + Q dy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Κατὰ τὸ θεώρημα XI-9-1 τὸ ὁλοκληρώμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου τῆς ὁλοκληρώσεως.

§10. ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΕΙΣ ΕΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΩΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

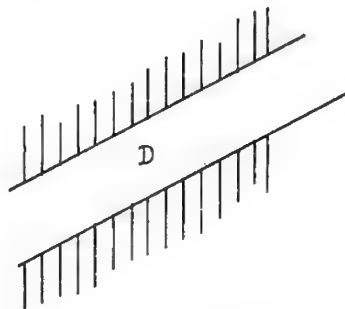
Ἐνα πεδίου D θὰ καλεῖται ἀπλῶς συνευτιμόν, ἐάν καθεστὸς υἱειστή καμπύλη Γ υειμένη ἐν D περιορίσῃ ἓνα φραγμένον τμήμα τοῦ D υειμενον ἐξ ὁλοκληρώου ἐντὸς

του D (βλ. Σχ. 1) και (Σχ. 2). Εάν όμως υπάρχουν κλειστά καμπύλια έν D περιορίζου-
σαι τμήματα μή κείμενα έξω ολόκληρου έντός του D , τότε τό πεδίον θα καλεῖται
πολλαπλῶς συνευτιμόν (βλ. Σχ. 3) και (Σχ. 4).



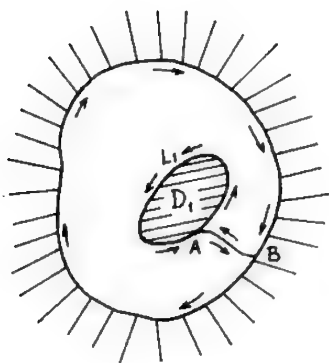
Σχ. 1

Πεδίον συνευτιμόν



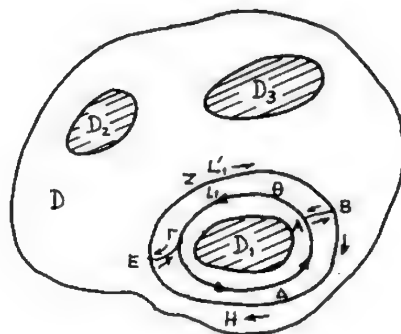
Σχ. 2

Πεδίον συνευτιμόν



Σχ. 3

Πεδίον πολλαπλῶς συνευτιμόν



Σχ. 4

Πεδίον πολλαπλῶς συνευτιμόν

Εἰς τὰ γραμμοσυμμετρικά χωρία τῶν Σχ. 3 καὶ 4 τὰ κείμενα έντός τοῦ συνό-
ρου τοῦ D ἡ συνάρτησις δέν εἶναι ὠρισμένη (πεδίον πολλαπλῶς συνευτιμόν).
Αὐτὰ τὰ χωρία θὰ τὰ καλοῦμεν « ὁπᾶς ». Εἶναι δυνατόν μία ὁπᾶ νὰ ἐκφυλίζεται
εἰς ἓνα σημεῖον.

Ἐνα πεδίον πολλαπλῶς συνευτιμόν εἶναι δυνατόν μέ τήν βοήθειαν τῶν τομῶν νά

μετατραπῇ εἰς ἓνα ἀπλῶς συνευτιμὸν πεδίου. Οὕτω π.χ. εἰς τὸ σχ. 3 ἐὰν φέρωμεν μίαν καμπύλην \bar{AB} καὶ θεωρήσωμεν τὸ σύνορον τοῦ πεδίου διαγραφόμενον ὅπως δεικνύουν τὰ βέλη, τότε τοῦτο μετατρέπεται εἰς ἓνα ἀπλῶς συνευτιμὸν πεδίου.

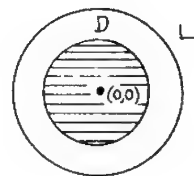
Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος XI-9-4 ἔχομεν ὑποθέσει, ὅτι τὸ πεδίου D εἶναι ἀπλῶς συνευτιμὸν καὶ οὕτω πληρουμένης τῆς συνθήκης $-\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ συνεπὰ-
γεται, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_L P dx + Q dy$ κατὰ μῆκος πάσης κλειστῆς καμπύλης L εἶναι μηδέν.

Θὰ εἶδωμεν τώρα δι' ἐνὸς παραδείγματος ὅτι, ἐὰν τὸ πεδίου δὲν εἶναι ἀπλῶς συνευτιμὸν ἀλλὰ πολλαπλῶς συνευτιμὸν, ἡ συνθήκη $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ δὲν συνεπάγεται $\oint_L P dx + Q dy = 0$.

Ἐστω π.χ. τὸ $\oint_L \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$. Τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο δὲν ἔχει ἔννοιαν εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ καὶ οὕτω θὰ τὸ ἐξετάσωμεν εἰς τὸ πεδίου $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ἐφ' ὅ-
σον ἐπ' αὐτοῦ ἐξαιρέσωμεν μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου $(0,0)$ (βλ. Σχ. 5). Ἦτοι τὸ
ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα ἔχει ἔννοιαν εἰς ἓνα πολλαπλῶς
συνευτιμὸν πεδίου. Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) \quad (1)$$

Ἄς λάβωμεν ἥδη ὡς L τὴν μοναδιαίαν περιφέρειαν
 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ καὶ ἄς υπολογίσωμεν τὸ
ὁλοκλήρωμα



Σχ. 5

$$\oint_L \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Ὅθεν, ἂν καὶ πληροῦται ἡ συνθήκη (1) τὸ ὁλοκλήρωμα δὲν εἶναι μηδέν κατὰ
μῆκος τῆς κλειστῆς γραμμῆς (περιφέρειας).

Ἐστω μία κλειστὴ καμπύλη L , ἥτις περιυλίζει μίαν ὀπὴν D_1 (βλ. Σχ. 4) καὶ L' ,
μία ἄλλη κλειστὴ καμπύλη περιυλίζουσα τὴν ἰδίαν ὀπὴν προσανατολισμέναι
ὡς δεικνύουν τὰ βέλη. Ἐστὶν αὐτόμη $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Θεωροῦντες τὰς δύο «τομὰς», ὁπλ.
τὰς καμπύλας \bar{AB} καὶ $\bar{\Gamma E}$ διαγραφόμενας ὡς δεικνύουν τὰ βέλη, θὰ ἔχωμεν:

$$\int_{AB\eta\epsilon\Gamma\Delta} P dx + Q dy = 0 \quad \text{ἢ} \quad \int_{\bar{AB}} \dots + \int_{\bar{\eta\epsilon}} \dots + \int_{\bar{\Gamma E}} \dots + \int_{\bar{\Gamma\Delta}} \dots = 0 \quad (1).$$

$$\text{υαί } \int_{\Gamma \cup \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma} P dx + Q dy = 0 \quad \eta \quad \int_{\Gamma \Sigma} \dots + \int_{\Sigma \Delta} \dots + \int_{\Delta \Gamma} \dots + \int_{\Gamma \Sigma} \dots = 0 \quad (2)$$

Διά προσθέσεως τών (1) υαί (2) υαί λαμβανομένου υπ' ὄψιν ὅτι:

$$\int_{\Lambda \Gamma} \dots = - \int_{\Gamma \Lambda} \dots, \int_{\Gamma \Sigma} \dots = - \int_{\Sigma \Gamma} \dots \quad \text{ἔχομεν τελικῶς:}$$

$$\left(\int_{\Gamma \Sigma} \dots + \int_{\Sigma \Delta} \dots \right) + \left(\int_{\Delta \Gamma} \dots + \int_{\Gamma \Sigma} \dots \right) = 0 \quad \eta \quad \oint_{L_1} (P dx + Q dy) + \oint_{L_1} (P dx + Q dy) = 0 \quad \eta$$

$$\oint_{L_1} P dx + Q dy = \oint_{L_1} P dx + Q dy. \quad \text{Ἐξ οὗ τὸ συμπέρασμα:}$$

Πρότασις: XI-10-1. Ἐάν D εἶναι μία ὀπή υαί πληρουμένης τῆς συνθήκης $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος $\oint_L P dx + Q dy$ εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ κἀδε ἀπλῆς υαί κλειστῆς καμπύλης γραμμῆς δετικῶς προσανατολισμένης ¹⁾ περιυλίσσας τὴν ὀπὴν.

Ἡ σταθερὰ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος εἰς ἐκάστην ὀπὴν D_i καλεῖται κυκλικὴ σταθερά τῆς D_i . Οὕτω εἰς τὸ προαναφερθὲν παράδειγμα ἡ τιμὴ τῆς κυκλικῆς σταθερᾶς εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ ἰσοῦται πρὸς 2π .

Παράδειγμα: Νά ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκληρῶμα $\oint_C \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2}$, ὅπου C ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου με κορυφὰς τὰ σημεῖα $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(-1,-1)$, $\Delta(1,-1)$.

$$\text{Λύσις:} \quad \text{Εἶναι } P = \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Q = -\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{υαί} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x^2 - 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Τὸ πεδῖον ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων P υαί Q δὲν εἶναι ἀπλῶς συνευτιόν, ἀλλὰ καὶ ἀπλῶς συνευτιόν, διότι εἰς τὸ σημεῖον $(0,0)$ αἱ συναρτήσεις P υαί Q δὲν ὀρίζονται. Συμφώνως πρὸς τὴν Πρότασιν XI-10-1 ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος δὲ εἶναι ἡ αὐτὴ ἢ εἴτε θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ προειρημένου τὸ τετράγωνον εἴτε τὸ μοναδιαῖο κυκλ. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ δετικῶς προσανατολισμένον. Οὕτω ἔχομεν

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2} &= \oint_{\Gamma: x^2 + y^2 = 1} \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{[\cos^2 t \cdot \sin t (-\sin t) - \cos^3 t \cos t]}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2} dt = - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = -\pi. \end{aligned}$$

¹⁾ δηλ. διαγραφομένη κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δευτεῶν τοῦ ὡρολογίου

Συμπληρώματα και άσκησεις:

1. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐπιυαμπύδιον ὁλοκληρώμα

$$\int_{\gamma} xy^2 ds, \text{ ὅπου } \gamma, \text{ εἶναι τὸ κυκλικὸν τόξον } x=as\eta\tau, y=as\eta\mu\tau, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

2. Ὁμοίως τὸ ὁλοκληρώμα $\int_{\gamma} xy ds$, ὅπου γ , εἶναι τὸ τμήμα τῆς ἐλλείψεως

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b \text{ τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὴν πρώτῃν γωνίαν τῶν ἀξόνων.}$$

3. Ὁμοίως τὸ ὁλοκληρώμα $\int_{\gamma} (x^2 + y^2 - z) ds$, ὅπου γ , εἶναι τὸ τόξον τῆς κυκλικῆς ἑλικοῦ $x=as\eta\tau, y=as\eta\mu\tau, z=kt, (k > 0)$ καὶ $0 \leq t \leq \pi$.

4. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐπιυαμπύδιον ὁλοκληρώμα $\int_{\gamma} y dl$ ὅπου γ εἶναι τὸ τμήμα τῆς κυκλικῆς $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 - az = 0$, τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὸν πρώτον ὄχθον τῶν ἀξόνων.

5. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐπιυαμπύδιον ὁλοκληρώμα $\int_{\gamma} \frac{dl}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ὅπου γ εἶναι ἡ σπείρα $\rho\theta = 1, \sqrt{3} \leq \theta \leq 2\sqrt{2}$.

6. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐπιυαμπύδιον ὁλοκληρώμα $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$ ὅπου γ εἶναι τὸ τμήμα τοῦ ῥημνίσμου τοῦ Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ τὸ εὐρισκόμενον εἰς τὴν πρώτῃν γωνίαν τῶν ἀξόνων.

7. Νά εὐρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κ.β. τῆς ἑλικοῦ $x=as\eta\tau, y=b\eta\mu\tau, z=kt, 0 \leq t \leq 2\pi$, γνωρίζοντες ὅτι ἡ πυκνότης αὐτῆς εἶναι σταθερά.

8. Νά εὐρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κ.β. τοῦ παραβολικοῦ τόξου $x^2 = 1-z, y=0, 0 \leq z \leq 1$ τὸ ὁποῖον ἔχει πυκνότητα $\delta = \sqrt{1+4x^2}$.

9. Νά εὐρεθῇ ἡ ροπή ἀδρανείας I_x ἐνὸς εὐδυσγράμμου τμήματος \overline{AB} τοῦ ἐπιπέδου oxy καὶ μήκους l τὸ ὁποῖον σχηματίζει μὲ τὸν ἀξονα τῶν x γωνίαν φ καὶ ἀπὸ τὸ ὁποῖον τὸ A ἀπέχει ἀπόστασιν a .

10. Εάν $\vec{F} = (x^2 - y^2) \cdot \vec{i} + 2xy \cdot \vec{j}$ να υπολογισθῇ τὸ $\int_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r}$ κατὰ μήκος τῆς καμπύλης Γ τοῦ ἐπιπέδου oxy διδομένης ὑπὸ τῆς ἐξίσωσης $y = x^2 - x$, ἀπὸ τὸ σημεῖον $A(1,0)$ μέχρι τοῦ σημείου $B(2,2)$. Δώσατε φυσικὴν ἐρμηνείαν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος.

11. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἔργον τὸ παραγόμενον ὑπὸ τῆς δυνάμεως $\vec{F} = 3x^2 \cdot \vec{i} + (2xz - y) \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ μετακινήσεως τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς κατὰ μήκος.

α) Τῆς εὐθείας ἀπὸ τὸ σημεῖον $(0,0,0)$ μέχρι τοῦ $(3,2,1)$.

β) Τῆς καμπύλης τοῦ χώρου

$$x = 2t^2, y = t, z = 4t^2 - t \text{ ἀπὸ } t = 0 \text{ ἕως } t = 2.$$

γ) Τῆς καμπύλης ἣ ὁποία ἔχει ἐξισώσεις

$$x^2 = 2y, 3x^3 = 6z \text{ ἀπὸ } x = 0 \text{ ἕως } x = 2.$$

12. Υπολογίσατε τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} y^3 dx - x^3 dy$, ὅπου Γ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου $|x| + |y| = 1$.

13. Υπολογίσατε τὸ $\oint_{\Gamma} x^2 y^2 dx - xy^3 dy$, ὅπου Γ εἶναι τὸ περίγραμμα τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφάς $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$.

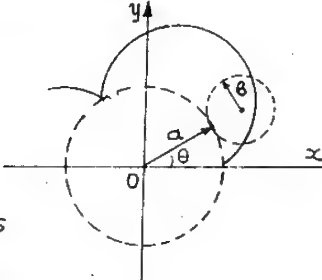
14. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$, κατὰ μήκος τῆς περιφέρειας τοῦ κύβου $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ καὶ $x + z = a$.

15. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ὁλοκλήρωμα $\oint_{\Gamma} (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, ὅπου Γ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $a > b > 0$, $z > 0$.

16. Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἐπισκαμπύλιον ὁλοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, ὅπου Γ εἶναι τὸ τόξον τῆς ἰσοσκελοῦς ὑπερβολῆς $x^2 - y^2 = a^2$, τὸ κείμενον εἰς τὸ a^2 τεταρτημόριον.

17. Υπολογίσατε τὸ $\int_{AB} yz dx + zx dy + xy dz$, ὅπου AB εἶναι ἓνας τυχόν δρόμος μὲ $A(1,1,1)$ καὶ $B(6,3,5)$.

Υπόδ. Δείξατε κατ' ἀρχάς ὅτι τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου).

18. Δείξτε ότι το όλουλήρωμα $\int_{\overline{AB}} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy$ είναι ανεξάρτητον του δρόμου \overline{AB} . Εάν δέ είναι $A(1,1)$ και $B(3,5)$ εύρατε την τιμήν του.
19. Δείξτε ότι το όλουλήρωμα $\int_{\overline{AB}} \eta \mu y dx + x \sigma \nu y dy$ είναι ανεξάρτητον του δρόμου \overline{AB} . Εάν δέ είναι $A(0,0)$ και $B(x_1, y_1)$ εύρατε την τιμήν του.
20. Νά επαληθευθῇ ὁ τύπος τοῦ Green διά τὰς κάτωθι συναρτήσεις:
- $P = e^x \sigma \nu y, Q = e^x \eta \mu y$, ὅπου τὸ πεδίων $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.
 - $P = 4x - 2y, Q = 2x + 4y$, ὅπου τὸ πεδίων D εἶναι ἡ ἑλλειψις $x = 2 \sigma \nu \theta, y = \eta \mu \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
 - $P = 2xy - x^2, Q = x + y^2$, ὅπου D εἶναι τὸ χωρίον τὸ ὁρισμένον ὑπὸ τῶν παραβολῶν $y = x^2, y^2 = x$.
21. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green νά υπολογισθῇ τὸ $\oint_{\Gamma} (x - y^2) dx + x^2 dy$, ὅπου Γ εἶναι ἡ περιφέρεια $x^2 + y^2 = 1$.
22. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green νά υπολογισθῇ τὸ όλουλήρωμα $\oint_{\Gamma} (x^2 - x^2 y) dx + xy^2 dy$, ὅπου Γ εἶναι τὸ σύνορον τοῦ χωρίου $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$
23. Αἱ παραμετρίαι ἐξισώσεις τῆς ἐπικυκλοειδοῦς εἶναι:
- $$x = (a+b) \sigma \nu \theta - b \sigma \nu \left(\frac{a+b}{b}\right) \theta$$
- $$y = (a+b) \eta \mu \theta - b \eta \mu \left(\frac{a+b}{b}\right) \theta$$
- Διὰ σταθιλήθλου ἐπικυκλωίου όλουλήρωματος νά υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδόν τοῦ χωρίου τὸ ὅποϊον περιορίζεται ὑπὸ τῆς πρώτης ἀψίδος τῆς ἐπικυκλοειδοῦς καὶ τοῦ τόξου τοῦ κύκλου ἐπὶ τοῦ ὁποίου γίνεταί ἡ κύλισις.
- 
24. Νά υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδόν τῆς ἐπιφανείας ποὺ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ὑποκυκλοειδοῦς $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

25. Ἐξ' ὅσων ὀρίσετε τὰ κατωθὶ ὁλοκληρώματα

$$\int_{\gamma} \Phi \cdot d\vec{z}, \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{z}$$

ὅπου Φ εἶναι πραγματικὴ συνάρτησις καὶ \vec{F} διανυσματικὴ καὶ γ , μία προσανατολισμένη καμπύλη, νὰ υπολογισθοῦν

i) $\int_{\gamma} \Phi d\vec{z}$, ὅπου $\Phi = 2xyz^2$ καὶ ἡ καμπύλη γ , δίδεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων
 $x = t^2, y = 2t, z = t^3$, ἀπὸ $t = 0$ ἕως $t = 1$.

ii) $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{z}$, ὅπου $\vec{F} = xyi - zj + x^2k$, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὡς ἀνωτέρω τόξου τῆς γ .

26. Εἰς ἕνα σὺν των κατωθὶ διαφοριῶν ω εὑρετε μίαν συνάρτησιν V (δυναμιὸν) τοιαύτην, ὥστε $\omega = dV$.

i) $\omega = (3x^2y + 2xy)dx + (x^3 + x^2 + 2y)dy$

ii) $\omega = (xy \sin xy + \eta \mu xy)dx + (x^2 \sin xy + y^2)dy$.

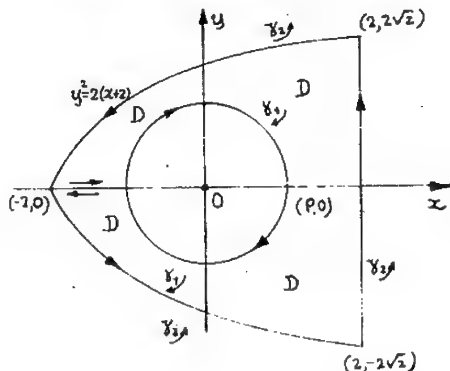
iii) $\omega = (2xyx^3 + z)dx + x^2z^3dy + (3x^2yz^2 + x)dz$

iv) $\omega = (1 + e^{xy})dx + e^{xy}(1 - \frac{x}{y})dy$

v) $\omega = 2xe^{x^2} \eta \mu y dx + e^{x^2} \sigma \eta y dy$

27. Ἐστω D ἕνα χωρίον κατεῖμενον ἐντὸς προσανατολισμένου καύλου γ , μὲ ἐξισώσεις $x^2 + y^2 = \rho^2$ (ἐνθα, ρ ὅσο θελομεν μικρὰ αὐτὸς) τὸ ὁποῖον φράσσεται ὑπὸ τῆς παραβολῆς $y^2 = 2(x+2)$, τῆς εὐθείας $x=2$ καὶ τῶν ὁποίων τὸ προσανατολισμένον σύνορον ἔστω γ , (βλ. Σχ.1). Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Green υπολογίσατε τὸ ὁλοκληρώμα:

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right)$$



Σχ.1

ὑπόδ. Ἐστω $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

Αἱ ἀνωτέρω συναρτήσεις δὲν εἶναι ὁρισμέναι εἰς τὴν ἀρχὴν. Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

Δι' εφαρμογής του θεωρήματος του Green έχουμε:

$$\oint_{\gamma_1+\gamma_2} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) = 0 \quad \eta$$

$$\oint_{\gamma_2} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) = \int_{\gamma_1} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ δευτέρου ἐπιυαμπυλίου ὁλοκληρώματος θέσα-
τε $x = \rho \sin \theta$, $y = \rho \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ κ.τ.λ).

28. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὁλοκληρώματα $1\sigma/ \oint_{\Gamma} \frac{y^3 dx - xy^2 dy}{(x^2+y^2)^2}$ $2\sigma/ \int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, ὅπου Γ
εἶναι ἡ ἔλλειψις $x^2+3y^2=1$. (ὑπόδ. Ἐφαρμόσατε τὴν Πρότασιν XI-10-1).

29. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ $f(x,y)$ ἱκανοποιεῖ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace
 $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$ ἐπὶ τοῦ πεδίου D . Δείξατε ὅτι: $\oint_{\Gamma^*} (f'_y dx - f'_x dy) = 0$, ὅπου Γ^* εἶ-
ναι τὸ σύνορον καὶ θε πεδίου D ἐσωτερικοῦ τοῦ D .

30. Ἀφοῦ δεῖξετε ὅτι τὸ ἐπιυαμπύλιο ὁλοκληρώμα:

$$\int_{\vec{AB}} \left[(yze^{xyz} \sin x - e^{xyz} \eta \mu x + y \sin x y + z \eta \mu x z) dx + (yze^{xyz} \sin x + x \sin x y) dy + (xze^{xyz} \sin x + x \eta \mu x z) dz \right]$$

εἶναι ἀνεξάρτητο τοῦ δρόμου, νὰ ὑπολογίσετε τοῦτο μέ \vec{AB} τυχόντα δρόμον διὰ
 $A(0,0,0)$ καὶ $B(-1,-2,-3)$.

31. Ἐνα ὑλίκον σημεῖον κινεῖται κατὰ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὅποιον
συνδέει τὰ σημεῖα $A(a_1, b_1, c_1)$ καὶ $B(a_2, b_2, c_2)$, ὑποκειμένον εἰς τὴν δύ-
ναμιν $\vec{F} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \mathbf{i} - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$. Εὑρετε τὸ παραγό-
μενον ἔργον καὶ δεῖξατε ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ἴδιο δι' οἰονδήποτε δρόμον, ὁποῖος
συνδέει τὰ A καὶ B καὶ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.

32. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλοκληρώμα $\oint_{\Gamma} \frac{x^2 y dx - x^3 dy}{(x^2+y^2)^2}$ ὅπου $1\sigma/$ ἡ Γ εἶναι τὸ τετράγωνον μέ
μορφῆς τὰ σημεῖα $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$. $2\sigma/$ ἡ Γ εἶναι τυχοῦσα κλειστὴ καμπύλη
περιελείουσα τὸ σημεῖον $(0,0)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

§ 1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΣΧΕΤΙΚΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ (ΑΨΕΙΔΟΥΣ)

Θεωρούμεν τὴν ἐπιφάνειαν S τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 ἔχουσα τὰς παραμετρίδας ἑισώ-
σεις $x = \varphi(u, v)$, $y = f(u, v)$, $z = \sigma(u, v)$ (1), ὅπου $(u, v) \in D$. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ συν-
αρτήσεις φ, f, σ εἶναι συνεχεῖς μέ μεριῶς παραγώγους πρώτης τάξεως, ὡς
πρὸς u καὶ v , συνεχεῖς, εἰς τὸ υἱλειστόν καὶ φραγμένον χωρίον D τοῦ ἐπιπέδου
 $ou v$ (ῥεῖα ἐπιφάνεια). Ἐπὶ πᾶν ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ ὀρίδουσαι:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}, \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

δὲν μηδενίζονται συγχρόνως ἐπὶ τοῦ D .

Ἐστω δὲ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐπιφάνεια φράσσεται ὑπὸ τοῦ ῥεῖου τόξου L .

Ἄς θεωρήσωμεν ἐπὶ πᾶν τὴν πραγματικὴν συνάρτησιν $\Phi(M) = \Phi(x, y, z)$
ὠρισμένην καὶ συνεχή ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S .

Ἐστω \mathcal{D} μία τυχοῦσα διαμέρισις τῆς ἐπιφανείας, ἥτις τὴν χωρίζει εἰς τὰ
τμήματα S_1, S_2, \dots, S_n ἔχοντα ἀντιστοιχῶς ἐμβαδὰ $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Ἐφ' ἑκά-
στου τῶν ἀνωτέρω ἐπιφανειακῶν τμημάτων $S_p, p=1, 2, \dots, n$ λαμβάνομεν καὶ
ἀπὸ ἑνα τυχόν σημεῖον $N_p(x_p, y_p, z_p)$ καὶ ἀνοδούδως σχηματίζομεν τὸ ἄθροι-
σμα:

$$T_n = \sum_{p=1}^n \Phi(N_p) \cdot \Delta S_p = \sum_{p=1}^n \Phi(x_p, y_p, z_p) \Delta S_p \quad (2)$$

Τὸ (2) καλεῖται ὀδουληρωτικὸν ἄθροισμα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πραγμα-
τικὴν συνάρτησιν $\Phi(M)$ καὶ τὴν διαμέρισιν \mathcal{D} .

Ἐστω $\delta(S_p)$ ἡ διάμετρος τοῦ τμήματος S_p (δηλ. ἡ διάμετρος τῆς ἐλαχίστης
σφαίρας, ἥτις ἐγκυβεῖ τὸ τμήμα S_p).

Ὀρισμός XII-1-1. Ἐάν τὸ ὀδουληρωτικὸν ἄθροισμα T_n τείνη πρὸς ἑνα
πεπερασμένον ὀριον καθὼς τὸ $\max_{1 \leq p \leq n} \delta(S_p) \rightarrow 0$ (ὅτε καὶ $n \rightarrow \infty$), τοῦτο τὸ

όριον μαθεύται επιφανειακόν όδουθήρωμα απ είδους της συναρτήσεως $\Phi(M)$ επί της επιφανείας S και συμβολίζεται ούτω: $\iint_S \Phi(M) ds$ ή $\iint_S \Phi(x,y,z) ds$.

Σχετικώς ισχύει τό υάτωδι θεώρημα:

Θεώρημα XII- 1-1. Έστω μία λεία επιφάνεια όρισμένη υπό των έξιωύσεων
(1) και $\Phi(x,y,z)$ μία φραγμένη συνάρτησις όρισμένη επί της S . Τότε έχομεν:

$$\iint_S \Phi(x,y,z) ds = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv, \text{ όπου } E, F, G$$

ποσότητες όρισθεύσαι εις την σελ. 296 ήτοι: $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$ και $F=x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$.
Τό επιφανειακόν όδουθήρωμα υπάρχει, εάν και μόνον εάν, τό διηλούν όλο-
μήρωμα του δεύτερου μέλους υπάρχει.

Άπόδειξις: χωρίζομεν την επιφάνειαν S διά μιας διαμερίσεως Φ εις η τό
πληθος τμήματα $S_p, p=1,2,\dots,n$ με αντίστοιχα έμβαδά ΔS_p . Εις την διαμέ-
ρισιν Φ της S αντιστοιχεί ή διαμέρισις Δ του χωρίου D μεταβολής των u,v
και άς παραστήσωμεν διά ΔS_p τά αντίστοιχα έμβαδά των υποχωρίων D_p .
Θεωρούμεν τό όδουθηρωτικόν άθροισμα:

$$T_n = \sum_{p=1}^n \Phi(x_p, y_p, z_p) \Delta S_p \quad (1)$$

Υπάρχει σημείον $(u_p, v_p) \in D_p$ τοιούτον, ώστε νά έχομεν: $x_p = \varphi(u_p, v_p)$,
 $y_p = f(u_p, v_p)$, $z_p = \sigma(u_p, v_p)$. ΈΞ άλλου τό έμβαδόν ΔS_p , ως γνωστόν (βλ σελ. 298),
δα παρέχεται υπό του τύπου:

$$\Delta S_p = \iint_{D_p} \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv \quad (2)$$

όπου E, F, G ποσότητες όρισθεύσαι εις την σελ. 296.

Αί εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής, έυ της (2) λαμβάνομεν:

$$\Delta S_p = \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{(u_p^*, v_p^*)} \cdot \Delta S_p \quad (3),$$

όπου τό $(u_p^*, v_p^*) \in D_p$.

Τό ολοκληρωτικόν ἄθροισμα (1), λόγω τῆς (3), γράφεται :

$$T_n = \sum_{p=1}^n \Phi(\varphi(u_p, v_p), f(u_p, v_p), \sigma(u_p, v_p)) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{(u_p^*, v_p^*)} \cdot \Delta \sigma_p \quad (4)$$

Ἀπολούδως θεωροῦμεν τό ἄθροισμα :

$$S_n = \sum_{p=1}^n \Phi(\varphi(u_p, v_p), f(u_p, v_p), \sigma(u_p, v_p)) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{(u_p, v_p)} \cdot \Delta \sigma_p \quad (5)$$

ὅπου $(u_p, v_p) \in D_p$.

Τό (5) εἶναι ἓνα ολοκληρωτικόν ἄθροισμα πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τό διπλοῦν ολοκληρώμα :

$$\iint_D \Phi(\varphi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v)) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv \quad (6)$$

Ἐν τού ὁρισμοῦ τῶν E, F, G καί τῶν ὑποθέσεων μας, ἡ $\sqrt{E \cdot G - F^2}$ εἶναι μία συνεχῆς συνάρτησις τῶν u, v ἐπὶ τοῦ κλειστοῦ καί φραγμένου συνόλου D , ὥς ἐν τούτου δά εἶναι καί ὁμαλῶς συνεχῆς ἐπ' αὐτοῦ. Ἦτοι διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀριθμός $\delta_1(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν :

$$\left| \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{(u_p, v_p)} - \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{(u_p^*, v_p^*)} \right| < \varepsilon \quad (7)$$

ὅταν $|u_p - u_p^*| < \delta_1(\varepsilon), |v_p - v_p^*| < \delta_1(\varepsilon)$.

ἘΕ ὑποθέσεως ἡ $\Phi(x, y, z)$ εἶναι φραγμένη ἐπὶ τῆς S , συνεπῶς

$$|\Phi(x_p, y_p, z_p)| \leq k \quad (k > 0).$$

Ἐν τῆς σχέσεως (7) συνεπάγεται ἡ ἀνισότης :

$$\begin{aligned} |T_n - S_n| &= \left| \sum_{p=1}^n \Phi(x_p, y_p, z_p) \left[\sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{(u_p^*, v_p^*)} - \sqrt{E \cdot G - F^2} \Big|_{(u_p, v_p)} \right] \Delta \sigma_p \right| \\ &\leq k \cdot \varepsilon \cdot \sum_{p=1}^n \Delta \sigma_p = k \cdot \varepsilon \cdot \sigma \quad (8) \quad (\text{ἐνθα } \sigma \text{ τὸ ἐμβαδόν τοῦ } D). \end{aligned}$$

Ἦδη ἐάν τό ολοκληρώμα (6) ὑπάρχῃ, τότε διὰ καθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει ἀριθμός $\delta_2(\varepsilon) > 0$ τοιοῦτος ὥστε, ἐάν θεωρήσωμεν μίαν διαμέρισιν Δ τοῦ χωρίου D

με $\max_{1 \leq p \leq n} \delta(D_p) < \delta_2(\epsilon)$ να έχωμεν:

$$\left| \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv - S_n \right| < \epsilon \quad (9)$$

Έστω $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$ και θεωρούμεν την διαμέριση της επιφανείας S με $\max_{1 \leq p \leq n} \delta(S_p) < \delta_3$. Προφανώς η διάμετρος ενός του στοιχείου D_p της Δ είναι μικρότερα του δ_3 .

Έχομεν λοιπόν:

$$\begin{aligned} & \left| \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv - T_n \right| \\ &= \left| \iint_D \Phi(\varphi, f, \sigma) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv - S_n + (S_n - T_n) \right| \\ &\leq \left| \iint_D \Phi(\varphi, f, \sigma) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv - S_n \right| + |S_n - T_n| \\ &< \epsilon + k \cdot \epsilon \cdot \sigma = \epsilon(1 + k \cdot \sigma) \quad (10), \text{ διὰ τὰς } \epsilon > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ὅθεν, } \lim_{\substack{\max \delta(D_p) \rightarrow 0 \\ 1 \leq p \leq n}} T_n = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv \quad (11)$$

κατὰ τὸν ὅρισμόν τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὀλοκληρώματος εἶναι:

$$\lim_{\substack{\max \delta(D_p) \rightarrow 0 \\ 1 \leq p \leq n}} T_n = \iint_S \Phi(x, y, z) ds \quad (12)$$

Ἐν τῶν (11) καὶ (12) λαμβάνομεν:

$$\iint_S \Phi(x, y, z) ds = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} du dv.$$

§2. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Ι. Ἐάν ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας εἶναι:

$$r(u,v) = \varphi(u,v) i + f(u,v) j + \sigma(u,v) k$$

$$\text{τότε, } r_u(u,v) = \varphi_u(u,v) i + f_u(u,v) j + \sigma_u(u,v) k$$

$$r_v(u,v) = \varphi_v(u,v) i + f_v(u,v) j + \sigma_v(u,v) k.$$

$$\text{Είναι δε: } \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \vec{n}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \varphi_u & f_u & \sigma_u \\ \varphi_v & f_v & \sigma_v \end{vmatrix} = (f_u \sigma_v - f_v \sigma_u) \mathbf{i} + \\ + (\sigma_u \varphi_v - \varphi_u \sigma_v) \mathbf{j} + (\varphi_u f_v - f_u \varphi_v) \mathbf{k}$$

$$\text{Όθεν: } |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = |\vec{n}(u,v)|^2 = (f_u \sigma_v - f_v \sigma_u)^2 + (\sigma_u \varphi_v - \varphi_u \sigma_v)^2 + (\varphi_u f_v - f_u \varphi_v)^2.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Lagrange έχουμε:

$$|\vec{n}(u,v)|^2 = (\varphi_u^2 + f_u^2 + \sigma_u^2) \cdot (\varphi_v^2 + f_v^2 + \sigma_v^2) - (\varphi_u \varphi_v + f_u f_v + \sigma_u \sigma_v)^2 = E \cdot G - F^2$$

$$\text{διότι, } E = \varphi_u^2 + f_u^2 + \sigma_u^2, \quad G = \varphi_v^2 + f_v^2 + \sigma_v^2, \quad F = \varphi_u \varphi_v + f_u f_v + \sigma_u \sigma_v.$$

$$\text{Άρα: } |\vec{n}(u,v)| = \sqrt{E \cdot G - F^2}.$$

Τό θεώρημα XII-1-1 εκφράζεται και υπό του τύπου:

$$\boxed{\iint_S \Phi(x,y,z) ds = \iint_D \Phi(\varphi(u,v), f(u,v), \sigma(u,v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv} \quad (1)$$

II. Εάν η επιφάνεια S έχη την είσωσιν $z=f(x,y)$, όπου $(x,y) \in D$, τότε δυνάμεθα να θεωρήσωμεν ταύτην έχουσα τας παραμετρισάς είσιώσεις:

$$x=u, \quad y=v, \quad z=f(u,v).$$

$$\text{Είναι δε: } E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1 + 0 + f_u^2 = 1 + f_u^2$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = 0 + 1 + f_v^2 = 1 + f_v^2$$

$$F = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v = f_u \cdot f_v.$$

$$\text{Ότε: } \sqrt{E \cdot G - F^2} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}.$$

Συνεπώς:

$$\iint_S \Phi(x,y,z) ds = \iint_D \Phi(u,v,f(u,v)) \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} du dv.$$

Η θεωρούντες εις τό δεύτερον ολοκληρώμα εις την θέσιν των u,v τά x,y έχουμε:

$$\boxed{\iint_S \Phi(x,y,z) ds = \iint_D \Phi(x,y,f(x,y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.} \quad (2)$$

III. Εάν $\Phi(x, y, z) = 1$, έυ του τύπου του θεωρήματος XII-1-1, λαμβάνομεν:

$$\iint_S ds = \iint_D \sqrt{EG-F^2} du dv \quad (3)$$

Τό πρώτον μέλος του τύπου (3) μάς δίδει, ώς γνωστόν, τό έμβαδόν της επιφανείας S , ή όποία έχει έξισώσεις τάς: $x = \varphi(u, v)$, $y = f(u, v)$, $z = \sigma(u, v)$, όπου $(u, v) \in D$.

Όθεν:

$$\text{Έμβ. } S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{EG-F^2} du dv \quad (4)$$

Εάν ή επιφάνεια έχει έξισωσιν $z = f(x, y)$ και $\Phi(x, y, z) = 1$, τότε έυ του τύπου (2) λαμβάνομεν:

$$\text{Έμβ. } S = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} dx dy \quad (5)$$

Ο τύπος (5) έχει έε άλλου εύρεθ ή εις τήν σελ. 192.

Εάν ή έξίσωσις της επιφανείας δίδεται υπό τήν πεπλεγμένην μορφήν $F(x, y, z) = 0$ αντί της $z = f(x, y)$ διά τόν ύπολογισμόν του έμβαδου της ακολουθείται ή ακόλουθη πορεία:

Έστω ότι πληροῦνται διά τήν $F(x, y, z)$ αι ύποθέσεις του θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων και έστω $F_z > 0$ και έστω $z = z(x, y)$ ή επιλύουσα αυτής.

Ως γνωστόν δά έχωμεν:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Ο τύπος (5) γράφεται:

$$\text{Έμβ. } S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{F_x^2}{F_z^2} + \frac{F_y^2}{F_z^2}} dx dy \quad \eta$$

$$\text{Έμβ. } S = \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{F_z} dx dy \quad (6)$$

$$\text{Εάν } F_z < 0 \text{ τότε Έμβ } S = - \iint_D \frac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}{F_z} dx dy$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον τύπον (4) και ότι $\sqrt{EG-F^2} = |\tau_u \times \tau_v|$ το έμβαδόν της επιφανείας S εκφράζεται και ούτω:

$$\text{Έμβ. } S = \iint_D |\tau_u \times \tau_v| du dv \quad (7)$$

IV. Εάν η $\Phi(x, y, z)$ είναι συνεχής επί της επιφανείας S και η επιφάνεια S είναι λεία, τότε αι $x = \varphi(u, v)$, $y = f(u, v)$, $z = \sigma(u, v)$ είναι συνεχείς και με μεριούς παραγώγους ως προς u και v ας τάξεως συνεχείς ότε $(u, v) \in D$. Έξ' αυτού έπεται ότι, η $\Phi(\varphi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v)) \sqrt{EG-F^2}$ είναι συνεχής επί του D , άρα και όλοκληρώσιμος έπ' αυτού.

Όθεν υπάρχει το επιφανειακόν όλοκληρώμα $\iint_S \Phi(x, y, z) ds$.

V. Εάν η όλοκληρώσις της συναρτήσεως $\Phi(x, y, z)$ γίνεται επί της υλεστής επιφανείας S , τότε το επιφανειακόν όλοκληρώμα της Φ θα τó συμβολιζώμεν ούτω:

$$\oiint_S \Phi(x, y, z) ds.$$

Έφαρμογαι 1^η. Νά υπολογισθῇ τó επιφανειακόν όλοκληρώμα: $\iint_S (y^2 + z^2) ds$,

όπου S είναι τó τμήμα της επιφανείας της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ τó άπουοιπτόμενον υπό του κώνου $z^2 = x^2 + y^2$.

Λύσις: Χρησιμοποιούντες σφαιρικούς συντεταγμένους διά τήν εύρεσιν των εξισώσεων του τμήματος της σφαιρικής επιφανείας S έχομεν:

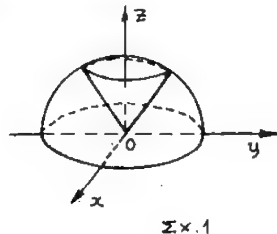
$$x = \eta\mu\varphi\sigma\eta\theta, \quad y = \eta\mu\varphi\eta\mu\theta, \quad z = \sigma\eta\varphi,$$

όπου $0 \leq \theta < 2\pi$ και $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Έπειδή τó σύνολον της σφαιρικής επιφανείας θα υεΐται και επί της κωνικής επιφανείας θα πρέπει νά έχωμεν:

$$\sigma\eta^2\varphi = \eta\mu^2\varphi\sigma\eta^2\theta + \eta\mu^2\varphi\eta\mu^2\theta \quad \text{ή}$$

$$\sigma\eta\varphi = \eta\mu\varphi, \quad \text{έξ ής } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Όθεν: $D = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta < 2\pi \text{ και } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\}$ (βλ. Σχ. 1).



$$\text{Είναι λοιπόν } \iint_S (y^2 + z^2) ds = \iint_D (\eta \mu^2 \varphi \eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \varphi) \sqrt{E \cdot G - F^2} d\varphi d\theta \quad (1)$$

$$\text{Είναι δέ: } E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = \sigma \nu^2 \varphi \sigma \nu^2 \theta + \sigma \nu^2 \varphi \eta \mu^2 \theta + \eta \mu^2 \varphi = 1$$

$$G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = \eta \mu^2 \varphi \eta \mu^2 \theta + \eta \mu^2 \varphi \sigma \nu^2 \theta = \eta \mu^2 \varphi$$

$$F = x_\varphi x_\theta + y_\varphi y_\theta + z_\varphi z_\theta = -\sigma \nu \varphi \eta \mu \varphi \sigma \nu \theta \eta \mu \theta + \sigma \nu \varphi \eta \mu \varphi \sigma \nu \theta \eta \mu \theta + 0 = 0.$$

$$\text{"Οθεν: } \sqrt{E \cdot G - F^2} = \eta \mu \varphi.$$

Ο τύπος (1) γίνεται :

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + z^2) ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} (\eta \mu^2 \varphi \eta \mu^2 \theta + \sigma \nu^2 \varphi) \eta \mu \varphi d\theta \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu^2 \varphi + 2 \sigma \nu^2 \varphi) \eta \mu \varphi d\varphi \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sigma \nu^2 \varphi) \eta \mu \varphi d\varphi \\ &= \pi \left[-\sigma \nu \varphi - \frac{1}{3} \sigma \nu^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12} (16 - 7\sqrt{3}). \end{aligned}$$

29/ Νά υπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας τύπου σαιμπρέλλας, τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶναι :

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - \sigma \nu \nu) \sigma \nu \mu \\ y &= (R - \sigma \nu \nu) \eta \mu \mu \\ z &= \eta \mu \nu \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\pi &\leq \mu \leq \pi \\ -\pi &\leq \nu \leq \pi \\ R &> 1 \end{aligned}$$

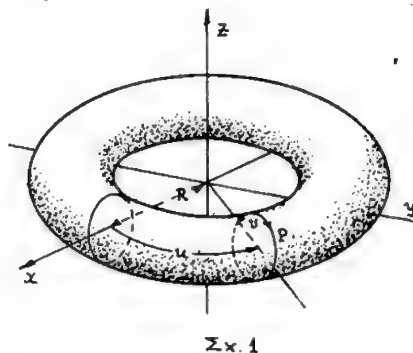
Λύσις: Πρός τούτοις δά ἐφαρμόσω-
μεν τόν τύπον (7), ἥτοι :

$$S = \iint_D |\tau_u \times \tau_v| du dv.$$

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι: } \tau_u &= -(R - \sigma \nu \nu) \eta \mu \mu \cdot i + (R - \sigma \nu \nu) \sigma \nu \mu \cdot j + \sigma k \\ \tau_v &= \eta \mu \nu \cdot \sigma \nu \mu \cdot i + \eta \mu \nu \eta \mu \mu \cdot j + \sigma \nu \nu \cdot k. \end{aligned}$$

Δι' ενός ἀπλοῦ ὑπολογισμοῦ εὐρίσκουμεν :

$$\text{"Οθεν: } S = \int_{-\pi}^{\pi} du \int_{-\pi}^{\pi} (R - \sigma \nu \nu) d\nu = 4\pi^2 R.$$



§ 3. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

Με τὴν βοήθειαν τῶν ἐπιφανειακῶν ολοκληρωμάτων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσω-
μεν τὴν μᾶσιν, τὰς συντεταγμένας τοῦ κ.β. καθὼς καὶ τὴν ροπήν ἀδρανείας
μιας μᾶσης, ἡ ὁποία εἶναι κατανεμημένη ἐπὶ μιᾷ ὑλικοῦς ἐπιφανείας.

Κατ' ἀρχὰς ὀρίσομεν ὡς ἐπιφανειακὴν πυκνότητα $\delta(x, y, z)$ εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$
τῆς ἐπιφανείας τὸ ὄριον:

$\delta(x, y, z) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{dm}{ds}$, ἔνθα m ἡ μᾶσα τῆς ὑλικοῦς ἐπι-
φανείας.

I. Ἡ μᾶσα m ἡ ὁποία εἶναι κατανεμημένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S παρέχεται ὑπὸ
τοῦ τύπου:

$$m = \iint_S \delta(x, y, z) ds.$$

II. Αἱ συντεταγμένα τοῦ κ.β. τῆς ὑλικοῦς ἐπιφανείας δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$x_k = \frac{\iint_S x \delta(x, y, z) ds}{\iint_S \delta(x, y, z) ds}, \quad y_k = \frac{\iint_S y \delta(x, y, z) ds}{\iint_S \delta(x, y, z) ds}, \quad z_k = \frac{\iint_S z \delta(x, y, z) ds}{\iint_S \delta(x, y, z) ds}.$$

Εἰδιωκῶς, διὰ ὁμογενή ἐπιφάνειαν ἔχομεν:

$$x_k = \frac{\iint_S x ds}{\iint_S ds}, \quad y_k = \frac{\iint_S y ds}{\iint_S ds}, \quad z_k = \frac{\iint_S z ds}{\iint_S ds}.$$

III. Ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς S ὡς πρὸς τὸν ἄξονα z εἶναι:

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) ds.$$

Ἀναλόγως εὐρίσκονται καὶ αἱ ροπαὶ ἀδρανείας I_x, I_y .

Ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον oxy ἡ ροπή ἀδρανείας τῆς ἐπιφανείας S θὰ εἶναι

$$I_{xy} = \iint_S z^2 \delta(x, y, z) ds. \quad \text{Προφανῶς } I_z = I_{yx} + I_{zx}.$$

Εφαρμογή Νά υπολογισθῇ ἡ ροπή ἁδρανείας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον οχὺ ὑλίου ἐπιφάνειας S μὲ $\delta(x,y,z)=1$, ἥτις περιορίζεται ὑπὸ τῆς κυλινδρικοῦ ἐπιφάνειας $x^2+y^2=4$ καὶ τῶν ἐπιπέδων $z=0$ καὶ $z=x+3$.

Λύσις: Ὁ τύπος ὁ δίδων τὴν ροπήν ἁδρανείας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον οχὺ τῆς ἐν λόγῳ ὑλίου ἐπιφάνειας εἶναι:

$$I_{xy} = \iint_S z^2 ds \quad (1)$$

Διὰ τὴν ἀναλυτικὴν παράστασιν τῆς ἐπιφάνειας χρησιμοποιοῦμεν κυλινδρικοῦ συντεταγμένους, ἥτοι: $x=2\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=2\eta\mu\theta$, $z=z$, ὅπου $-\pi \leq \theta \leq \pi$ καὶ $0 \leq z \leq 3+2\sigma\upsilon\nu\theta$ (βλ. Σχ.1).

Εἶναι δέ, $x_0=-2\eta\mu\theta$, $y_0=2\sigma\upsilon\nu\theta$, $z_0=0$

$$x_z=0, \quad y_z=0, \quad z_z=1.$$

$$\text{Ὅτε: } E = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4$$

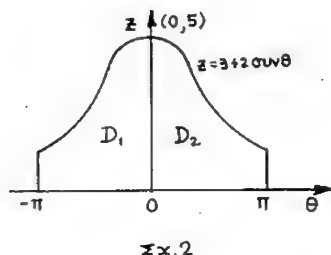
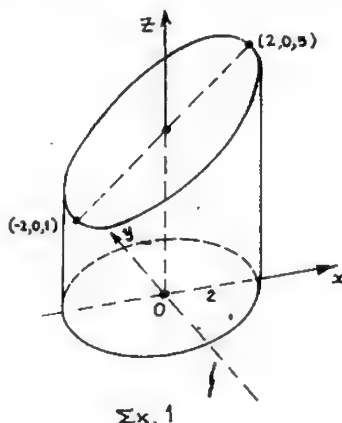
$$G = x_z^2 + y_z^2 + z_z^2 = 1$$

$$F = x_0 \cdot x_z + y_0 \cdot y_z + z_0 \cdot z_z = 0.$$

$$\text{Συνεπῶς: } \sqrt{E \cdot G - F^2} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι λοιπόν, } \iint_S z^2 ds &= 2 \cdot \iint_D z^2 dz d\theta \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{3+2\sigma\upsilon\nu\theta} z^2 dz = \frac{2}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (3+2\sigma\upsilon\nu\theta)^3 d\theta = 60\pi. \end{aligned}$$

Διὰ τὸ χωρίον D μεταβολῆς τῶν (θ, z) βλ. Σχ.2.



§ 4. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ.

I. Ἐστω ἡ λεία ἐπιφάνεια S τῆς ὁποίας ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις εἶναι $r=r(u,v)$, ὅπου $(u,v) \in D$. ὑποθέτομεν ὅτι τὸ σύνορον (δ) τοῦ D εἶναι μία λεία καμπύλη.

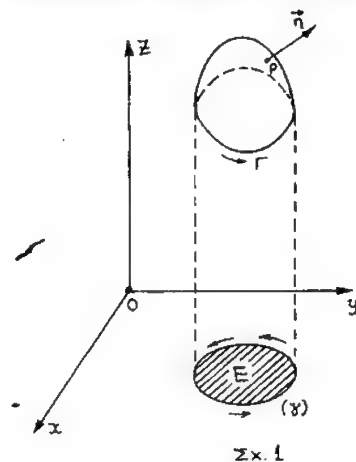
Ἐξ ὅσον ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι λεία, τὸ ἔσωτεριὸν γινόμενον $r_u \times r_v \neq \theta$ διὰ πάδε

$(u, v) \in D$. Ός ἐν τούτῳ δυνάμεθα νά ὠρίσῳμεν τὸ μοναδιαῖον υἰθέτον δiάνυσμα $\vec{n}^{(1)}$ τῆς ἐπιφανείας εἰς υἰθε σημείον Ρ αὐτῆς ὑπό τοῦ τύπου: $\vec{n} = \frac{\tau u \times \tau v}{|\tau u \times \tau v|}$ (1) διὰ $(u, v) \in D$. Ἐπειδὴ ἐπὶ τῆς υἰθέτου ὑπάρχουν δύο φοραὶ ἐνλέχμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν αὐθαίρετως ὡς φορὰν τοῦ μοναδιαίου υἰθέτου δiανύσματος \vec{n} .

Θέ λέγωμεν ὅτι μία λεία ἐπιφάνεια S εἶναι προσανατολισίμος, ἐὰν τὸ μοναδιαῖον υἰθέτον δiάνυσμα $\vec{n}(\rho)$, ὡς ὠρίσθη ὑπό τοῦ τύπου (1), εἶναι μία συνεχὴς συναρτοῖς τοῦ Ρ ἐφ' ὅλουιτῆρου τῆς ἐπιφανείας.

Ὅθεν, υἰθε λείο τμήμα τῆς ἐπιφανείας S εἶναι προσανατολισίμος. Ἐὰν \vec{n} εἶναι τὸ μοναδιαῖον υἰθέτον δiάνυσμα ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν, τότε τὸ $-\vec{n}$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον υἰθέτον δiάνυσμα τῆς ἀντιθέτου φορᾶς. Συνεπῶς υἰθε προσανατολισίμος ἐπιφάνεια ἔχει δύο δυνατοὺς προσανατολισμοὺς ἐν σχέσει μετὰ \vec{n} .

Καλοῦμεν θετικὴν ὄψιν μιᾶς προσανατολισίμου ἐπιφανείας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον oxy , αὐτὴν πρὸς τὸ μέρος τῆς ὁποίας εὑρίσκιόμενον τὸ μοναδιαῖον υἰθέτον δiάνυσμα \vec{n} , σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος Oz ὀβείαν γωνίαν (βλ. Σχ. 1).



Ἐπίσης καλοῦμεν ἀρνητικὴν ὄψιν μιᾶς προσανατολισίμου ἐπιφανείας ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον oxy , αὐτὴν πρὸς τὸ μέρος τῆς ὁποίας εὑρίσκιόμενον τὸ μοναδιαῖον υἰθέτον δiάνυσμα \vec{n} , σχηματίζει μετὰ τοῦ ἄξονος Oz ἀμβλείαν γωνίαν.

Ὅρισθείσης τῆς μιᾶς ὀψεως ἐπιφανείας, ὅτε αὐτομάτως ὀρίζεται καὶ ἡ ἄλλη.

Ἰδιαιτέρως πρέπει νά προσέξωμε, ὅτι ὁ καθορισμὸς τῆς ὀψεως μιᾶς ἐπιφανείας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν καθορισμὸν τῆς φορᾶς τοῦ μοναδικίου υἰθέτου δiανύσματος \vec{n} , καὶ ὅτι ἐπὶ τῆς διενδύνσεως τῆς υἰθέτου τῆς ἐπιφανείας ὑπάρχουν δύο ἀντίθετοι φοραὶ.

Αἱ ἐπιφάνειαι τὰς ὁποίας δυνάμεθα νά προσανατολίσωμεν καλοῦνται διπλευροὶ ἐπιφάνειαι ἐν ἀντιθέσει μετὰ τὰς μὴ προσανατολισίμους αἱ ὁποῖαι καλοῦνται μονόπλευροι.

Παραδείγματα 1^{ου}. Τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἓνα χαρακτηριστικὸν παράδειγμα διπλευροῦ ἐπιφανείας

(1) Θὰ συμβολίσωμεν τοῦτο μετὰ \vec{n} ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν συμβολισμόν μετὰ N ποὺ ἐχρησιμοποιεῖται εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανείων.

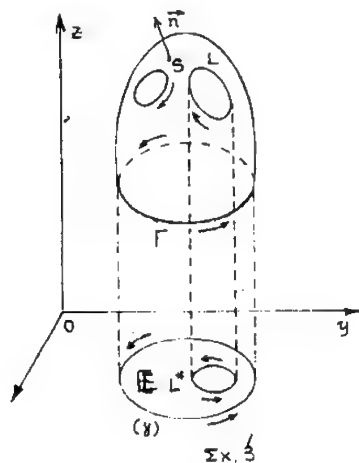
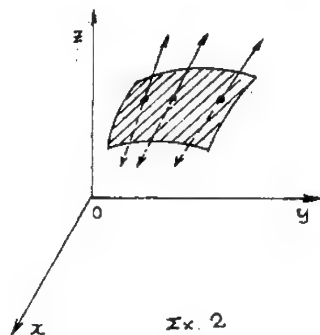
2%/ Κάθε λεία επιφάνεια διδομένη υπό της εξίσωσης $z = f(x, y)$ είναι μία διπλούς επιφάνεια (βλ. Σχ. 2).

3%/ α) θεωρούντες την επιφάνειαν του ήμισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$ η άνω δευτερεύουσα όψη είναι ευείνη της οποίας τό η υστευδύνεται πρὸς τὰ ἔξω τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἡ κάτω ἡ ἀρνητικὴ όψη εἶναι ευείνη της οποίας τό -η υστευδύνεται πρὸς τὸ κέντρον της σφαίρας.¹⁾

β) θεωρούντες την επιφάνειαν του ήμισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0$ η ἔνω ἡ δευτερεύουσα όψη εἶναι ευείνη, ὅπου τό η υστευδύνεται πρὸς τὸ κέντρον της σφαίρας, ἐνῶ ἡ κάτω ἡ ἀρνητικὴ όψη εἶναι ευείνη ὅπου τό -η υστευδύνεται πρὸς τὰ ἔξω της σφαίρας.

4%/ Κάθε υλίστη επιφάνεια ἥτις χωρίζεται εἰς δύο «ἴσα» μέρη εἶναι μία διπλούς επιφάνεια, ὅπως τὸ ἐλλειψοειδὲς κ.τ.λ.

• Ἐστω ἡ επιφάνεια S ἡ ὁποία φράσσεται υπό της ἀπλῆς καμπύλης (Γ) (περίγραμμα της S). Ὁ προσανατολισμός της (Γ) εἰσαγεται ὡς ἀπολούδως. Ἐστω (γ) ἡ προβολὴ της (Γ) εἰς τὸ ἐπίπεδον xy . Ὡς γνωστὸν ἡ καμπύλη (Γ) δύναται νὰ διαγραφῇ κατὰ δύο ἔννοιες. Ἡ ἔννοια διαγραφῆς πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν δευτερεύουσα όψη της επιφανείας (βλ. Σχ. 3) εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ αὐτὴ πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διαγραφὴν της (γ) κατὰ τὴν δευτερεύουσα φοράν δηλ. ἀντίθετον πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δευτερεύου του ὁρολογίου καὶ δὲ λέγωμεν τότε ὅτι ἡ (Γ) εἶναι



θετικῶς προσανατολισμένη, εἰς τὴν ἀρνητικὴν όψη της επιφανείας ἀντιστοιχοῦν ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἀντίθετη ἔννοια διαγραφῆς της (Γ) ἐν σχέσει μὲ τ' ἀνωτέρω καὶ δὲ λέγωμεν τότε, ὅτι ἡ (Γ) εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη. Ἐάν E εἶναι τὸ χωρίον

¹⁾ Ὁ προσανατολισμός ὡς δευτερεύουσα όψη τοῦ η, εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν, τὴν εἰς τοῦ κέντρου πρὸς τὴν επιφάνειαν της σφαίρας,

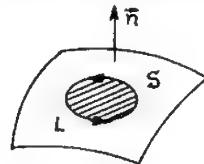
τό περιελιγόμενον υπό της (γ) τότε αυτόματως ὁρίζεται καὶ ὁ προσανατολισμός τοῦ E ἐν σχέσει μετὰ τὸν τρόπον διαγραφῆς της (γ) δηλ. εἰς θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν.

Ἐάν L εἶναι μία αὐθαίρετος υἱειστή καμπύλη φράσσουσα ἓνα τμήμα της προσανατολισμένης ἐπιφανείας S , ὁ θετικὸς προσανατολισμός διαγραφῆς της καμπύλης ἐν σχέσει μετὰ τὸν προσανατολισμὸν της S ἐυλέγεται πάλιν κατὰ ἀνάλογον τρόπον πού ἐυθέσαμεν ἀνωτέρω.

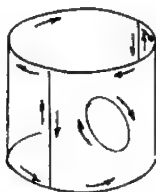
Ἀναλυτικώτερα (βλ. σχετ. καὶ Σχ. 4)

Ἐάν θεωρήσωμεν τὴν προβολὴν L^* της L ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον oxy ἡ θετικὴ φορά διαγραφῆς της L εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὰ προβαλλόμενα σημεῖα της L ἐπὶ τὸ oxy νὰ διαγράφουν τὴν L^* κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν διαγραφῆς αὐτῆς, δηλ. ἀντιθετὸν πρὸς τὴν κίνησιν τῶν δεικτῶν τοῦ ὠρολογίου.

Τὰ κατωτέρω σχήματα δεικνύουν τὸν τρόπον προσανατολισμοῦ τοῦ περιγράμματος (συνόρου) τῶν ἐπιφανειῶν.



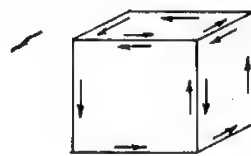
Σχ. 4



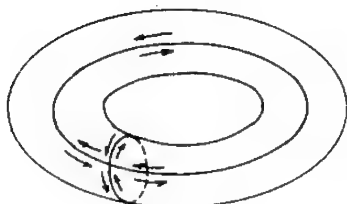
Σχ. 5



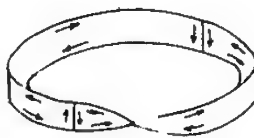
Σχ. 6



Σχ. 7



Σχ. 8



Σχ. 9



Σχ. 9'

Παρατήρησις: Ἐνα χαρακτηριστικὸν παράδειγμα ἐπιφανείας μετὰ μίαν ὄψιν μονόπλευρον εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ Möbius.

Δὲν θὰ δώσωμεν τὴν ἀναλυτικὴν εἰσαγωγὴν της ἐπιφανείας, ἀλλὰ δι' ἑνὸς πρακτικοῦ τρόπου θὰ ἴδωμεν πῶς κατασκευάζεται αὕτη (διὰ τὴν εἰσαγωγὴν ταύτης

βλ. Advanced Calculus, R. GREIGTON BUCK éd Mc GRAW-HILL, 1956, σελ. 282).

πρός τούτους, (βλ. Σχ 9) μέ κατάλληλη στροφή καί στρέψη φέρομεν εἰς σύμπτωσης τῆς πλευρᾶς ΒΓ καί ΔΑ τῆς χάρτινης ὀρθογωνιακῆς πλωίδος ΑΒΓΔ (βλ. Σχ. 9) οὕτως, ὥστε ἡ κορυφή Β νά ταυτισθῇ μέ τήν Δ καί ἡ κορυφή Γ μέ τήν Α. Ἐχομεν οὕτω ἐπιτύχει μίαν μονόπλευρον ἐπιφάνειαν.

§ 5. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΨ ΕΙΔΟΥΣ

Ι Ἐστω μία δεῖα (ἡ τμηματικῶς δεῖα) καί προσανατολισμένη (δίπλευρος) ἐπιφάνεια S καί ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \quad (1)$$

ὁρισμένη καί συνεχὴς ἐπὶ τῆς S .

Ἐστω \vec{n} τὸ μοναδιαῖον ὑάδετον διάνυσμα τῆς ἐπιφανείας· πρῶτον τὰ διευθύνοντα συνημίτονα ἔστωσαν $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, τὸ δὲ ἔσωτερικὸν γινόμενον $\vec{F} \cdot \vec{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ εἶναι μία συνεχὴς συνάρτησις τῶν x, y, z ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας S .

Ὁρισμός XIII-5-1. Καλοῦμεν ἐπιφανειακὸν ὀλοκληρώμα βΨ εἰδους τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F}(P, Q, R)$ ἐπὶ τῆς δειᾶς ἐπιφανείας S καί τὸ συμβολίζομεν οὕτω: $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ τὸ ἐπιφανειακὸν ὀλοκληρώμα αΨ εἰδους τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως $\vec{F} \cdot \vec{n}$ ἐπὶ τῆς S , ἦτοι:

$$\begin{aligned} \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &\equiv \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma] dS \quad (2) \\ \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy &\equiv \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (2') \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις: 1^η/ Τὸ $\vec{F} \cdot \vec{n}$ παριστᾷ τὸ μέτρον τῆς προβολῆς τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως \vec{F} ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος \vec{n} .

2^η/ Τὸ dS εἶναι τὸ ἀπειροστόν ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας S αἱ δὲ ἐκφράσεις $\cos\alpha \cdot dS, \cos\beta \cdot dS, \cos\gamma \cdot dS$, εἶναι, ἀντιστοιχῶς, τὰ ἐμβαδὰ τῶν προβολῶν τοῦ στοιχείου τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἔχοντος ἐμβαδὸν dS εἰς τὰ ἐπίπεδα oxy, ozx, oxy .

Αυτό δικαιολογεί γιατί περιστώμεν αυτές τās προβολάς τών άνωτέρω επιπέδων διά τών $dydz$, $dzdx$, $dx dy$.

II. Ο υπολογισμός του επιφανειακού όλουθηρώματος 3^{ου} είδους ανάγεται εις τόν υπολογισμόν τών κατωδι επιφανειακών όλουθηρωμάτων α^{ου} είδους, ήτοι τών:

$$\iint_S P \sin \alpha \, ds, \quad \iint_S Q \sin \beta \, ds, \quad \iint_S R \sin \gamma \, ds,$$

Άς θεωρήσωμεν, π.χ., τó επιφανειακόν όλουθηρώμα:

$$\iint_S R \sin \gamma \, ds \quad (3)$$

καί έστω ότι αι παραμετρίαι έεισώσεις της επιφανειας είναι $x = \varphi(u, v)$, $y = f(u, v)$, $z = \sigma(u, v)$, $(u, v) \in D$. Ός γνωστόν τό (3) μετασχηματίζεται εις τό διπλούν όλουθηρώμα:

$$\iint_D R(\varphi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v)) \sin(\vec{n}, \vec{k}) \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2} \, du \, dv \quad (4)$$

Έπειδή είναι: $\sin \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{D(\varphi, f)}{D(u, v)}$ (5) (6+1(294))
661 297, (8)

τό όλουθηρώμα (3), λόγω τών (4) καί (5), γράφεται:

$$\iint_S R \sin \gamma \, ds = \pm \iint_D R(\varphi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v)) \frac{D(\varphi, f)}{D(u, v)} \, du \, dv$$

(6),

όπου τό + λαμβάνεται όταν ή επιφάνεια S καί τό πεδión D έχουν τόν αυτόν προσανατολισμόν καί τό - όταν έχουν αντίθετον προσανατολισμόν.

Αναλόγως εύρίσκειμεν τούς τύπους:

$$\iint_S Q \sin \beta \, ds = \pm \iint_D Q(\varphi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v)) \frac{D(\varphi, \sigma)}{D(u, v)} \, du \, dv \quad (7)$$

$$\iint_S P \sin \alpha \, ds = \pm \iint_D P(\varphi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v)) \frac{D(f, \sigma)}{D(u, v)} \, du \, dv \quad (8)$$

Οί τύποι (6), (7) καί (8) διά προσδέσεως μās δίδουν:

$$\boxed{\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \pm \iint_D \left[P \frac{D(z, \sigma)}{D(u, v)} + Q \frac{D(\sigma, \phi)}{D(u, v)} + R \frac{D(\phi, f)}{D(u, v)} \right] du dv} \quad (9)$$

όπου έτερόν:

$$P = P(\phi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v))$$

$$Q = Q(\phi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v))$$

$$R = R(\phi(u, v), f(u, v), \sigma(u, v)).$$

III. Εάν ή δεία έπιφάνεια περιορίζεται υπό της έεισώσεως $z = z(x, y)$, διά τόν υπολογισμόν τού έπιφανειακού όλουληρώματος, έστω τού όλουληρώματος:

$$\iint_S R(x, y, z) \text{ συν} \chi ds$$

άρκει νά λάβωμεν ως παραμετρίκας έεισώσεις της έπιφάνειας τάς $x = x, y = y, z = z(x, y)$. Τότε δά έχωμεν:

$$\frac{D(x, y)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} x_x & y_x \\ x_y & y_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Συνεπώς ό τύπος (6) γράφεται:

$$\boxed{\iint_S R \text{ συν} \chi ds = \iint_{D_1} R(x, y, z(x, y)) dx dy} \quad (10)$$

όπου τό D_1 είναι ή προβολή έπί τό oxy της έπιφάνειας S .

Εάν τό όλουληρώμα ληφθ ή έπί της κατω όψεως της έπιφάνειας, τότε:

$$\iint_S R \text{ συν} \chi ds = - \iint_{D_1} R(x, y, z(x, y)) dx dy \quad (10')$$

Αναλόγως έτάχονται καί οί τύποι:

$$\iint_S P \text{ συν} \alpha ds = \pm \iint_{D_2} P(x, y, z), y, z dy dz \quad (11)$$

$$\iint_S Q \text{ συν} \beta ds = \pm \iint_{D_3} Q(x, y, z, x), z dx \quad (12)$$

όπου η επιφάνεια S έχει την εξίσωσιν $x = x(y, z)$ διά το όλουλήρωμα (11) και την εξίσωσιν $y = y(z, x)$ διά το όλουλήρωμα (12). Τό + λαμβάνεται όταν η καθετος \vec{n} επί την επιφάνειαν $x = x(y, z)$ σχηματίζει οξείαν γωνίαν με τον ox και τό - όταν σχηματίζει αμβλείαν γωνίαν. Ανάλογος καθορισμός των \pm γίνεται και διά το όλουλήρωμα (12). Τα σύμβολα D_2, D_3 παριστούν τας προβολάς της επιφάνειας S εις τό επίπεδον oxy διά το όλουλήρωμα (11) και εις τό ozx διά τό (12).

IV. Έστω ότι η επιφάνεια S έχει τας παραμετρίδας εξισώσεις $x = \varphi(u, v)$, $y = f(u, v)$, $z = \sigma(u, v)$, $(u, v) \in D$. Έστω \vec{n} τό μοναδιαίον καθετον διάνυσμα αυτής και έστω $\vec{n} = (\sigma u, \sigma v, \sigma \gamma)$. Ός γνωστόν θά είναι:

$$\sigma u = \frac{1}{\pm \sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{D(f, \sigma)}{D(u, v)}, \quad \sigma v = \frac{1}{\pm \sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{D(\sigma, \varphi)}{D(u, v)}, \quad \sigma \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{D(\varphi, f)}{D(u, v)}.$$

Κατόπιν τούτου τό δεύτερον μέλος του τύπου (9) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \iint_D \left[P \cdot \frac{D(f, \sigma)}{D(u, v)} + Q \cdot \frac{D(\sigma, \varphi)}{D(u, v)} + R \cdot \frac{D(\varphi, f)}{D(u, v)} \right] \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \sqrt{EG-F^2} du dv = \\ & = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot \sqrt{EG-F^2} du dv \quad (13), \quad \text{όπου } \vec{F} = (P, Q, R). \end{aligned}$$

Μελετώμεν ήδη την περίπτωση όπου είναι δυνατόν νά ευλόεωμεν ως καμπυλογράμμους συντεταγμένες u, v τας καρτεσιανάς συντεταγμένες x, y . Τό D θά είναι τότε η προβολή εις τό επίπεδον oxy της S και καθε παράλληλος προς τον oz θά τέμνη εις ένα τό πολύ σημείον την επιφάνειαν S .

Έν προειμένω θά έχωμεν:

$$\sqrt{EG-F^2} = \frac{1}{\sigma \gamma} = \frac{1}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}.$$

Τό δέ όλουλήρωμα (13) γράφεται:

$$\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot \frac{1}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} dx dy.$$

Όθεν, έν η επιφάνεια S έχη μίαν προβολήν D επί του επιπέδου oxy , τότε ισχύει:

$$\boxed{\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot \frac{1}{|\vec{n} \cdot \vec{k}|} dx dy} \quad (14)$$

Έστω $z=f(x,y)$ είναι η εξίσωση της ανωτέρω επιφάνειας εις καρτεσιανός συντεταγμένες και της οποίας η προβολή εις το επίπεδον oxy είναι D .

Ός γνωστόν ἐν τῇ Γεωμετρίας (βλ. σελ. 294, τύπος (5)) ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

Καί ὁ τύπος (14) διὰ τὴν προσανατολισμένη ἐπιφάνεια S γίνεται:

$$\boxed{\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \pm \iint_D [P \cdot f_x - Q \cdot f_y + R] dx dy} \quad (15)$$

Ὁ τύπος (15) εἶναι εὐχρηστος ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ἔχῃ τὴν εξίσωσιν $z=f(x,y)$, μαθότι μετατρέπει ἓνα ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα εἰς ἓνα διπλὸ τοῖσούτον. Ὡς σημειωθῇ ὅτι τὸ ἐμφανιζόμενον z εἰς τὰς συναρτήσεις P, Q, R ἐμφράζεται, λόγῳ τῆς σχέσεως $z=f(x,y)$, συναρτήσῃ τῶν x, y .

Παράδειγμα: Νὰ υπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_S x dy dz + y dz dx - z dx dy,$$

ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας $x^2+y^2+z^2=R^2$, ἡ ὁποία κείται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου oxy .

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος θ° εἵδους τὸ ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \iint_S x dy dz + y dz dx - z dx dy = \iint_S [x \sigma\upsilon\nu\alpha + y \sigma\upsilon\nu\beta - z \sigma\upsilon\nu\gamma] ds \quad (1),$$

ὅπου $\sigma\upsilon\nu\alpha, \sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\nu\gamma$ εἶναι τὰ διευθύνοντα σνημίτονα τῆς μαθέτου \vec{n} (τῆς ὁποίας υποθέτομεν ὅτι ἡ δευτεῖα φορά διευθύνεται πρὸς τὸ ἔξωτεριὸν τῆς ἐπιφάνειας) μετὰ τοὺς ἄξονας ox, oy, oz . Εἶναι δέ: $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{x}{R}$, $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{y}{R}$, $\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{z}{R}$, ὅτε ὁ τύπος (1) γράφεται:

$$I = \frac{1}{R} \iint_S [x^2 + y^2 - 2z^2] ds \quad (2).$$

Διὰ τὸν υπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος (2) (α° εἵδους) ἐφαρμόσομεν τὸ

Θεώρημα XII-1-1. Προς τούτους χρησιμοποιούμεν σφαιρικές συντεταγμένες, ήτοι:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \eta \mu \varphi \sigma \nu \theta \\ y &= R \eta \mu \varphi \eta \mu \theta \\ z &= R \sigma \nu \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &\leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 0 &\leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

Ευκόλως δέ εύρισκομεν, ότι, $\sqrt{EG-F^2} = R^2 \eta \mu \varphi$, (βλ. σχετικῶς Ἐφαρμογή I^η, §2).

Τό (2) λοιπόν γράφεται:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{R} \iint_D R^2 [\eta \mu^2 \varphi \sigma \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \varphi \eta \mu^2 \theta - 2 \sigma \nu \eta^2 \varphi] R^2 \eta \mu \varphi d\varphi d\theta \\ &= R^3 \iint_D [3 \eta \mu^2 \varphi - 2] \eta \mu \varphi d\varphi d\theta = 3R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^3 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta - 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= 3R^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi - 2R^3 \cdot 1 \cdot 2\pi = 0. \end{aligned}$$

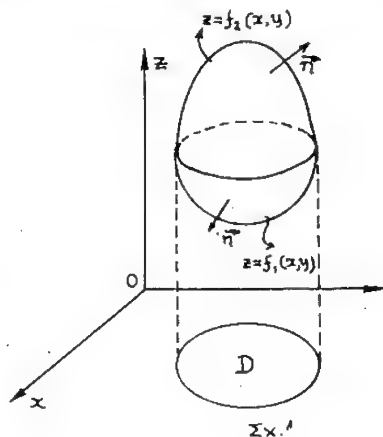
§ 6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΒΛΕΨΙΔΟΥΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΝ-ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ

I. Όγκος στερεοῦ περιυλαιομένου ὑπὸ υλαιοστῆς ἐπιφανείας.

Θεωροῦμεν μίαν υλαιοστήν καὶ λείαν ἐπιφάνειαν S τεμνομένην εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα ὑπὸ ἐμᾶστις παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα oz καὶ τὸ ἐπιφανειακὸν ὀλοκληρώμα:

$\oiint_S z \sigma \nu \chi ds$, ὅπου $\sigma \nu \chi$ εἶναι τὸ $\sigma \nu \eta \mu \iota \tau \omega \nu$ τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν διανύσματος \vec{n} μετὰ τοῦ ἄξονος oz . Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ διετυχή φορά τοῦ \vec{n} κείται πρὸς τὸ ἔξωτεριμὸν τῆς ἐπιφανείας. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη S_1 καὶ S_2 κάτω μέρος καὶ ἄνω μέρος αὐτῆς ἔχοντα ἀντιστοιχῶς ἑξισώσεις $z=f_1(x,y)$

καὶ $z=f_2(x,y)$. Ἄς παραστήσωμεν διὰ τοῦ D τὴν προβολὴν τῆς ἀνωτέρω ἐπιφανείας εἰς τὸ ἐπίπεδον oxy (βλ. Σχ. 1).



Έχομεν λοιπόν:

$$\oint_S z \sin y \, ds = \iint_{S_2} z \sin y \, ds + \iint_{S_1} z \sin y \, ds \quad (1)$$

Διά το τμήμα S_2 της επιφανείας έχουμε:

$$dx dy = ds \sin y, \text{ διότι } \sin y > 0.$$

Διά το τμήμα S_1 της επιφανείας έχουμε:

$$dx dy = -ds \sin y, \text{ διότι } \sin y < 0.$$

Έν τού τύπου (1) λαμβάνομεν:

$$\oint_S z \sin y \, ds = \iint_D f_2 \, dx dy - \iint_D f_1 \, dx dy \quad (2)$$

Η διαφορά τῶν ολοκληρωμάτων τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2) παριστᾷ προφανῶς τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ τοῦ περιορισμένου ὑπὸ τῆς ἀνωτέρω ὠριοδείσεως ἐπιφανείας S . Ὅθεν, ὁ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ πού περιλαμβάνεται ὑπὸ τῆς ὑπερστικῆς ἐπιφανείας S , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

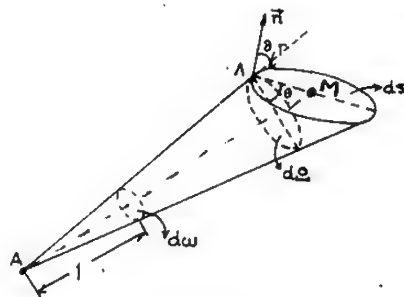
$$V = \oint_S z \sin y \, ds \quad (3)$$

II. Ὑπολογισμός τοῦ μέτρου στερεᾶς γωνίας,

Μία συνήθης ἐπίπεδος γωνία μετρεῖται ἀπὸ τὸ μέτρον τοῦ τόξου, τὸ ὅποιον αἱ πλευραὶ τῆς ἀπομύπτουν ἀπὸ ἓνα μοναδιαῖον κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας. Ἡ γνώσις αὕτη δύναται νὰ ἐπευταθῇ καὶ εἰς μίαν στερεάν γωνίαν ἢ ὁποία περιορίζεται ὑπὸ μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ὡς ἀμολούθως: Τὸ μέτρον τῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι, ἔξ ὀρισμοῦ, ἴσον πρὸς τὸ ἔμβαδόν τοῦ ὁποῖου ἀπομύπτεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς μοναδιαίας σφαίρας, ἐχούσης κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς στερεᾶς γωνίας, ὑπὸ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἥτις περιορίζει τὴν στερεάν γωνίαν.

Οὕτω τὸ μέτρον τῆς τρισσορθογωνίου στερεᾶς γωνίας ἥτις ὀρίζεται ὑπὸ τῶν ἀξόνων: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ εἶναι $\frac{4\pi \cdot 1^2}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Ὡς θεωρήσωμεν ἥδη μίαν ἐπιφάνειαν S , ἥτις φράσσεται ὑπὸ τῆς υἱερ-
στῆς καμπύλης Γ καὶ ἓνα σταθερὸν σημεῖον A υἱεμένον ἐντὸς τῆς ἐπι-
φανείας S καὶ τῆς καμπύλης Γ . Ζη-
τεῖται νὰ εὔρεθῇ τὸ μέτρον τῆς στερεᾶς
γωνίας, ἥ ὁποία ἔχει ὡς ὁδηγὸν τὴν κα-
μπύλην Γ τῆς ἐπιφανείας S . Πρὸς τού-
τοις θεωροῦμεν ἓνα στοιχειῶδες ἔμβα-
δὸν ds ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας πέριξ τοῦ ση-
μεῖου M (βλ. Σχ. 1), τοῦτο δὲ ὁρίζει μίαν
στοιχειῶδην κυνιυτὴν ἐπιφάνειαν μέ-
νορυφτὴν τὸ σημεῖον A . Ἐν συνεχείᾳ θεω-
ροῦμεν τὴν μοναδιαῖαν σφαῖραν κέντρου A ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ κυνιυτὴ ἐπιφά-
νεια ἀπουόπτει ἓνα ἔμβαδόν, ἔστω $d\omega$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέτρον τῆς στοιχειῶ-
δους στερεᾶς γωνίας.



Σχ. 1.

Ἐστω \vec{n} τὸ μοναδιαῖον κἀθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν S διάνυσμα εἰς τὸ ση-
μεῖον A καὶ θ ἡ γωνία αὐτοῦ μετὰ τῆς ἀκτίνος \vec{AM} . Ὡς γνωστὸν $\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}|}$.
Ἐξ ἄλλου ἐὰν ἐν τοῦ σημείου A φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον κἀθετον ἐπὶ τὴν \vec{AM} ,
τότε ἐπειδὴ ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἔχουσα ἔμβαδὸν ds εἶναι ἀπειροστή, δύναται
νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐπίπεδος καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ ἔχουσα ἔμβαδὸν $d\omega$ θεωρεῖται
ὡς ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς ds ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς. Συνεπῶς δὲ ἔχωμεν:
 $d\omega = ds \cdot \cos \theta$ (1).

Ὡς γνωστὸν, $\frac{d\omega}{d\Omega} = \frac{1}{r^2}$ (2), ὁποῦ $r = |\vec{r}|$. Ἐν τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$d\omega = \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot ds \quad (3)$$

Ὅθεν, τὸ μέτρον τῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι:

$$\omega = \iint_S \frac{\cos \theta}{r^2} ds \quad (4)$$

Ἡ στερεὰ γωνία εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ, καθ' ὅσον ἡ γωνία θ εἶναι ὁ-
ξεῖα ἢ ἀμβλεία.

$$\left. \begin{aligned} dX &= \frac{km_0 \delta(x,y,z) ds}{r^3} \cdot \frac{x}{r} \\ dY &= \frac{km_0 \delta(x,y,z) ds}{r^3} \cdot \frac{y}{r} \\ dZ &= \frac{km_0 \delta(x,y,z) ds}{r^3} \cdot \frac{z}{r} \end{aligned} \right\}$$

Ὅθεν, αἱ συντεταγμέναι τῆς δυνάμεως \vec{F} , ἥτις ἀσπεύεται ἐπὶ τῆς ὑδρινῆς μάζης m_0 ὑπὸ τῆς ὑδρινῆς ἐπιφανείας θά εἶναι:

$$X = km_0 \iint_S \delta(x,y,z) \cdot \frac{x}{r^3} ds, \quad Y = km_0 \iint_S \delta(x,y,z) \cdot \frac{y}{r^3} ds, \quad Z = km_0 \iint_S \delta(x,y,z) \cdot \frac{z}{r^3} ds,$$

ὅπου $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

§ 7. ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ STOKES.

Ἐστώ S μία προσανατολισμένη ἐπιφάνεια ἀνοιχτή, τῆς ὁποίας αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις εἶναι:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = f(u,v), \quad z = \sigma(u,v), \quad (u,v) \in D.$$

Υποθέτομεν ὅτι ἡ S περιορίζεται ὑπὸ τῆς υδριστῆς καμπύλης Γ . Ὄταν τὸ σημείον $M(x,y,z)$ κινεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τὸ σημείον $M'(u,v)$ διαγράφει εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν u,v ἓνα χωρίον D περιορισόμενον ὑπὸ τῆς υδριστῆς καμπύλης (γ). Ὀρίζομεν τὴν θετικὴν φοράν διαγραφῆς τῆς καμπύλης (Γ) ἐν σχέσει μὲ τὸν θετικὸν προσανατολισμὸν τῆς ἐπιφανείας οὕτω (βλ. σχετικῶς § 4).

Ἡδὴ ἂς θεωρήσωμεν τὸ ἐπιεκαμπύλιον ὁλοκλήρωμα:

$$I = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \quad (1)$$

ἐκτετεινόμενον ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης καμπύλης Γ .

Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντιμετάστασιν εἰς τὸ ὁλοκλήρωμα (1)

$$x = \varphi(u,v), \quad y = f(u,v), \quad z = \sigma(u,v),$$

ὅτε τὸ (1) γράφεται:

$$I = \oint_{\gamma} P \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right\} + Q \left\{ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right\} + R \left\{ \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right\} \quad \eta$$

$$I = \oint_{\gamma} \left\{ P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial y}{\partial u} + R \frac{\partial z}{\partial u} \right\} du + \left\{ P \frac{\partial x}{\partial v} + Q \frac{\partial y}{\partial v} + R \frac{\partial z}{\partial v} \right\} dv \quad (2)$$

Τό (2) είναι ένα επιβαμπύδιον όλομήτρωμα εις τό επίπεδον ου περιλαμβάνει όνός τής προσανατολισμένης βαμπύδης (γ). Εάν διά τούτο εφαρμόσωμεν τόν τύπον τού Green διά τό επίπεδον έχομεν:

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} + Q \frac{\partial y}{\partial v} + R \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial y}{\partial u} + R \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right] du dv \quad (3)$$

Εις τήν συνάρτησιν υπό τό σύμβολον τής όλομήτρώσεως \iint , οι όροι οι περιέχοντες τό P γράφονται:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \\ & = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \\ & - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \\ & = - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτοντες } J_1 = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}, J_2 = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, J_3 = \frac{D(x,y)}{D(u,v)},$$

τότε ή σχέσις (4) γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} J_3 + \frac{\partial P}{\partial z} J_2 \quad (5)$$

κατ' αναλογίαν εύρίσκουμεν:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(Q \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(Q \frac{\partial x}{\partial u} \right) = - \frac{\partial Q}{\partial z} J_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} J_3 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(R \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(R \frac{\partial x}{\partial u} \right) = - \frac{\partial R}{\partial x} J_2 + \frac{\partial R}{\partial y} J_1 \quad (7)$$

ό τύπος (3), έννοια τών (5), (6) καί (7), γράφεται:

$$I = \iint_D \left[J_1 \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + J_2 \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + J_3 \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] du dv \quad (8)$$

Ἐάν μαθῶμεν, χάριν συντομίας, συνα, συνβ, συνγ τὰ διευθύνοντα συντεταγμένα τοῦ διανύσματος \vec{n} , τότε, ὡς γνωστόν, ἔχουμεν:

$$\text{συνα} = \frac{J_1}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \text{συνβ} = \frac{J_2}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \text{συνγ} = \frac{J_3}{\sqrt{EG-F^2}}$$

καὶ ὁ τύπος (8) γράφεται:

$$I = \iint_D \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \text{συνα} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \text{συνβ} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{συνγ} \right] \cdot \sqrt{EG-F^2} du dv \quad \text{ἢ} \quad \text{C.I. 407} \\ \text{C. XII-1-1}$$

$$I = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \text{συνα} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \text{συνβ} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{συνγ} \right] ds \quad (9)$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (10)$$

Ὅθεν, ἔχομεν ἐκ τῶν (1) καὶ (9) ἢ ἐκ τῶν (1) καὶ (10) τὸν τύπον τοῦ Stokes, ἥτοι:

$$\oint_r P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \text{συνα} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \text{συνβ} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \text{συνγ} \right] ds \quad (11)$$

$$\text{ἢ} \quad \oint_r P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (12)$$

Παρατηρήσεις: 1^η/ Ἐάν ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι ἓνα παράλληλον τμήμα πρὸς τὸ ἐπίπεδον oxy , τότε $dz = 0$ καὶ ὁ τύπος τοῦ Stokes γίνεται:

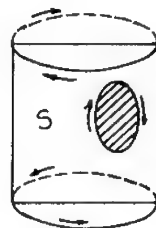
$$\oint_r P dx + Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

ἥτοι λαμβάνομεν τὸν τύπον τοῦ Green, ὅστις θεωρεῖται ὡς μερικὴ περίπτωση τοῦ τύπου τοῦ Stokes.

2^η/ Τὸ θεώρημα τοῦ Stokes ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ τσύνορον τῆς ἐπιφανείας S ἀποτελεῖται ἀπὸ διαφόρους χωριστέρας καμπύλλας (βλ. Σχ. 1). Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ ὁλοκλήρωμα:

$$\int_r P dx + Q dy + R dz$$

πρέπει να ληφθῇ κατὰ μήκος τῶν προσανατολισμένων καμπύλων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὸ σύνορον τῆς S . Οὕτω π.χ. ἐάν λαβῶμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐνός κυλίνδρου ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχομεν ἀνοίξει μίαν, «ὀπήν» (βλ. Σχ. 1) καὶ ἐάν θεωρήσωμεν τὴν ἑξωτερικὴν πλευρὰν τῆς ἐπιφάνειας, τὸ θεώρημα τοῦ Stokes ἐμφράζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τοῦ ἐπιφανειακοῦ ὁλοκληρώματος καὶ τοῦ ἐπικαμπυλίου τοιοῦτου κατὰ μήκος τῶν τριῶν καμπύλων αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν καὶ τὸ σύνορον τῆς S κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἥτις δεικνύεται εἰς τὸ Σχ. 1.



Σχ. 1

3η/. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου τοῦ Stokes θὰ δειξῶμεν τὴν ἰσχυρὴν συνθήκην τοῦ θεωρήματος XI-9-3, ἥτοι:

Ἐάν αἱ συναρτήσεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ εἶναι συνεχεῖς καὶ ἔχουν μερικῶς παραγώγους αἵ τᾶςως συνεχεῖς ἐπὶ ἐνός ἀπλῶς συνευκτινοῦ χωρίου V τοῦ \mathbb{R}^3 , τότε αἱ συνθήκαι:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

εἶναι ἰσχυαί, ἵνα τὸ ἐπικαμπύλιον ὁλοκληρώμα:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz$$

εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ δρόμου κατὰ μήκος πάσης κλεισῆς καμπύλης κειμένης ἐντὸς τοῦ V .

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν μίαν κλειστὴν καμπύλην (γ) κειμένην ἐντὸς τοῦ V καὶ θεωροῦμεν μίαν ἐπιφάνειαν S ἐξ ὁλοκληρώρου κειμένην ἐντὸς τοῦ V καὶ τῆς ὁποίας τὸ σύνορον εἶναι ἡ κλειστὴ καμπύλη (γ). Μία τοιαύτη ἐπιφάνεια ὑπάρχει καὶ ὅτι, τὸ χωρίον V εἶναι ἀπλῶς συνευκτινόν. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Stokes συνάγομεν ὅτι, θὰ εἶναι $\oint_\gamma P dx + Q dy + R dz = 0$. Συμφώνως, δὲ πρὸς τὸ θεώρημα XI-9-1 τὸ ὁλοκληρώμα $\oint_C P dx + Q dy + R dz$ εἶναι

ανεξάρτητον του δρόμου κατά μήκος της Γ , όπου η αμψύλη Γ υείται εντός του V .

4^α/ Κατά την απόδειξιν του τύπου Stokes έθεωρήσαμε την επιφάνεια S υπό παραμετρουήν μορφήν. Έάν η επιφάνεια έχη την εξίσωσιν $z=f(x,y)$, πάλιν ο τύπος ισχύει άρκει νά λάβωμεν ως εξισώσεις της επιφανείας $x=x$, $y=y$, $z=f(x,y)$.

Έφαρμογή. Έπαληθεύσατε τό θεώρημα του Stokes διά την συνάρτησιν $\vec{F}=3yz\vec{i}-xz\vec{j}+yz^2\vec{k}$, όπου S είναι η επιφάνεια του παραβολοειδούς $2z=x^2+y^2$ φρασσομένη υπό του επιπέδου $z=2$.

Λύσις: Έχομεν $P=3y$, $Q=-xz$, $R=yz^2$. Έστω δέ Γ τό σύνορον της έν δόρω επιφανείας. Θά έπαληθεύσωμεν διά των άνωτέρω δεδομένων την ισχύν του τύπου (11), ήτοι:

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \sigma_{\alpha\alpha} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \sigma_{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \sigma_{\alpha\gamma} \right] ds.$$

Και άρχάς υπολογίζομεν τό επιαμψύλιον όλουλήρωμα:

$$I = \oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz = \oint_{\Gamma} 3ydx-xzdy+yz^2dz \quad (1)$$

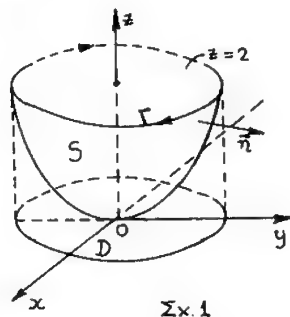
Η προσανατολισμένη αμψύλη Γ (βλ. Σχ. 1), είναι περιφέρεια κύκλου μέ εξίσωσεις $x^2+y^2=4$, $z=2$. Αι παραμετρουαί εξισώσεις ταύτης είναι $x=2\sigma\sigma\sigma t$, $y=2\eta\eta\eta t$, $z=2$, $0 \leq t < 2\pi$.

Συνεπώς τό όλουλήρωμα (1) γράφεται:

$$\int_{2\pi}^0 [3(2\eta\eta\eta t)(-2\eta\eta\eta t) - (2\sigma\sigma\sigma t) \cdot 2 \cdot (2\sigma\sigma\sigma t)] dt = \int_0^{2\pi} (12\eta\eta\eta^2 t + 8\sigma\sigma\sigma^2 t) dt = 20\pi.$$

Ηδη θά υπολογίσωμεν τό 6^α μέλος του τύπου του Stokes. Τά διευδύνοντα συνμήτονα του ααδέτου διανύσματος \vec{n} είναι:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \text{και} \quad \sigma_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$



Έξ' αλλήλου: $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = z^2 + x$, $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -z - 3$.

Μετά τας άντιμεταστάσεις τό 6^ο μέλος γίνεται:

$$I' = \iint_S \frac{(z^2+x)z+(z+3)}{\sqrt{1+x^2+y^2}} ds = \iint_D [z^2x+x^2+z+3] dx dy$$

όπου Δείναι ό κύκλος $x^2+y^2 \leq 4$. θέτοντες $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ λαμβάνομεν τελικώς:

$$I' = \iint_D \left[x \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2} \right)^2 + x^2 + \frac{x^2+y^2}{2} + 3 \right] dx dy$$

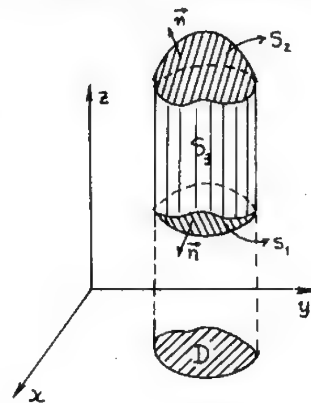
Διά τόν ύπολογισμόν του τελευταιου ολοκληρώματος χρησιμοποιούμεν πο-
λιώς συντεταγμένες, ότε έχομεν:

$$I' = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left\{ \rho \sin \varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} + \rho^2 \sin^2 \varphi + \frac{\rho^2}{2} + 3 \right\} \rho d\rho d\varphi = 20\pi.$$

Όθεν, $I = I'$.

§ 8. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ Ή ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ OSTROGRADSKY Ή ΤΟΥ GAUSS

Έστω ένα χωρίον V περιοριζόμενον υπό δύο τμημάτων λείων και προσανα-
τολισμένων επιφανειών S_1 και S_2 των οποίων αι εξισώσεις είναι $z = f_1(x, y)$,
 $z = f_2(x, y)$ αντιστοίχως, όπου $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ και
υπό μιας μυρτης κυλινδρικής επιφάνειας S_3 της
όποιας αι γενέτειραι είναι παράλληλοι προς τόν
άξονα OZ . (βλ. Σχ. 1). Η ένωση των τριών ανωτέ-
ρω επιφανειών άποτελεί τό σύνορον του χωρίου V
και τό όποϊον άς τό συμβολίσωμεν διά του S . Έ-
στω δέ D ή προβολή του συνόρου S εις τό έπί-
πεδον Oxy . Υποθέτομεν επί πλέον ότι τό σύνορον
 S τέμνεται υπό των ευθειών των παράλληλων
πρός τόν άξονα OZ εις δύο σημεία.



Σχ. 1.

Έστω συνγ τό συνημίτονον της γωνίας του καθέτου επί την επιφάνειαν δια-
νύσματος \vec{n} μέ τόν άξονα των Z . θεωρούμεν ήδη την συνάρτησιν $R(x, y, z)$ ώρι-
ομένην εις τό χωρίον V και έχουσα συνεχή μεριωτήν παράγωγον ως προς z .
Άς θεωρήσωμεν τό όλοκληρώμα:

$$I = \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz \quad (1)$$

ὁλοκληρώνοντες ὡς πρὸς z ἔχομεν :

$$I = \iiint_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D R(x,y,f_2(x,y)) dx dy - \iint_D R(x,y,f_1(x,y)) dx dy \quad (2)$$

Τὸ συνγ εἶναι θετικόν ἐπὶ τοῦ τμήματος S_2 , ἀρνητικόν ἐπὶ τοῦ τμήματος S_1 , καὶ μηδέν ἐπὶ τοῦ τμήματος S_3 .

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἓνα στοιχείον ds τῆς ἐπιφανείας S , θὰ ἔχωμεν τότε :

$$dx dy = \text{συνγ} ds, \quad \text{ἐὰν} \quad \text{συνγ} > 0$$

$$-dx dy = \text{συνγ} ds, \quad \text{"} \quad \text{συνγ} < 0$$

$$dx dy = 0, \quad \text{"} \quad \text{συνγ} = 0.$$

Ὅθεν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\begin{aligned} \iint_D R(x,y,f_2(x,y)) dx dy &= \iint_{S_2} R(x,y,z) \text{συνγ} ds \\ - \iint_D R(x,y,f_1(x,y)) dx dy &= \iint_{S_1} R(x,y,z) \text{συνγ} ds. \end{aligned}$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D R(x,y,f_2(x,y)) dx dy - \iint_D R(x,y,f_1(x,y)) dx dy \\ &= \iint_{S_2} R(x,y,z) \text{συνγ} ds + \iint_{S_1} R(x,y,z) \text{συνγ} ds \quad (3) \end{aligned}$$

Προσθέτοντες εἰς τὴν (3) καὶ τὸ $\iint_{S_3} R(x,y,z) \text{συνγ} ds = 0$, θὰ ἔχωμεν :

$$I = \iint_{S_2} R(x,y,z) \text{συνγ} ds + \iint_{S_1} R(x,y,z) \text{συνγ} ds + \iint_{S_3} R(x,y,z) \text{συνγ} ds = \iint_S R(x,y,z) \text{συνγ} ds \quad (4)$$

$$\text{Ὅθεν,} \quad \iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R(x,y,z) \text{συνγ} ds \quad (5).$$

Ἐν τῇς ἀνωτέρω ἰσοτήτος (5) συνάγομεν ὅτι :

Ἐὰν αἱ συναρτήσεις P, Q, R ὡς καὶ αἱ μερικαὶ παράγωγοι αὐτῶν $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ εἶναι συνεχεῖς εἰς τὸ φραγμένον χωρίον V , τοῦ ὁποῦ τοῦ σύνορον ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓνα πεπερασμένον ἀριθμὸν λείων ἐπιφανειῶν καὶ συνα, συνβ, συνγ

είναι τὰ διευθύνοντα συνημίτονα τοῦ καθέτου ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν S διάνυσμα-
τος \vec{n} , τότε δά ἔχουμεν :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds \quad (6)$$

Ἐκ τῆς (6) προκύπτει ὁ τύπος τοῦ Ostrogradsky, ἥτοι :

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy} \quad (7)$$

Ἐάν θέσωμεν $\vec{F} = (P, Q, R)$ καὶ \vec{n} εἶναι τὸ μοναδιαῖον καθετόν ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν S διάνυσμα, προφανῶς ὁ (7) γράφεται καὶ οὕτως :

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds} \quad (8)$$

Παρατήρησις : Τὸν ἀνωτέρω τύπον τὸν συναντῶμεν συχνά ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν θεώρημα ἀπουλίσσεως ἢ θεώρημα τοῦ Gauss.

Ἐφαρμογαί : 1^η/ Ἐάν S εἶναι μία κλειστὴ καὶ λεία ἐπιφάνεια περιχλείουσα ἓνα ἀπλῶς συνευκτινὸν χωρίον ἔχον ὄγκον V , δείξατε ὅτι :

$$V = \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

Λύσις : Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς ἀπουλίσσεως τοῦ Ostrogradsky ἔχουμεν :

$$\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V 3 dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3V,$$

ἐξ ἧς ἔχομεν τὸ ἀποδεικτέον.

2^η/ Νά υπολογισθῇ τὸ ὀβελήτωμα :

$$I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$$

ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Λύσις : Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς ἀπουλίσσεως ἢ τοῦ τύπου τοῦ Ostro-

gradsky λαμβάνομεν :

$$I = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

όπου V είναι ή σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

Διά τόν υπολογισμόν τού άνωτέρω τριπλού όλουθιρώματος εισάγομεν σφαιρικές συντεταγμένες, ότε έχομεν :

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^a \rho^4 \sin\phi d\rho = \frac{12}{5} \pi a^5.$$

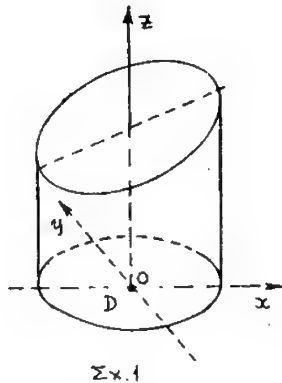
33/ Δίδεται τό χωρίον V περιοριζόμενον υπό της υυλινόριτης έπιφανείας $x^2 + y^2 = 1$ και των έπιπέδων $z=0$ και $z=x+2$. Επί πλέον δίδεται και ή διανυσματική συνάρτησις $\vec{F} = (x^2 + ye^z)\vec{i} + (y^2 + ze^x)\vec{j} + (z^2 + xe^y)\vec{k}$. Δί' έφαρμογής τού θεωρήματος της άπουλίσσεως τού Ostrogradsky νά υπολογισθῇ τό έπιφανειακόν όλουθίωμα $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, ένθα S είναι ή έπιφάνεια ή περιυλείουσα τό χωρίον V .

Λύσις: Είναι $P = x^2 + ye^z$, $Q = y^2 + ze^x$, $R = z^2 + xe^y$ και

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2(x + y + z)$$

Ώθεν, δί' έφαρμογής τού θεωρήματος της άπουλίσσεως έχομεν :

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz \\ &= 2 \iint_D dx dy \int_0^{x+2} (x + y + z) dz \\ &= \iint_D [2(x + y)z + z^2]_0^{x+2} dx dy = \iint_D (3x^2 + 8x + 2xy + 4y + 4) dx dy. \end{aligned}$$



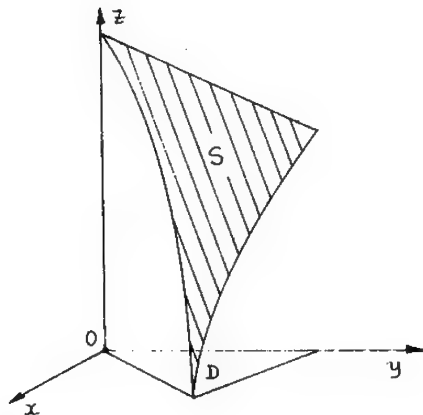
Η έπιφάνεια S υαδώς και τό χωρίον D (υύλινος) δεικνύονται εις τό Σχ.1. Διά τόν υπολογισμόν τού τελευταίου διπλού όλουθιρώματος χρησημοποιούμεν πολικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς, } I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3\rho^2 \sin^2\theta + 8\rho \sin\theta + 2\rho^2 \sin\theta \cos\theta + 4\rho \cos\theta + 4) \rho d\rho d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta + 8 \int_0^{2\pi} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta + 4 \int_0^{2\pi} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + 4 \int_0^{2\pi} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{19}{4} \pi. \end{aligned}$$

Συμπληρώματα και άσκησεις:

1. Υπολογίστε το έμβαδόν της επιφάνειας του τμήματος του παραβολοειδούς $2z = x^2 + y^2$, το όποιον εύρισκεται έξωτεριώς του υάνου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Θεωρούμεν την επιφάνειαν S την έχουσα εξίσωσιν: $z = 2 - x^2 - y^2$, όπου τά (x, y) μεταβάλλονται εις τό τρίγωνον D , τό όποιον όρίζεται υπό των εύθειών: $x=0, y=1, y=x$. Νά υπολογισθῇ τό έμβαδόν της επιφάνειας S (βλ. έναντι σχήμα).



3. Νά εύρεθῇ τό έμβαδόν του τμήματος της επιφάνειας της σφαίρας $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ τό περιεχόμενον εις τό παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

4. Υπολογίστε τό επιφανειακόν όλουλήρωμα:

$$\iint_S z \left(\frac{x \sin \alpha}{a^2} + \frac{y \sin \beta}{b^2} + \frac{z \sin \gamma}{c^2} \right) ds$$

εις την άνω επιφάνειαν του έλλειψοειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$, όπου η επιφάνεια S έχει τόν θετικόν προσανατολισμόν.

5. Έάν P είναι ή απόστασις του κέντρου του έλλειψοειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ από τό έφαπτόμενον επίπεδον αυτού εις τό σημείον $P(x, y, z)$ και ds τό στοιχειώδες έμβαδόν περίξ του σημείου P της επιφάνειας S του έλλειψοειδούς τότε δείξατε ότι:

$$i) \oint_S P ds = 4 \pi abc, \quad ii) \oint_S \frac{1}{P} ds = \frac{4\pi}{3abc} (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2).$$

6. Νά υπολογισθῇ τό όλουλήρωμα $\oint_S H ds$ λαμβανόμενον επί της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας μέ κέντρον την άρχήν των άξόνων, όπου είναι

$$H = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 3a_4 x^2 y^2 + 3a_5 y^2 z^2 + 3a_6 x^2 z^2.$$

7. Νά υπολογισθούν αί συντεταγμέναι του κέντρου βάρους του τμήματος της σφαιρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ τεμνομένης υπό του επιπέδου $z = h$.
(Απάντ. $(0, 0, \frac{R+h}{2})$).

8. Νά υπολογισθούν αί συντεταγμέναι του κέντρου βάρους όμογενούς τμήματος της επιφάνειας $3z = 2(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})$ που περιυλίζεται από τὰ επιπεδα $x=0, y=0, x+y=1$.

9. Νά εύρεθῇ ἡ ροπή αδρανείας του χωρίου του όμογενούς παραβολοειδούς ἐκ περιστροφῆς $x^2 + y^2 = 2xz$, τὸ ὁποῖον τέμνεται υπό του επιπέδου $z=y$, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα oz .

10. Νά υπολογισθῇ τὸ επιφανειακὸν ὁλοκληρώμα $\iint_S \frac{cdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-\frac{1}{2})^2}}$, ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαῖρας $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a \neq \frac{1}{2}$ καὶ $c = \text{σταθερά}$.
(ΑΕΙΔΕΙ νά σημειωθῇ ὅτι τὸ ἄνωτέρω ὁλοκληρώμα παριστᾷ τὸ δυναμικὸν εἰς τὸ σημεῖο $(0, 0, \frac{1}{2})$, ὅταν εἰς τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν ἔχουν κατανεμηθῇ φορτία μέ σταθερά πυκνότητα $\delta = c$).

11. Νά υπολογισθῇ τὸ ὁλοκληρώμα: $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$, ἐπὶ του τμήματος τῆς επιπέδου επιφάνειας $S: \varphi(x, y, z) = 2x + 2y + z - 6 = 0, x, y, z \geq 0$, ὅπου εἶναι: $\vec{F} = xyz\mathbf{i} - x^2z\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$.

12. Υπολογίσατε τὸ επιφανειακὸν ὁλοκληρώμα $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$, ὅπου $\vec{F} = (x+1)\mathbf{i} - (2y+1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ καὶ S εἶναι τὸ τρίγωνο μέ κορυφές $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), \Gamma(0, 0, 1)$ καὶ τὸ \vec{n} ἔχει φορὰ τέτοια, ὥστε νά ἀπομακρύνεται τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων (Απ: 0).

13. Υπολογίσατε τὸ επιφανειακὸν ὁλοκληρώμα $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$, ὅπου $\vec{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ καὶ S εἶναι τὸ τμήμα του παραβολοειδούς $2z = x^2 + y^2$, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐσωτερικῶς του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2x$, προσανατολισμένον ἐν τῶν ἑξῶ πρὸς τὰ ἔξω (δηλ. ἐν προκειμένῳ $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$).

14. Υπολογίσατε τὸ επιφανειακὸν ὁλοκληρώμα $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$, ὅπου $\vec{F} = y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ καὶ S εἶναι τὸ τμήμα τῆς επιφάνειας του κυλίνδρου $y^2 = 1 - x$ μεταξὺ τῶν επιπέδων $z=0$ καὶ $z=x$, $x \geq 0$, μέ $\vec{n} \cdot \vec{i} > 0$. (Απ: $\frac{4}{15}$).

15. Έπαληθεύσατε το θεώρημα του Stokes διά την συνάρτησιν $\vec{F} = (zx-y)i - yzj - y^2zk$, όπου S είναι το άνω μέρος της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ και Γ το σύνορον αυτού.

16. Έπαληθεύσατε το θεώρημα του Stokes διά την συνάρτησιν $\vec{F} = y \cdot i + z \cdot j + x \cdot k$, όπου S είναι το τμήμα της επιφανείας του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ μεταξύ των επιπέδων $z=0$ και $z=x+2$, προσανατολισμένο έυ των έξω προς τα έξω.

17. Έπαληθεύσατε το θεώρημα του Stokes διά την συνάρτησιν $\vec{F} = z \cdot i + x \cdot j + y \cdot k$, όταν ως επιφάνεια S ληφθή το τετράγωνον κέντρου $(0,0,1)$ και πλευράς παραλλήλους προς τους άξονας O_x, O_y μήκους 2, ακμπύλη δέ Γ ή περίμετρος του έν λόγω τετραγώνου μέ φοράν διαγραφής της Γ ή δεξιμή.

18. Δι έφαρμογής του τύπου του Stokes υπολογίσατε το έπι ακμπύλιον όλουλήρωμα $\oint_{\Gamma} xydx + y^2dy + zdz$ επί της περιφερείας Γ , ή όποία άπουόπεται από την επιφάνειαν S του έυ περιστροφής παραβολοειδούς: $2-z=x^2+y^2$ υπό του έπιπέδου $z=1$.

19. Έπαληθεύσατε το θεώρημα άπουλίσεως ή θεώρημα των Ostrogradsky-Gauss λαμβάνοντες ως διανυσματιμή συνάρτησιν την $\vec{F} = 4xi - 3y^2j + z^2k$ και ως τρισδιάστατον χωρίον V το όριδόμενον υπό των επιφανειών: $x^2+y^2=4, z=0$ και $z=3$.

20. Έπαληθεύσατε το θεώρημα άπουλίσεως λαμβάνοντες ως διανυσματιμή συνάρτησιν την:

$$\vec{F} = yxi + y^2j - \frac{z^2}{2}k$$

και ως χωρίον V το σφαιριών $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

21. Έπαληθεύσατε το θεώρημα άπουλίσεως διά την συνάρτησιν $\vec{F} = 3xi - 2yj + z \cdot k$, όπου V είναι το χωρίον το όποϊον φράσσεται υπό των επιφανειών:

$$x^2+z^2=4, y=0, x+y+z=3.$$

22. Διά χρησιμοποίησης του θεωρήματος άπουλίσσεως υπολογίσατε τó επιφανεια-
υόν όλουλήρωμα $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$, όπου $\vec{F} = x^3 \vec{i} + y^3 \vec{j} + z \vec{k}$ και S είναι ή επιφάνεια ήτις
φράσσεται υπό τών $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = x + 2$.

23. Μέ τήν βοήθειαν του θεωρήματος άπουλίσσεως νά υπολογισθῇ τó επιφανειαυόν
όλουλήρωμα :

$$\iint_S y \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy,$$

όπου S είναι ή επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = a^2$ μέ $-h \leq z \leq h$.

24. Μέ τήν βοήθειαν του θεωρήματος άπουλίσσεως νά υπολογισθῇ τó επιφανεια-
υόν όλουλήρωμα :

$$\iint_S x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$$

όπου S είναι ή επιφάνεια τῆς σφαίρας: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ προσανα-
τολισμένη ἐν τών ἔσω πρὸς τά ἔξω.

25. Υπολογίσατε τά κατωθι επιφανειαυά όλουληρώματα :

i) $\iint_S dy \, dz + dz \, dx + dx \, dy$, όπου S είναι τó ήμισφαίριον: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}, x^2+y^2 \leq 1$,

προσανατολισμένο ἐν τών ἔσω πρὸς τά ἔξω.

ii) $\iint_S (x \sin u - y \sin v + z \sin \gamma) \, ds$, όπου S ή ανωτέρω επιφάνεια του ήμισφαίριου.

iii) $\iint_S x^2 z \, ds$, όπου S είναι ή κυλινδρική επιφάνεια: $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$.

26. Υπολογίσατε τά επιφανειαυά όλουληρώματα τῆς άσυ. 25, μέ τήν βοήθειαν τών
παραμετριοῶν παραστάσεων αντίστοιχως.

i) $x = \eta \mu \mu \sin \nu, y = \eta \mu \mu \eta \mu \nu, z = \sin \nu$.

ii) ὁμοίως, ὡς εἰς (i).

(iii) $x = \sin u, y = \eta \mu u, z = u$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ - ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΔΙΩΝ

§1. ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Ι. Ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου. Καλοῦμεν πεδίου μία περιοχὴν τοῦ χώρου ἐντὸς τῆς ὁποίας ἔχει κατανεμηθῇ ἓνα φυσικὸν μέγεθος εἰς τρόπον, ὥστε εἰς καθεστὸν σημείου τῆς περιοχῆς τοῦ χώρου νὰ ἀντιστοιχῇ μία τιμὴ τοῦ μεγέθους τούτου.

Ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου εἶναι ἡ βάσις διὰ διαφόρους ἐννοίας τῆς εὐυχρόνου φυσικῆς. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ διαπραγματευθῶμε στοιχεῖα τῆς μαθηματικῆς θεωρίας, ἥτις ἐφαρμόζεται εἰς τὴν μελέτην τῶν φυσικῶν πεδίων. Εἰς τὴν Μηχανικὴν, εἰς τὴν Ἠλεκτρολογία, εἰς τὴν Ὑδροδυναμικὴν καὶ ἄλλαχού συνήθως ἀσχολούμεθα μὲ ποσότητας δύο βασικῶν τύπων, δηλαδὴ βαθμωτῆς καὶ διανυσματικῆς. Ἀντιστοίχως θὰ θεωρῶμεν δύο τύπους πεδίων: τὰ βαθμωτά καὶ τὰ διανυσματικὰ πεδία.

α) Βαθμωτόν καλεῖται τὸ πεδίου ὅταν εἰς καθεστὸν σημείου τοῦ $M(x, y, z)$ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ $f(M)$ ἑνὸς βαθμωτοῦ μεγέθους. Ἡ πραγματικὴ συνάρτησις f καλεῖται τότε βαθμωτὴ συνάρτησις, ἄλλως βαθμωτόν πεδίου καὶ γράφουμεν:

$$f(M) = f(x, y, z) \quad (1)$$

Εἰς τὰ ἐπόμενα ἡ συνάρτησις (1) θὰ θεωρῇται συνεχὴς καὶ θὰ ἔχῃ συνεχεῖς μεριὰς παραγώρους πρώτης τάξεως ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς x, y, z .

Βαθμωτὰ πεδία συναντοῦμε συχνά εἰς τὰς διαφόρους ἐφαρμογὰς τῶν μαθηματικῶν εἰς τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας καὶ τὴν τεχνολογίαν. Ὅταν, π.χ., εἰς καθεστὸν σημείου M τῆς ἀτμοσφαίρας ἀντιστοιχίζωμεν ἓναν πραγματικὸν ἀριθμὸν $f(M)$, ὅστις παριστὰ τὴν θερμοκρασίαν εἰς τὸ σημείου M , τότε ἡ οὕτως ὀρισμένη συνάρτησις f εἶναι ἓνα βαθμωτόν πεδίου. Ὁμοίως βαθμωτόν εἶναι τὸ πεδίου τὸ καθορίζον τὴν πυκνότητα $\delta = \delta(x, y, z)$ εἰς τὰ διάφορα σημεία ἑνὸς σώματος.

Ὁ προσδιορισμὸς ἑνὸς βαθμωτοῦ πεδίου ὡς πρὸς ἓνα σταθερὸν σύστημα συντεταγμένων καὶ ἡ ἀντίστοιχος συνάρτησις $f(x, y, z)$ δὲν εἶναι πάντοτε ἱκανὰ διὰ τὴν μελέτην τοῦ πεδίου. Διὰ νὰ ἔχουμε μίαν περισσότερο πλήρη περιγραφὴν τῆς δομῆς τοῦ πεδίου, χρησιμοποιοῦμε τὰς καλουμένας ισοβαρεῖς ἢ ισοσταθμικὰς

ἐπιφανείας.

Καλούμεν *ισοβαρή* ἢ *ισοσταθμιυήν ἐπιφάνειαν* ἑνός βαθμωτοῦ πεδίου $f(M)$ τὸ σύνολον τῶν σημείων $M(x,y,z)$ τοῦ χώρου εἰς τὰ ὅποια ἡ f λαμβάνει σταθεράν τιμὴν ἴσυν μὲ C . Τὸ ἐν λόγῳ σύνολον εἶναι μία ἐπιφάνεια μὲ εἰσώσιν :

$$f(x,y,z) = C \quad (2)$$

Ἐάν ἡ τιμὴ $f(x,y,z)$ τῆς f εἶναι ἡ θερμοκρασία εἰς τὸ σημεῖον $M(x,y,z)$, τότε αἱ ἰσοσταθμιυαὶ ἐπιφάνειαι ἀντιστοιχοῦσαι εἰς διαφόρους τιμὰς τῆς σταθερᾶς C λέγονται *ισόθερμοι ἐπιφάνειαι*.

Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἰσοσταθμιυαὶ ἐπιφάνειαι (2), αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ὅλας τὰς δυνατός τιμὰς τοῦ C πληροῦν ὅλον τὸν χώρον εἰς τὸν ὅποιον ὀρίζεται τὸ βαθμωτόν πεδίον καὶ ὅτι δύο ἐπιφάνειαι: $f_1(x,y,z) = C_1$ καὶ $f_2(x,y,z) = C_2$ δὲν ἔχουν κοινὰ σημεία, ὅταν $C_1 \neq C_2$.

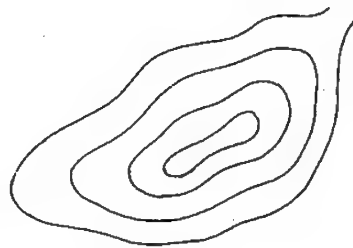
Ὁ προσδιορισμός ὅλων τῶν ἰσοσταθμιυῶν ἐπιφανειῶν καὶ οἱ ἀντιστοιχοὶ τιμαὶ τοῦ C μᾶς παρέχουν μίαν πλήρη περιγραφὴν τῆς δομῆς τοῦ πεδίου. Αὕτῃ ἡ μέθοδος παρουσιάσεως τοῦ πεδίου εἶναι εἰδιωῶς κατάλληλη ὅταν τὸ πεδίον ὀρίζεται ὑπὸ μιᾶς διαφορίσιμου συναρτήσεως δύο μεταβλητῶν $f(x,y)$ μὲ τιμὰς πραγματιυές. Τὸ σύνολον τῶν σημείων (x,y) μὲ:

$$f(x,y) = C \quad (3)$$

παριστᾷ μία μονοπαραμετριυήν οἰομένην γραμμῶν, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *ισοβαρεῖς* ἢ *ισοσταθμιυαὶ γραμμαὶ* τοῦ πεδίου.

Εἶναι φανερόν ὅτι μία ἰσοσταθμιυή γραμμὴ εἶναι *προβολή* τῆς τομῆς τῆς ἐπιφανείας $z=f(x,y)$ καὶ τοῦ ἐπιπέδου $z=C$ ἐπὶ τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου Oxy .

Αἱ ἰσοσταθμιυαὶ γραμμαὶ ἐφαρμοδονται εὐρέως εἰς τὴν χαρτογραφίαν διὰ τὴν παράστασιν τοῦ ἀναγλύφου τῆς Γῆς. Οὕτω διὰ νὰ δείξωμεν τὸ ὕψος εἰς εἰς ἓνα τοπογραφιυόν χάρτην φέρομεν "περιμετριυάς," γραμμὰς (βλ. Σχ.1), τὰ σημεία τῶν ὁποίων ἔχουν τὸ αὐτὸ ὑψόμετρον.

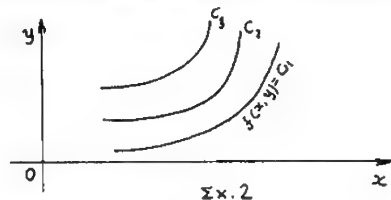


Σχ. 1

Ἐάν ἡ $f(x,y)$ παριστᾷ τὴν θερμοκρασίαν εἰς τὸ σημεῖον $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου

τότε αί ισοσταθμιαί γραμμαί υαλούνται ισόθερμοι γραμμαί (βλ. Σχ. 2).

Εάν θεωρήσωμεν τήν ομορρένειαν τών ισοσταθμιωών επιφανειών $f(x,y,z)=C$, αντιστ. ισοσταθμιωών γραμμωών $f(x,y)=C$, τότε ἐξ ἐυα-
στου σημείου $M_0(x_0,y_0,z_0)$ τοῦ χώρου, αντιστοιχως $M_0(x_0,y_0)$ τοῦ επιπέδου, διέρχεται μία ισοσταθμιωή επιφάνεια, αντιστοιχως γραμμή ἥτις ἔχει, προφανως, τήν ἐξίσω-
σιν: $f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$, αντιστοιχως τήν: $f(x,y)=f(x_0,y_0)$.



6) Διανυσματιόν υαλείται τό πεδίον, όταν εἰς υάδε σημείον τοῦ $M(x,y,z)$ αντιστοιχῇ ἡ τιμή $\vec{F}(M)$ ἑνός διανυσματιοῦ μερέδους. Ἡ διανυσματιωή συνάρτησις:

$$\vec{F}(M) \equiv \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z) \cdot \vec{i} + Q(x,y,z) \cdot \vec{j} + R(x,y,z) \cdot \vec{k} \quad (4)$$

ὠρισμένη διὰ υάδε σημείον $M(x,y,z)$ τοῦ πεδίου, υαλείται υαί διανυσματιόν πεδίον.

Συχνά εἶναι ἀναγκαῖον νά θεωροῦμεν διανυσματιωά πεδία τὰ ὁποῖα μεταβάλλονται ὡς πρὸς μίαν παράμετρον, ὡς π.χ. ὁ χρόνος t . Εἰς αὐτάς τὰς περιπτώσεις γράφομεν:

$$\vec{F} = \vec{F}(M,t) \quad (5)$$

Ἐνα χαρακτηριστιόν παράδειγμα διανυσματιοῦ πεδίου εἶναι τό πεδίον τών ταχυτήτων τών μορίων ἑνός ρευστοῦ: Ἐστω D ἕνας τόπος ροῆς ἑνός ρευστοῦ μέ ταχύτητα \vec{v} , ἥτις εἶναι ἀνεξάρτητος μὲν τοῦ χρόνου, ἀλλὰ δει ὁμας διεύθυνσιν ἀπό σημείο εἰς σημείον. Εάν εἰς υάδε σημείον $M \in D$ αντιστοιχίσωμεν τό διάνυσμα $\vec{v} = \vec{v}(M)$ φθάνομεν εἰς ἕνα διανυσματιόν πεδίον, τό ὁποῖον εἶναι τό πεδίον τών ταχυτήτων τών μορίων ἑνός ρευστοῦ. Γενιωότερον δυνάμεθα νά μελετήσωμεν τήν κίνησιν ἑνός ρευστοῦ ὅταν σέ υάδε χρονιωή στιγμή t γνωρίσωμεν τό πεδίον $\vec{v}(M)$ τών ταχυτήτων τών υἱδιωών σημείων ἀπό τὰ ὁποῖα συνίσταται τό ρευστόν, ἥτοι ἔχομεν τό διανυσμ. πεδίον:

$$\vec{v} = \vec{v}(M,t), t = \text{χρόνος}$$

Όταν τό πεδίον τών ταχυτήτων δέν μεταβάλλεται μετὰ τοῦ χρόνου t , ἡ κίνησις τοῦ ρευστοῦ υαλείται μόνιμη.

Ἄλλα χαρακτηριστιωά παραδείγματα διανυσματιωών πεδίων εἶναι τὰ αὐόλουδα: Τό πεδίον τών πιέσεων ἐπὶ τών σημείων μιās επιφανείας εὑρισμομένης ἐντὸς ρευστοῦ. Τό

πεδίων της ηλεκτρικής έντασης: $\vec{E} = \vec{E}(M, t)$ και το πεδίο της μαγνητικής έντασης: $\vec{H} = \vec{H}(M, t)$ είναι επίσης διανυσματικά πεδία. Τα δύο τελευταία, όταν δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο t , λέγονται το μὲν πρώτο ηλεκτροστατιονόν, το δὲ δεύτερον μαγνητοστατιονόν πεδίων.

Γραμμαὶ διευδύνσεως καὶ διανυσματικαὶ ἐπιφάνειαι. Ἐστω $\vec{F}(M)$ ἓνα διανυσματικόν πεδίων. Μία καμπύλη (γ) κειμένη εἰς τὸν χώρον \mathcal{D} θὰ καλεῖται γραμμὴ διευδύνσεως τοῦ πεδίου, ἄλλως διανυσματικὴ γραμμὴ, ἂν εἰς ἕναστον σημεῖον M αὐτῆς τὸ διάνυσμα $\vec{F}(M)$ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς καμπύλης.

Αἱ γραμμαὶ διευδύνσεως τοῦ πεδίου:

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x, y, z) \cdot \vec{i} + Q(x, y, z) \cdot \vec{j} + R(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

εἶναι λύσεις τῆς διανυσματικῆς διαφορικῆς ἑξισώσεως:

$$\vec{F} \times d\vec{r} = 0 \quad (6)$$

ὅπου $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ εἶναι τὸ διάνυσμα θέσεως τοῦ τυχόντος σημείου τῆς καμπύλης. Ἡ ἀνωτέρω ἑξίσωσις (6), ἂν $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ εἶναι αἱ παραμετρικαὶ ἑξισώσεις μιᾶς γραμμῆς διευδύνσεως, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (7)$$

$$\text{ἢ} \quad \begin{cases} y'(x) = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \\ z'(x) = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \end{cases}, \quad \text{ὅπου } P(x, y, z) \neq 0 \quad (7')$$

δύο διαφορικῶν ἑξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους συναρτήσεις: τὰς δύο συντεταγμένας y, z λαμβανομένας ὡς συναρτήσεις τῆς τρίτης x .

Αἱ γραμμαὶ διευδύνσεως εἶναι ὅθεν αἱ ὁλοκληρωτικαὶ γραμμαὶ αὐτοῦ τοῦ συστήματος.

Ὅταν τὸ διανυσματικόν πεδίων εἶναι τὸ πεδίο τῶν ταχυτήτων μιᾶς μονίμου κινήσεως ρευστοῦ, τότε αἱ γραμμαὶ διευδύνσεως λέγονται ρευματικαὶ γραμμαὶ, καθόσον συμπίπτουν μὲ τὰς τροχιάς ποὺ διαγράφουν τὰ μόρια τοῦ ὑγροῦ.

Εἰς τὸ ηλεκτροστατιονόν καὶ εἰς τὸ μαγνητοστατιονόν πεδίων αἱ γραμμαὶ διευδύνσεως λέγονται δυναμικαὶ γραμμαὶ.

Μία ἐπιφάνεια (E) παραγομένη ὑπὸ γραμμῶν διευδύνσεως ἑνὸς διανυσματικοῦ πε-

δίου $\vec{F} = \vec{F}(M)$ υαλείται διανυσματική επιφάνεια. Προφανώς εις υάθε σημείον τής διανυσμ. επιφανείας (E) ή υάθετος επί τήν επιφάνειαν είναι όρθογώνιος πρός τό διάνυσμα \vec{F} εις τό έν λόγω σημείον.

Έάν $f(x,y,z) = C_1$, $g(x,y,z) = C_2$ (C_1, C_2 = σταθεραί) είναι λύσεις του συστήματος (7) ή (7'), τότε ή εείσωσις :

$$\Rightarrow \Phi(f,g) = 0 \quad (8)$$

παριστᾷ μίαν διανυσματικήν επιφάνειαν του πεδίου $\vec{F}(M)$.

• Εις τά προβλήματα φυσικής που αναφέρονται είτε σε βαθμωτά είτε σε διανυσματικά πεδία, έχει μεγάλην σπουδαιότητα τό νά γνωρίζωμεν τόν τρόπον μέ τόν όποιον μεταβάλλεται τό πεδίο όταν μεταβαίνωμεν από ένα σημείον εις ένα άλλο. Εις τήν περίπτωση τής μιᾶς διαστάσεως, τούτο τό γνωρίζομεν από τας μεταβολάς τής παραγώγου, διά γενιωτέρα όμως πεδία χρησιμοποιούμε τας μεριυάς παραγώγους.

Είναι φανερόν ότι όταν σχηματίζωμεν μίαν μεριυήν παράγωγον, θεωρούμεν τό πεδίο ως συνάρτησιν μιᾶς μόνον μεταβλητῆς, μέ σταθεράς τας ἄλλας μεταβλητάς. Κάθε μεριυή παράγωγος, συνεπώς, παριστᾷ τόν συντελεστήν μεταβολῆς του πεδίου κατᾷ τήν διεύθυνσιν του ἀντιστοίχου πρός τήν μεταβλητήν αὐτήν ἄξονα συντεταγμένων. Είναι όμως περισσότερον φυσικόν νά ζητήσωμεν νά εὕρωμεν μίαν εὐρυτέραν ἔννοιαν τής παραγώγου, τοιαύτην ὥστε: ἀντί νά μᾶς περιορίσῃ εις τας εἰδικᾶς μόνον διευθύνσεις τῶν ἁξόνων, νά μᾶς παρέχῃ τήν δυνατότητα τής μελέτης τής συμπεριφορᾶς του πεδίου πρός $\mu \alpha \theta \epsilon$ διεύθυνσιν. Τόν συοπόν αὐτόν ἐυηηρετεῖ ή παράγωγος, τήν όποίαν θά εἰσαγάγωμεν εις τήν παράγραφον 3 του παρόντος κεφαλαίου.

• Παραδείγματα: 1^{ος}/ Νά εὕρεθούνη αἱ γραμμαὶ διευθύνσεως του διανυσματιου πεδίου:

$$\vec{F}(x,y,z) = -4yz \cdot i - x \cdot j + 4xy \cdot k.$$

Λύσις: Έχομεν $P(x,y,z) = -4yz$, $Q(x,y,z) = -x$, $R(x,y,z) = 4xy$ καὶ ἐπομένως αἱ γραμμαὶ διευθύνσεως του δοθέντος πεδίου θά είναι αἱ ὁλοκληρωτικαὶ γραμμαὶ του συστήματος:

$$\frac{dx}{-4yz} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{4xy}$$

Έυ του ἄνωτέρω συστήματος ἔχομεν: $xdx + zdz = 0$, $4ydy + dz = 0$,

ὁλοκληρώνοντες εὐρίσκωμεν τας ἐξισώσεις: $x^2 + z^2 = C_1$, $2y^2 + z = C_2$.

2^{ος}/ Νά προσδιορισθούνη αἱ γραμμαὶ διευθύνσεως του πεδίου:

$$\vec{F}(x,y,z) = yz \cdot i + zx \cdot j + xy \cdot k.$$

Λύσις: κατά τόν τύπον (7) ἔχομεν:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy} \implies \begin{cases} xdx - ydy = 0 \\ ydy - zdz = 0. \end{cases}$$

Δι'όλουληρώσεως αὐτῶν ἔχομεν: $x^2 - y^2 = C_1$, $y^2 - z^2 = C_2$.

Αἰγραμμάι διευθύνσεως εἶναι αἱ τομαί τῶν δύο αὐτῶν κυλινδρῶν ἐπιφανειῶν.

II. Ὁρισμός τοῦ ἐσωτερίου καί ἑξωτερικοῦ γινομένου δύο διανυσματικῶν συναρτήσεων.

Ἐστωσαν αἱ διανυσματικαί συναρτήσεις:

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ καί } g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ὅπου U εἶναι ἓν ἀνοιχτόν ὑποσύνολον τοῦ \mathbb{R}^3 .

Δυνάμεθα νά ὀρίσωμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ καί } f \times g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ὡς ἑξῆς:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ καί } (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \text{ διὰ καθε } x \in U.$$

Σημειωτέον ὅτι ἡ $f \cdot g$ (ἐσωτεριον γινόμενον τῶν συναρτήσεων) εἶναι μία ἀπειρίσιν τοῦ U ἐντός τῆς πραγματικῆς εὐθείας, ἐνῶ ἡ $f \times g$ (ἐξωτερικόν γινόμενον τῶν συναρτήσεων) εἶναι μία ἀπειρίσιν τοῦ U ἐντός τοῦ χώρου \mathbb{R}^3 .

Ἀναλόγως ὀρίσμεν καί τὰ ἑξῆς: Ἐάν

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ καί } f: U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

τότε παριστοῦμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\varphi \cdot f$ ἢ $f \cdot \varphi$ τήν διανυσματικὴν συνάρτησιν, ἥτις ὀρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$(\varphi \cdot f)(x) = \varphi(x) \cdot f(x) \text{ διὰ καθε } x \in U.$$

§2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$)

Ἐστω μία διανυσματικὴ συνάρτησις $f(t)$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, ὅπου I ἓν διάστημα, ἥτις λαμβάνει τιμὰς ἐν \mathbb{R}^3 , ἥτοι $f(t) \in \mathbb{R}^3$. Διὰ καθε $t \in I$ ἔχομεν:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)),$$

ὅπου f_1, f_2, \dots, f_p εἶναι αἱ συντεταγμέναι συναρτήσεις τῆς f (§2, κεφ. II).

Ἐστω ἓν σημεῖον $t_0 \in I$ ὀρίσμεν τὴν κατωθι συνάρτησιν:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \dots, \frac{f_p(t) - f_p(t_0)}{t - t_0} \right), t \in I - \{t_0\}.$$

δίδομεν τώρα τὸν κατωθι ὀρισμόν:

Όρισμός XIII-2-1 Καλούμεν (πρώτην) παράγωγον της συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον $t_0 \in I$ καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲν:

$$f'(t_0) \text{ εἴτε μὲ } \frac{df(t_0)}{dt}$$

τὴν κατωδί, ἂν ὑπάρξη, ὀρισμένη τιμὴν:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

ἢτοι:

$$f'(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ὀριστὴ τιμὴ ὑπάρχει, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρξη ἡ ὀριστὴ τιμὴ: $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} = \frac{df_i(t_0)}{dt} \quad \forall i=1,2,\dots,p$, ἰσχύει δὲ:

$$f'(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt} = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_p(t_0)) = \left(\frac{df_1(t_0)}{dt}, \frac{df_2(t_0)}{dt}, \dots, \frac{df_p(t_0)}{dt} \right).$$

Ἐὰν ἡ παράγωγος $\frac{df(t)}{dt}$ ὑπάρξη $\forall t \in I$, τότε ὁρίζεται μία συνάρτησις $\frac{df(t)}{dt}$, $t \in I$, ἡ ὁποία καλεῖται ἡ πρώτη παράγωγος τῆς f ἐν I .

Ἡ παράγωγος τῆς ὡς ἄνω διανυσματικῆς συναρτήσεως $f'(t)$, $t \in I$, ἂν ὑπάρξη, καλεῖται: ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς f ἐν I καὶ συμβολίζεται μὲ $f''(t)$ εἴτε μὲ $\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$. Ἀὕτη ὑπάρχει, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρξη ἡ $\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} \quad \forall i=1,2,\dots,p$ καὶ $\forall t \in I$, ἰσχύει δὲ:

$$f''(t) = (f''_1(t), f''_2(t), \dots, f''_p(t)).$$

Διὰ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἔχομεν:

$$f^{(n)}(t) = (f^{(n)}_1(t), f^{(n)}_2(t), \dots, f^{(n)}_p(t))$$

Παραδείγματα: 1^α/ Νά υπολογισθῇ ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $f(t) = (\sin t, \eta \mu t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Λύσις: Ἔχομεν:

$$f'(t) = (-\eta \mu t, \sin t, 1) \text{ καὶ } f''(t) = (-\cos t, -\eta \mu t, 0).$$

2^α/ Νά υπολογισθῇ ἡ πρώτη καὶ δευτέρα παράγωγος τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $f(t) = (\eta \mu t \sin t, \sin^2 t, \eta \mu t)$ καὶ ἀποδείξωμεν νὰ δειχθῇ ὅτι: $f(t) \cdot f'(t) = 0$.

Λύσις: Ἔχομεν μετὰ τὰς παραγωγίσεις:

$$f'(t) = (\sin 2t, -\eta \mu 2t, \sin t), \quad f''(t) = (2\cos 2t, -2\eta \mu 2t, \cos t).$$

ὥς γνωστόν, ἐάν $F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ καὶ $G = (g_1, g_2, \dots, g_p)$, ἰσχύει :

$$F \cdot G = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \dots + f_p \cdot g_p$$

ὁθεν : $f \cdot f' = (\eta\mu\tau\sigma\upsilon\nu\tau, \sigma\upsilon\nu^2\tau, \eta\mu\tau) \cdot (\sigma\upsilon\nu 2\tau, -\eta\mu 2\tau, \sigma\upsilon\nu\tau)$

$$= \dots = \eta\mu\tau\sigma\upsilon\nu\tau(-\eta\mu^2\tau - \sigma\upsilon\nu^2\tau) + \eta\mu\tau \cdot \sigma\upsilon\nu\tau = 0.$$

Οἱ βασικοὶ κανόνες παραγωγίσεως διανυσματικῶν συναρτήσεων πραγματικῆς μεταβλητῆς καθιερῶνται ἀπὸ τὰς κατωθι προτάσεις :

Πρόταση XIII - 2-1. Ἐὰν $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ καὶ $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ εἶναι δύο παραγωγίσιμοι διανυσματικαὶ συναρτήσεις ὁρισμέναι εἰς ἓν διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ καὶ $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ εἶναι μία παραγωγίσιμος πραγματικὴ συνάρτησις, τότε διὰ καθε $t \in I$ ἰσχύει :

$$\text{i)} \quad \frac{d}{dt} (f \pm g) = \frac{df}{dt} \pm \frac{dg}{dt}, \quad \text{ii)} \quad \frac{d}{dt} (q \cdot f) = q \frac{df}{dt} + \frac{dq}{dt} \cdot f$$

$$\text{iii)} \quad \frac{d}{dt} (f \cdot g) = f \frac{dg}{dt} + g \frac{df}{dt}.$$

Ἀπόδειξις. i) Ἡ ἀπόδειξις ὡς ἀνήλθι παραλείπεται.

Αἱ ii) καὶ iii) ἔχουν τὸν τύπον τοῦ γινομένου, ἂν καὶ ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι διαφορετικὸς εἰς καθε περίπτωσιν. Ἐφ' ὅσον ἡ μέθοδος τῆς ἀποδείξεως εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια εἰς καθε περίπτωσιν, θὰ ἀποδείξωμεν μόνον τὴν iii).

ὥς γνωστόν ἰσχύει :

$$f \cdot g = f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \dots + f_p \cdot g_p = \sum_{i=1}^p f_i \cdot g_i,$$

ὅτε ἔχομεν :

$$\frac{d}{dt} (f \cdot g) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^p f_i \cdot g_i \right) = \sum_{i=1}^p f_i \frac{dg_i}{dt} + \sum_{i=1}^p g_i \frac{df_i}{dt} = f \frac{dg}{dt} + g \frac{df}{dt}.$$

Πρόταση XIII - 2-2. Ἐὰν $f = (f_1, f_2, f_3)$ καὶ $g = (g_1, g_2, g_3)$ εἶναι δύο παραγωγίσιμοι διανυσματικαὶ συναρτήσεις ὁρισμέναι εἰς ἓν διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, τότε διὰ καθε $t \in I$ ἰσχύει :

$$\frac{d}{dt} (f \times g) = f \times \frac{dg}{dt} + \frac{df}{dt} \times g$$

Ἀπόδειξις: Ἐφ' ὅσον αἱ $f(t)$ καὶ $g(t)$ εἶναι παραγωγίσιμοι διανυσματικαὶ συναρτήσεις, αὗται θὰ εἶναι καὶ συνεχεῖς (διὰ τὴν;) καὶ συνεπῶς θὰ ἰσχύη :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) = f(t), \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(t+h) = g(t).$$

Έστωσαν ἥδη t καὶ $t+h$ δύο σημεία τοῦ I , τότε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου (βλ. ὁρισμὸν XIII - 2-1) ἔχομεν:

$$\frac{d}{dt}(f(t) \times g(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) \times g(t+h) - f(t) \times g(t)}{h} \quad (1)$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς, ἀν ἀποθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$0 = -f(t+h) \times g(t) + f(t+h) \times g(t) :$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(t) \times g(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) \times g(t+h) - f(t+h) \times g(t) + f(t+h) \times g(t) - f(t) \times g(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(t+h) \times \frac{g(t+h) - g(t)}{h} + \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \times g(t) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(t+h) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \times g(t) \\ &= f(t) \times \frac{dg(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt} \times g(t), \text{ διὰ πάθε } t \in I. \end{aligned}$$

Παράδειγματα: 1^η. Ἐάν $f(t) = (t, t^2, 2t)$, $g(t) = (1+t^2, 2-t, 3)$ καὶ $q(t) = t^2$, $t \in \mathbb{C} \mathbb{R}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι:

$$i) \frac{d}{dt}(\varphi \cdot f), \quad ii) \frac{d}{dt}(f \cdot g), \quad iii) \frac{d}{dt}(f \times g).$$

Λύσις: i) Ἐχομεν, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν XIII - 2-1:

$$\frac{d}{dt}(\varphi \cdot f) = \varphi \frac{df}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot f = (3t^2, 4t^3, 6t^4).$$

ii) Ὁ εὐθύς ὑπολογισμὸς διὰ τὸ $f \cdot g$ δίδει:

$$\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{d}{dt}(t+t^3+2t^2-t^3+6t) = \frac{d}{dt}(7t+2t^3) = 7+4t.$$

Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τὴν πρότασιν XIII - 2-1 διὰ τὸν ἴδιον ὑπολογισμὸν εὐρίσκωμεν:

$$\begin{aligned} f \cdot \frac{dg}{dt} + g \cdot \frac{df}{dt} &= (t, t^2, 2t) \cdot (2t, -1, 0) + (1+t^2, 2-t, 3) \cdot (1, 2t, 2) \\ &= 2t^2 - t^2 + 0 + 1 + t^2 + 4t - 2t^2 + 6 = 7 + 4t. \end{aligned}$$

iii) Ἔργασόμενοι ὡς καὶ ἐν ii) μὲ δύο διαφορετικοὺς τρόπους εὐρίσκωμεν ὅτι:

$$\frac{d}{dt}(f \times g) = (10t-4)i + (6t^2-1)j + (2-4t-4t^3) \cdot k.$$

→ 2^η/ Δείξατε ὅτι: ἐάν τὸ μέτρον μιᾶς διανυσματικῆς συναρτήσεως $R(t)$ εἶναι σταθερὸν, τότε $R \frac{dR}{dt} = 0$, ἔφ' ὅσον αἱ R καὶ $\frac{dR}{dt}$ εἶναι διάφοροι τῆς σταθερᾶς συναρτήσεως 0.

Λύσις: Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $R \cdot R = |R|^2 = C$. Αὕτη παραγωγισομένη ὡς πρὸς t δίδει:

$$R \cdot \frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dt} \cdot R = 0, \quad \text{ἢ} \quad 2R \cdot \frac{dR}{dt} = 0.$$

§ 3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΚΑΤΑ ΔΟΘΕΙΣΑΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Έστω η πραγματική συνάρτησις $f(x, y, z)$ ὁρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοιχτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ \mathbb{R}^3 . Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μεριμαὶ παράγωγοι πρώτης τάξεως τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως διὰ τὰδε $(x, y, z) \in U$ καὶ εἶναι συνεχεῖς. Ἐστω $M_0(\xi, \eta, \varsigma)$ ἓνα ἑσωτερικόν σημεῖον τοῦ U καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$.

Ἐστω ἐπὶ πλέον καὶ τὸ σημεῖον $M(\xi+h, \eta+k, \varsigma+\ell)$ μέ $\vec{M_0M} \in U$ καὶ $\vec{M_0M} \parallel \vec{u}$, ἥτοι

$$\vec{M_0M} = \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δίδομεν τώρα τὸν κατωρὶ ὁρισμόν :

Ὁρισμός XIII - 3-1: Καλοῦμεν παράγωγον τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ σημεῖον $M_0(\xi, \eta, \varsigma)$ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, συντόμως κατευθυνόμενη παράγωγος τῆς f εἰς τὸ σημεῖον M_0 κατὰ τὴν κατεύθυνσιν \vec{u} , καὶ τὴν συμβολίζομεν μέ :

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{u}} \text{ ἢ } f'_u(M_0)$$

τὴν κατωρὶ, ἂν ὑπάρχῃ, ὁριστὴν τιμὴν :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

ὥστε :

$$f'_u(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\lambda}$$

λόγω τῶν ὑποθέσεων διὰ τὴν $f(x, y, z)$ θὰ ἔχωμεν :

$$f(\xi+h, \eta+k, \varsigma+\ell) - f(\xi, \eta, \varsigma) = f'_x(\xi, \eta, \varsigma) \cdot h + f'_y(\xi, \eta, \varsigma) \cdot k + f'_z(\xi, \eta, \varsigma) \cdot \ell + \|\vec{M} - \vec{M_0}\| \cdot \varepsilon(\|\vec{M} - \vec{M_0}\|),$$

ὅπου $\varepsilon(\|\vec{M} - \vec{M_0}\|) \rightarrow 0$ τοῦ $\vec{M} \rightarrow \vec{M_0}$ κατὰ μῆκος τῆς θεωρηθείσης διευθύνσεως.

Λόγω τοῦ ὅτι $\vec{M_0M} \parallel \vec{u}$ θὰ ἔχωμεν : $h = \lambda u_1, k = \lambda u_2, \ell = \lambda u_3$ καὶ $\|\vec{M} - \vec{M_0}\| = |\lambda|$.

Ὁθεν :

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{\lambda} = f'_x(\xi, \eta, \varsigma) \cdot \frac{h}{\lambda} + f'_y(\xi, \eta, \varsigma) \cdot \frac{k}{\lambda} + f'_z(\xi, \eta, \varsigma) \cdot \frac{\ell}{\lambda} + \varepsilon(\lambda).$$

Λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφότερων τῶν μελῶν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως διὰ $\lambda \rightarrow 0$ ἔχομεν :

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{u}} = f'_u(M_0) = f'_x(\xi, \eta, \varsigma) \cdot u_1 + f'_y(\xi, \eta, \varsigma) \cdot u_2 + f'_z(\xi, \eta, \varsigma) \cdot u_3 \quad (1)$$

Ἡ σχέση (1) μᾶς ἀποδεικνύει συγχρόνως τὴν ὑπαρξιν τῆς $f'_u(M_0)$, πληρουμένων φυσικῶς τῶν προαναφερθεῖσων ὑποθέσεων διὰ τὴν $f(x, y, z)$ ὅπλ τὴν συνέχεια τῶν f'_x, f'_y, f'_z .

Ἐπὶ πλέον ἐκ τῆς (1) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράγωγος τῆς f κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ

μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u} (u_1, u_2, u_3)$ ισοϋται προς τό έσωτερικόν γινόμενον τού διανύσματος \vec{u} επί τό διάνυσμα πού έχει ως συντεταγμένες τας: $f'_x(E, \eta, \zeta), f'_y(E, \eta, \zeta), f'_z(E, \eta, \zeta)$.

Είδιαι περιπτώσεις: Έάν $\vec{u} = (1, 0, 0)$, τότε: $\frac{\partial f(M_0)}{\partial u} = f'_x(M_0) = f'_x(E, \eta, \zeta)$,
 δηλ. η παράγωγος της $f(x, y, z)$ εις τό σημείον $M_0 (E, \eta, \zeta)$ κατά την κατεύθυνσιν τού μοναδιαίου διανύσματος τού άξονος των x συμπίπτει με την μερικην παράγωγον $f'_x(E, \eta, \zeta)$.
 Όμοιως εάν $\vec{u} = (0, 1, 0)$ ή $\vec{u} = (0, 0, 1)$ θα έχωμεν αντίστοιχως:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial u} = f'_y(E, \eta, \zeta) \text{ και } \frac{\partial f(M_0)}{\partial u} = f'_z(E, \eta, \zeta).$$

Μία ιδιότης απορρέουσα έυ του όρισμού είναι η εξής:

$$f'_{tx}(M_0) = t \cdot f'_x(M_0)$$

Παρατηρήσεις: 1^η). Τό πηλίκον $\frac{f(M) - f(M_0)}{\lambda}$ παριστά την μέσην ταχύτητα μεταβολής της συνάρτησεως f κατά μήκος τού διανύσματος $\vec{M_0 M}$.

2^η). Η ως άνω εισαχθεΐσα έννοια, όπως έε άλλου φαίνεται έυ των ειδιων περιπτώσεων, περιέχει ως ειδιήν περιήτωσιν έμείνην της μερικης παραγώγου.

3^η). Έστω ότι η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ υπάρχει διά υάδε κατεύθυνσιν $\vec{u} (u_1, u_2, u_3)$, τότε προφανώς, θα υπάρχουν και αι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$. Τουναντίον ενδέχεται νά υπάρχουν οδαι αι μερικαι παράγωγοι της $f(x, y, z)$, χωρίς όμως αυτό νά εξασφαλίξη την ύπαρξιν της παραγώγου της f ως προς υάδε κατεύθυνσιν \vec{u} , ως δεικνύει τό κάτωθι παράδειγμα:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{αν } xy = 0 \\ 1, & \text{αν } xy \neq 0. \end{cases}$$

Ευνόως διαπιστούμεν ότι υπάρχουν αι μερικαι παράγωγοι πρώτης τάξεως της f εις τό σημείον $(0, 0)$ και ισχύει:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}.$$

Ας θεωρήσωμεν ήδη τό διάνυσμα $\vec{u} (u_1, u_2)$ με $u_1, u_2 \neq 0$ και $u_1^2 + u_2^2 = 1$ και άς εξετάσωμεν αν υπάρχει η $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \vec{u}}$.

Έχομεν:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \vec{u}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda u_1, \lambda u_2) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda}.$$

Αλλά τό τελευταίον όριον δέν υπάρχει, όθεν δέν υπάρχει εις τό σημείον $(0, 0)$ η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνσιν \vec{u} , καίτοι αι μερικαι παράγωγοι υπάρχουν.

4η) Η ύπαρξ της παραγώγου της συναρτήσεως f εις έν σημείον $M_0(E, \eta, \zeta)$ διά υάθε υατεύδυνσιν \vec{u} δέν εξαεθαλίζει την συνέχειαν της f εις τό σημείον $M_0(E, \eta, \zeta)$, ώς δειυνύει τό υάτωδι παράδειγμα:

Έστω ή συνάρτησις:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

υαί τό τυχόν μοναδιαϊόν διάνυσμα $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$.

Ευόλως διαπιστουμέν ότι ύπάρχει ή παράγωγος της f εις τό σημείον $(0,0)$ υατά την υατεύδυνσιν του διανύσματος \vec{u} υαί μάλιστα ισχύει:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{u}} = \begin{cases} -\frac{u_1}{u_2}, & \text{αν } u_2 \neq 0 \\ 0, & \text{αν } u_2 = 0 \end{cases}$$

Έν τούτοις εις τό σημείον $(0,0)$ ή f δέν είναι συνεχής (όιατι;).

Ιδιότητες XIII-3-1. Έστωσαν $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ δύο συνεχείς συναρτήσεις ώριμένας επί του ανοικτου ύποσυνόλου U του \mathbb{R}^3 υαί των όποιων ύπάρχει ή παράγωγος διά υάθε $M(x, y, z) \in U$ υατά την υατεύδυνσιν του διανύσματος $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Ισχύουν τότε αι υάτωδι ιδιότητες:

- i) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 0$, αν ή f είναι σταθερά, ii) $\frac{\partial (f+g)}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} + \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}$,
 iii) $\frac{\partial (fg)}{\partial \vec{u}} = f \frac{\partial g}{\partial \vec{u}} + g \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$, iv) $\frac{\partial (cf)}{\partial \vec{u}} = c \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ διά υάθε σταθεράν c
 v) $\frac{\partial}{\partial \vec{u}} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}}{g^2} \quad \forall (x, y, z) \in U \text{ με } g(x, y, z) \neq 0$.

Η άπόδειξι των άνωτέρω ιδιοτήτων επαφίεται ώς άσυνσεις εις τόν άναγνώστην.

Παράδειγμα: Δίδεται ή συνάρτησις $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Νά εύρεθ ή παράγωγος αυτής εις τό σημείον $M(1, 1, 1)$ υατά τό διάνυσμα \vec{OM} .

Λύσις: Είναι $\vec{OM} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. Λόγω της (i) δά είναι:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial (\vec{OM})} = f'_x(1, 1, 1) \frac{1}{\sqrt{3}} + f'_y(1, 1, 1) \frac{1}{\sqrt{3}} + f'_z(1, 1, 1) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Έν προειμένω ἔχομεν:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= -x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \implies f'_x(1,1,1) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ f'_y(x,y,z) &= -y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \implies f'_y(1,1,1) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \\ f'_z(x,y,z) &= -z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \implies f'_z(1,1,1) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ὁθεν:

$$\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial M} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

§ 4. ΚΛΙΣΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ (GRADIENT)

Ἐστω ἡ πραγματιυή συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὠρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοιυτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ \mathbb{R}^3 . Ὑποθέτομεν ἐπὶ πᾶσον ὅτι ὑπάρχουν αἱ μεριυαὶ παράγωγοι αἱ τὰξεως τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως διὰ τὰδε $(x,y,z) \in U$ καὶ εἶναι συνεχεῖς. Δυνάμεθα λοιπόν διὰ τὰδε σημεῖον $(x,y,z) \in U$ νὰ ὀρίσωμεν τὸ διάνυσμα:

$$i \cdot f'_x(x,y,z) + j \cdot f'_y(x,y,z) + k \cdot f'_z(x,y,z) \text{ τοῦ ὁποῖου ἀρχὴ εἶναι τὸ σημεῖον } (x,y,z).$$

Ὁρισμός XIII-4-1. Καλοῦμεν κλίσιν (gradient) τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)$ -ἥτις πῆτροὶ τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις εἰς τὸ σημεῖον $(x,y,z) \in U \subset \mathbb{R}^3$ - τὴν διανυσματιυήν συνάρτησιν $i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}$.

Ταῦτην δὲ συμβολίζομεν οὕτω $\text{grad } f$.

Συμφώνως πρὸς τὸν ὀρισμόν, προφανῶς, δὰ ἔχομεν:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{u}} = \vec{u} \cdot \text{grad } f(x,y,z)$$

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι: Ἡ παράγωγος τῆς $f(x,y,z)$ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ διανύματος \vec{u} ἰσοῦται μὲ τὸ σχετιυό μέτρο τῆς προβολῆς τοῦ διανύματος $\text{grad } f(x,y,z)$ ἐπὶ τὸ διάνυσμα \vec{u} .

Εἰδιωῶς διὰ τὸν πῶρον \mathbb{R}^3 καὶ ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $z=f(x,y)$ τὸ gradient αὐτῆς δὰ εἶναι ἡ διανυσματιυή συνάρτησις: $\text{grad } f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y}$.

Ὁ ἀνωτέρω ὀρισμός δύναται νὰ γενιευθῇ καὶ διὰ τὰς πραγματιυὰς συναρτήσεις $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ὠρισμένων ἐπὶ ἑνὸς ἀνοιυτοῦ ὑποσυνόλου τοῦ πῶρου \mathbb{R}^p .

Δι' εφαρμογής των ιδιοτήτων των μεριών παραώρων διαπιστούμεν εύκολως τὰς κάτωθι ιδιότητες τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\text{grad } f(x, y, z)$.

Ιδιότητες XIII-4-1. Ἰσχύουν τὰ κάτωθι:

- i) $\text{grad } (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \text{grad } f$, $\lambda = \text{σταθερά}$
- ii) $\text{grad } (f) = 0$, ἔνθα f σταθερά
- iii) $\text{grad } (f+g) = \text{grad } f + \text{grad } g$
- iv) $\text{grad } (f \cdot g) = f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f$
- v) $\text{grad } \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \cdot \text{grad } f - f \cdot \text{grad } g}{g^2}$, ὅπου $g(x) \neq 0$.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω ιδιοτήτων ἐπαρῖεται ὡς ἄσκησις εἰς τὸν ἀναγνώστην.

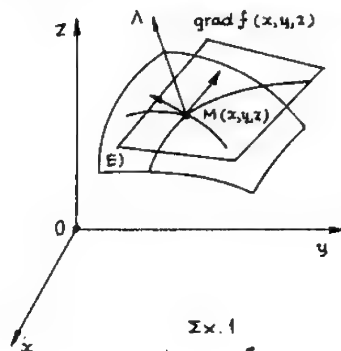
Ἡδὴ προτιθέμεθα νὰ δώσωμεν καὶ μίαν γεωμετρικὴν ἐρμηνείαν τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\text{grad } f(x, y, z)$.

Πρὸς τοῦτοις ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν (E) τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις δίδεται ὑπὸ τὴν πεπληρωμένην μορφήν $f(x, y, z) = 0$

Ἐστω τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$ τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας (βλ. Σχ. 1). Καλούμεν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$, τὸ ἐπίπεδον μὲ ἐξίσωσιν:

$$(X-x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας ὅτι τὸ διάνυσμα $\vec{M\Lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον.



Σχ. 1.

Ἡτοι: Τὸ $\text{grad } f(x, y, z)$ εἶναι ἓνα διάνυσμα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς ἐπιφανείας (ἥτοι, κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν) $f(x, y, z) = 0$ εἰς τὸ σημεῖον $M(x, y, z)$.

Τὸ δὲ ἀπόλυτον μέτρον ἢ norm τοῦ διανύσματος $\text{grad } f(x, y, z)$ εἰς τὸ σημεῖον (x, y, z) δὲ εἶναι:

$$\|\text{grad } f(x, y, z)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}.$$

Ὁρισμός XIII-4-2. Καλούμεν ἀνάδεχτα ἢ τελεστήν τοῦ Hamilton τὸν διανυσματικὸν τελεστήν:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

Αυτό υαδ' έαυτό τό ∇ δέν έχει αριθμητικὴν σημασίαν, ἀπουτὰ ὅμως τοιαύτην ὅταν ἐφαρμόζεται εἰς μίαν συνάρτησιν:

Ὁ ἀνωτέρω τελεστής ἐφαρμοδόμενος εἰς τὴν συνάρτησιν f δίδει:

$$\nabla f = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} = \text{grad } f.$$

Ὁθεν:

$$\boxed{\nabla f = \text{grad } f}$$

Ὁ τελεστής ∇ δὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἐξαιρετικὰ χρήσιμος. Μὲ τό σύμβολον ∇ αἱ ιδιότητες τῆς § 4-1 γράφονται:

$$\nabla (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \nabla f \text{ διὰ τὰθε } \lambda \text{ σταθερόν}$$

$$\nabla f = 0, \text{ ἔνθα } f \text{ σταθερά}$$

$$\nabla (f+g) = \nabla f + \nabla g, \nabla (f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$$

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}, \text{ ὅπου } g(x) \neq 0.$$

Εἰς τὴν εἰδιὴν περίπτωσιν τῆς $f = f(x, y)$ ἔχομεν:

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j, \text{ ἔνθα: } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j.$$

§ 5 ΑΠΟΚΛΙΣΙΣ (divergence)

Ἐστω ἡ διανυσματικὴ συνάρτησις:

$$\vec{F}(x, y, z) = i \cdot P(x, y, z) + j \cdot Q(x, y, z) + k \cdot R(x, y, z) \quad (1)$$

διὰ τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχουν αἱ μερικαὶ παράγωγοι $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ καὶ εἶναι συνεχεῖς ἐπὶ ἐνὸς ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ὁρισμός XIII-5-1. Καλοῦμεν ἀπούλησιν (divergence) τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως (1) καὶ τὴν παριστῶμεν μὲ $\text{div } \vec{F}$ τὴν κατωθι θαθμωτὴν συνάρτησιν:

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Τό $\text{div } \vec{F}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓνα κατὰχρηστικόν ἑσωτερικόν γινόμενον τῶν ∇ καὶ \vec{F} , ἥτοι:

$$\boxed{\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}}$$

Τούτο δέ ἐξηγείται ὡς ἑξῆς:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (i \cdot P + j \cdot Q + k \cdot R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{F}.$$

Διὰ τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν:

$$\vec{F}(x,y) = i \cdot P(x,y) + j \cdot Q(x,y)$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\text{div } \vec{F}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Ἡ ἀπόλησις ἔχει τὰς ἀμολούδους ιδιότητες:

Ἰδιότητες XIII-5-1. Ἰσχύουν τὰ κατωθί:

$$i) \quad \text{div} (\lambda \cdot \vec{F}) = \lambda \cdot \text{div } \vec{F} \quad \text{διὰ } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad \text{div} (\vec{F} + \vec{G}) = \text{div } \vec{F} + \text{div } \vec{G}$$

$$iii) \quad \text{div} (\varphi \cdot \vec{F}) = \vec{F} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \cdot \text{div } \vec{F}, \quad \text{ἐνθα } \varphi \text{ βαθμωτὴ συνάρτησις.}$$

(Πρέπει νὰ προσέξωμεν τὸ 6^ο μέλος τῆς ιδιότητος (iii), ὅπου ὁ πρῶτος προσθετὸς παριστᾷ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων, ἐνῶ ὁ δευτέρος προσθετὸς παριστᾷ γινόμενον δύο πραγματικῶν συναρτήσεων. Τὸ γινόμενον $\varphi \cdot \vec{F}$ τοῦ πρώτου μέλους παριστᾷ γινόμενον πραγματικῆς συναρτήσεως ἐπὶ τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν \vec{F}).

Ἀπόδειξις τῆς iii) ιδιότητος. Ἐστω:

$$\vec{F}(x,y,z) = i \cdot P(x,y,z) + j \cdot Q(x,y,z) + k \cdot R(x,y,z)$$

ὅτε:

$$\varphi \cdot \vec{F} = i (\varphi \cdot P) + j (\varphi \cdot Q) + k (\varphi \cdot R).$$

Εἶναι δέ:

$$\begin{aligned} \text{div} (\varphi \cdot \vec{F}) &= \frac{\partial (\varphi \cdot P)}{\partial x} + \frac{\partial (\varphi \cdot Q)}{\partial y} + \frac{\partial (\varphi \cdot R)}{\partial z} = \\ &= \left(\varphi \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \left(\varphi \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \left(\varphi \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \varphi \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left(P \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q \frac{\partial \varphi}{\partial y} + R \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \varphi \cdot \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } \varphi. \end{aligned}$$

Πρότασις XIII-5-1. Ἐάν ἡ πραγματικὴ συνάρτησις $f(x,y,z)$ ἔχη μεριμὰς παραγώρους δευτέρου τάξεως συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ UCR^3 , τότε ἰσχύει:

$$\text{div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ὡς ἀπλὴ παραλείπεται.

Ὁ διαφορικὸς τελεστής $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ καλεῖται διαφορικὸς τελεστής τοῦ Laplace καὶ παρίσταται διὰ τοῦ Δ .

ὅθεν τὴν παράστασιν :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

θὰ τὴν παριστῶμεν συχνὰ διὰ τῶν συμβόλων :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f \text{ ἢ } \Delta f \text{ ἢ } \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

καὶ θὰ τὴν ὀνομάσωμεν Laplacian τῆς f .

Μία συνάρτησις f - ἡ ὁποία ἔχει συνεχεῖς δευτέρας τάξεως μεριμᾶς παραγώγους - τοιαύτη, ὥστε : $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$ διὰ τὰς $(x, y, z) \in U$ καλεῖται : ἁρμονικὴ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ U .

Ἡ ἐξίσωσις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ πληρουμένη ὑπὸ τῆς f καλεῖται ἐξίσωσις τοῦ Laplace.

§ 6. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ (Rotation ἢ Curl)

Ἐστω τὴ διανυσματικὴ συνάρτησις :

$$\vec{F}(x, y, z) = i P(x, y, z) + j Q(x, y, z) + k R(x, y, z).$$

ὑποθέταμεν ὅτι αἱ P, Q, R ἔχουν μεριμᾶς παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ \mathbb{R}^3 .

Ὁρισμός XIII - 6-1. Καθοῦμεν περιστροφὴν τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως \vec{F} καὶ τὴν παριστῶμεν οὕτω τὸ \vec{F} , τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν τὴν ὀριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\operatorname{rot} \vec{F} = i \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Τὸ $\operatorname{rot} \vec{F}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ ματαχρηστικὸν ἑξωτερικὸν γινόμενον τῶν ∇ καὶ \vec{F} , ἥτοι :

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}.$$

Πρὸς ταῦτοις δίδεται ἡ ἀνάλουθος ἐξήγησις χρησιμοποιοῦντες τὴν κατωθι συμβολικὴν ὀρίσουσιν

$$\nabla \times \vec{F} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (i P + j Q + k R) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= i \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \operatorname{rot} \vec{F}$$

Διά την διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x,y) = i \cdot P(x,y) + j \cdot Q(x,y)$ έχουμε:

$$\text{rot } \vec{F}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

ήτοι εις την περίπτωση αυτήν τό $\text{rot } \vec{F}$ είναι πραγματική συνάρτησις.

Ιδιότητες XIII - 6-1: 'Ισχύουν τὰ κάτωθι:

$$i) \quad \text{rot}(\lambda \vec{F}) = \lambda \cdot \text{rot } \vec{F} \text{ διά } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad \text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot } \vec{F} + \text{rot } \vec{G}$$

$$iii) \quad \text{rot}(\phi \cdot \vec{F}) = (\text{grad } \phi) \times \vec{F} + \phi \cdot \text{rot } \vec{F}.$$

Αι άνωτέρω ιδιότητες δύνανται ν' αποδειχθούν δι' αή' ευθείας υπολογισμού.

(Τό $\phi \cdot \vec{F}$ παριστᾷ τό γινόμενον τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως ϕ ἐπί τήν διανυσματικήν συνάρτησιν \vec{F}).

Πρότασις XIII - 6-1. Τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως $\vec{F} = iP + jQ + kR$ ἐάν αἱ συναρτήσεις P, Q, R ἔχουν μεριυάς παραγώρους δευτέρας τάξεως συνεχεῖς ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ \mathbb{R}^3 , τότε: $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$.

Ἀπόδειξις: Ἐχομεν ὅτι:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{F}) &= \text{div} \left[i \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Πρότασις XIII - 6-2. Ἐάν ἡ πραγματική συνάρτησις $f(x,y,z)$ ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ ἀνοικτοῦ ὑποσυνόλου U τοῦ \mathbb{R}^3 ἔχη μεριυάς παραγώρους μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχεῖς, τότε: $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀπὸ ἡ.

Ὁρισμός XIII - 6-2. Ἐνα διανυσματικόν πεδίου καλεῖται ἀστροόβηλον, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν σέ κἀθε σημεῖον τοῦ πεδίου ἡ περιστροφή εἶναι μηδέν, ἥτοι:

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

Οὕτω, π.χ, τό πεδίου:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (x-zy+4z)i + (2x-3y-z)j + (4x-y+2z)k \text{ εἶναι ἀστροόβηλον.}$$

Πράγματι, ἔχομεν ὅτι: $\text{rot } \vec{F} = 0$

• κρίνουμε σκόπιμον νά ὀρίσωμεν καί ἄλλας ἐκφράσεις αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τήν Διανυσματικὴν Ἀνάλυσιν καί αἱ ὁποῖαι παῖδουν ἕναν σημαντικόν ρόλον εἰς αὐτήν. Οὕτω:

i) Ἐστω ἡ διαν. συνάρτησις $\vec{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$.

ὀρίζομεν: $\vec{F} \cdot \nabla = P \cdot \frac{\partial}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial}{\partial z}$

Οὕτω τὸ ἀνωτέρω ἐσωτερικὸν γινόμενον παριστᾷ ἕναν τελεστήν καὶ προφανῶς τοῦτο εἶναι διάφορον τοῦ $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}$, τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἕνα βαθμωτὸν μέγεθος. Ἐφαρμοδόμενος ὁ ἀνωτέρω τελεστής εἰς τὴν βαθμωτὴν συνάρτησιν $f(x,y,z)$ δίδει:

$$(\vec{F} \cdot \nabla)f = P \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Q \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + R \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{F} \cdot (\nabla f).$$

ii) τῆς ἀνωτέρω διανυσματικῆς συναρτήσεως \vec{F} ὀρίζομεν ὡς $\text{grad } \vec{F}$ τὴν κατωθι ἐκφρασιν:

$$\text{grad } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (P \cdot \mathbf{i} + Q \cdot \mathbf{j} + R \cdot \mathbf{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{F}$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, τὰ ἐσωτερικὰ γινόμενα $\vec{F} \cdot \nabla$ καὶ $\nabla \cdot \vec{F}$ οὐτε μὲν συσχετίζονται, καθότι τὸ ἕνα παριστᾷ τελεστήν, ἐνῶ τὸ ἄλλο παριστᾷ βαθμωτὴν συνάρτησιν.

iii) Τέλος ἡ ἐκφρασις $\vec{F} \times \nabla$ ὀρίζεται ὡς ἀμολούθως:

$$\vec{F} \times \nabla = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(Q \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial y} \right) +$$

$$+ \mathbf{j} \left(R \frac{\partial}{\partial x} - P \frac{\partial}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(P \frac{\partial}{\partial y} - Q \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Ὅθεν, ἡ ἀνωτέρω ἐκφρασις παριστᾷ, ὡς λέγομεν, ἕναν διανυσματικὸν τελεστήν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ $\nabla \times \vec{F}$ ποῦ παριστᾷ ἕνα διάνυσμα.

Ὁ ἀνωτέρω τελεστής ἐφαρμοδόμενος ἐπὶ τῆς f πρέπει νά δίδει:

$$(\vec{F} \times \nabla)f = \mathbf{i} \left(Q \frac{\partial f}{\partial z} - R \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \mathbf{j} \left(R \frac{\partial f}{\partial x} - P \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(P \frac{\partial f}{\partial y} - Q \frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$\text{ἥτοι: } (\vec{F} \times \nabla)f = \vec{F} \times \nabla f.$$

ΤΥΠΟΙ ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΕΣ ΤΟ ∇

Έστωσαν αί πραγματιαι συναρτήσεις $f(x,y,z)$ καί $g(x,y,z)$ ώρισμεναι επί ενός δ -νομιτου υποσυνόλου U του \mathbb{R}^3 καί έχουσαι μεριιάς παραγώγους πρώτης τάξεως συνεχείς.

Έστωσαν επί πλέον καί αί διανυσματιαι συναρτήσεις $\vec{F}(x,y,z), \vec{G}(x,y,z)$ ώρισμεναι επί του αὐτου υποσυνόλου καί των οποίων αί συνιστώσαι συναρτήσεις έχουν μεριιάς παραγώγους μέχρι δευτέρας τάξεως συνεχείς.

Θεωρούντες τόν τελεστήν ∇ ώς ένα συμβολικόν διάνυσμα δυνάμεθα νά έχωμεν τούς κάτωθι τύπους τινές των οποίων εξάγονται άμεσα έκ των προηγουμένων λεχθέντων :

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \iff \text{grad}(f+g) = \text{grad} f + \text{grad} g.$
2. $\nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G} \iff \text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div} \vec{F} + \text{div} \vec{G}$
3. $\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G} \iff \text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot} \vec{F} + \text{rot} \vec{G}$
4. $\nabla \cdot (f \cdot \vec{F}) = (\nabla f) \cdot \vec{F} + f(\nabla \cdot \vec{F})$
5. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$
6. $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\nabla \cdot \vec{G}) - \vec{G}(\nabla \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G}.$
7. $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}).$
8. $\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (Laplacian της f)
9. $\nabla \times (\nabla f) = 0$, δηλ. ή περιστροφή της υλίσσεως της f είναι μηδέν.
10. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$, δηλ. ή απόκλισις της περιστροφής της \vec{F} είναι μηδέν.
11. $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}.$

§ 7. ΠΕΔΙΟΝ ΤΩΝ GRADIENTS - ΔΥΝΑΜΙΚΟΝ ΠΕΔΙΟΝ

Έστω ένα βαθμωτόν πεδίο $f(M)$. Εάν εις υάδε σημείον $M(x,y,z)$ του βαθμωτου πεδίου $f(M)$ θεωρήσωμεν τό διάνυσμα $\text{grad} f$ δημιουργούμεν ένα διανυσματικόν πεδίο, τό όποιον είναι τό πεδίο των gradients της βαθμωτής συναρτήσεως f .

Δίδομεν τώρα τόν κάτωθι όρισμόν:

Όρισμός XIII-7-1. Θά λέρωμεν ότι ένα διανυσματικόν πεδίο:

$$\vec{F}(M) \equiv \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z) \cdot \vec{i} + Q(x,y,z) \cdot \vec{j} + R(x,y,z) \cdot \vec{k}$$

άπορρέει εκ δυναμιου, εάν δύναται νά παρασταθῇ ως πεδίο των gradients της

βαθμωτής συναρτήσεως $f(M)$, ήτοι αν:

$$\vec{F}(M) = \text{grad } f(M). \quad (1)$$

Δηλαδή, αν υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτησις $f = f(x, y, z)$ τοιαύτη ώστε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R(x, y, z) \quad (2)$$

Η συνάρτησις $f = f(x, y, z)$ ονομάζεται τότε δυναμιόν (δυναμιμή συνάρτησις) του διανυσματιού πεδίου $\vec{F}(M)$.

Εάν το διανυσματιόν πεδίου $\vec{F}(M)$ απορρέει έυ δύο δυναμιών, τότε αι δυναμιαι συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθεράν. Πράγματι, εάν υποθέσωμεν ότι το $\vec{F}(M)$ απορρέει έυ δύο δυναμιών συναρτήσεων f, g ($f \neq g$) έχομεν:

$$\text{grad } f = \text{grad } g \implies \text{grad } (f - g) = 0. \quad (3)$$

Αλλά συμφώνως πρὸς τήν ιδιότητα XIII-4-1 (li) σελ. 450 θά έχωμεν $f - g = \text{σταθερά}$.

● Ιδιότης XIII-7-1. Αι γραμμαι διευδύνσεως του διανυσματιού πεδίου $\vec{F} = \text{grad } f$ είναι υάθετοι επί τας ισοσταθμιας επιφανείας $f(x, y, z) = C$.

Απόδειξις: Ως γνωστόν, το $\text{grad } f(x, y, z)$ είναι υάθετον επί τήν επιφάνειαν $f(x, y, z) - C = 0$. Έξ άλλου εάν $d\vec{r}$ είναι το εφαπτομενιόν στοιχείον της διανυσματιωής γραμμής του πεδίου $\vec{F} = \text{grad } f$ τότε, ως γνωστόν (βλ. σελ. 440, τύπον (6)) θά έχωμεν $\text{grad } f \times d\vec{r} = 0$. Όθεν, $d\vec{r} \parallel \text{grad } f$, συνεπώς το $d\vec{r}$ είναι υάθετον επί τήν ισοσταθμικήν επιφάνειαν $f(x, y, z) - C = 0$.

● Ήδη ως εξέτάσωμεν εάν το διανυσματ. πεδίου $\vec{F} = \text{grad } f$ απορρέει έυ δυναμιού.

$$\text{Έχομεν: } \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df.$$

Ήτοι, ή $f(x, y, z)$ είναι ή δυναμιμή συνάρτησις του διαν. πεδίου $\vec{F} = \text{grad } f$.

Θέτοντες $(P, Q, R) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, τότε θά έχωμεν:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Επομένως το $\int_{AM} P dx + Q dy + R dz$ έχει τότε τιμήν, ήτις εξαρτάται μόνον

από την αρχή A και το τέλος M του δρόμου ολοκληρώσεως και είναι ανεξάρτητη από τον δρόμο, όστις συνδέει το σημείο A με το M (βλέπε σχετικώς και κεφ XI, σελίς 387). Συνεπώς αν διατηρήσωμεν το $A(x_0, y_0, z_0)$ σταθερόν και μεταβάλλωμεν το $M(x, y, z)$ μέσα εις το πεδίον θα προκύψη μία συνάρτησις (βλ. σχετ. κεφ XI, σελίς 389):

$$f(x, y, z) = \int_{AM} \vec{F} d\vec{r} = \int_{AM} P dx + Q dy + R dz = \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t, z) dt + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, t) dt + c \quad (6)$$

ήτις είναι ένα δυναμιόν (δυναμιτή συνάρτησις) του θεωρουμένου διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(M)$, δηλαδή:

$$P(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

• Είναι τώρα εύλογον να ζητήσημε να συνθήκας υπό τας οποίας ένα διανυσματικόν πεδίο $\vec{F}(M)$ απορρέει εκ δυναμιού. Το ανωτέρω είναι ισοδύναμον προς το έρωτημα: αν μάς δοθῇ το πεδίο $\vec{F}(M)$, δηλαδή η διανυσματικὴ συνάρτησις \vec{F} , ὑπάρχει ἄν τις ὥς προς f τῆς ἐξισώσεως: $\text{grad } f = \vec{F}$;

Ἐάν δέ: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ τὸ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\text{grad } f = \vec{F}$ σημαίνει νὰ εὕρωμεν μίαν βαθμωτὴν συνάρτησιν $f = f(x, y, z)$, ἥτις νὰ ἱκανοποιῇ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις μετ' ἐκείνων παραγώρων:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R(x, y, z) \quad (7)$$

ὅπου P, Q, R εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις καὶ ἔχουν συνεχεῖς μεριὰς παραγώρους πρώτης τάξεως.

ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω ὑποθέσεις διὰ τὰς P, Q, R καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς ὁρισμοὺς

XIII - 6-1 καὶ XIII - 6-2 διατυποῦμεν τὴν κατωθὶ σπουδαίαν πρότασιν:

Πρότασις XIII - 7-1. Ἰσχυρὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ διανυσματικόν πεδίο $\vec{F}(M)$ ἀπορρέῃ ἐκ δυναμιού εἶναι: $\text{rot } \vec{F} = 0$, ἢ δέ δυναμιτὴ συνάρτησις f διδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t, z) dt + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, t) dt + c \quad (8)$$

όπου (x, y, z) σημείον του πεδίου ορισμού της $\vec{F}(M)$.

Απόδειξις: (Αναγκαῖον) Ἐστω ὅτι τὸ διανυσμ. πεδίου $\vec{F}(M)$ ἀπορρέει ἐκ δυναμιμοῦ f , τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις (7).

Παραγινώσκοντες τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τῆς (7) ὡς πρὸς y καὶ x ἀντιστοιχῶς λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ἡ συνέχεια ὁμως τῶν $\frac{\partial P}{\partial y}$ καὶ $\frac{\partial Q}{\partial x}$ συνεπάρεται τὴν συνέχεια ἄρα καὶ τὴν ἰσότητα (βλ. Πρωτ. II-6-1) τῶν δύο μιτυτῶν μεριτυῶν παραγώγων $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ καὶ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Ἐπομένως ἔχομεν τὴν ἰσότητα:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (9)$$

Ἀναλόγως ἐργαζόμενοι εὐρίσκουμεν:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad (10)$$

Ἐκ τῶν (9) καὶ (10) συνάγομεν ὅτι: $\text{rot } \vec{F} = 0$.

Ἑκ τῆς. Ἐστω $\text{rot } \vec{F} = 0$, τότε πληροῦνται αἱ σχέσεις:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad (11)$$

Πληρουμένων τῶν ἀνωτέρω τριῶν σχέσεων ὑπάρχει (βλ. σκ. κεφ. XI, σελίς 390) μία συνάρτησις $f(x, y, z)$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$P dx + Q dy + R dz = df \quad (12)$$

μάλιστα δὲ ἡ συνάρτησις f δίδεται τότε ὑπὸ τοῦ τύπου (8) (βλ. κεφ. XI σελ. 391).

→ Ἡ σχέση (12) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς: ←

$$P(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

καὶ ὁθεν αἱ σχέσεις (11), δηλ. ἡ $\text{rot } \vec{F} = 0$, συνεπάρεται ὅτι τὸ διαν. πεδίου $\vec{F}(M)$ ἀπορρέει ἐκ δυναμιμοῦ.

Ἡ πρότασις ὁθεν ἀπεδείχθη πλήρως.

Ἐφαρμογή: Δείξατε ὅτι τὸ διανυσμ. πεδίου:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = 2xyz \vec{i} + x^2z \vec{j} + x^2y \vec{k}$$

ἀπορρέει ἐν δυναμινοῦ καὶ νὰ εὐρεθῇ ἡ ἑξίσωσις τῶν ἰσοσταθμιῶν ἐπιφανειῶν

Λύσις: Ἐχομεν:

$$P(x,y,z)=2xyz, \quad Q(x,y,z)=x^2z, \quad R(x,y,z)=x^2y, \quad \text{ὅτε:}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xz = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = x^2 = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy = \frac{\partial R}{\partial x}$$

Ἄρα $\text{rot } \vec{F} = 0$ καὶ ἐπομένως τὸ διανυσμ. πεδίου \vec{F} ἀπορρέει ἐν δυναμινοῦ, ἡ δὲ $f(x,y,z)$ εἶναι:

$$f(x,y,z) = \int_0^x 2tyz \, dt + \int_0^y 0^2 z \, dt + \int_0^z 0 \, dt + C' = x^2yz + C'$$

καὶ ἐπομένως αἱ ἰσοσταθμιαὶ ἐπιφάνειαι ἔχουν ἑξισώσεις:

$$x^2yz + C' = C.$$

§8. ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΡΟΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Ἐστω ἓνα διανυσματικόν πεδίου $\vec{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, γ μία λεία κλειστή καὶ προσανατολισμένη καμπύλη καὶ S μία λεία καὶ προσανατολισμένη (δίπλευρος) ἐπιφάνεια μὲ μοναδιαίον κἀθετον ἐπ' αὐτῆς διάνυσμα τὸ \vec{n} .

Δίδομεν τώρα τοὺς κατωθι ὁρισμούς:

Ὀρισμός XIII - 8-1. Καλοῦμεν κυκλοφορίαν τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου $\vec{F}(M)$ κατὰ μῆκος τῆς κλειστῆς καμπύλης γ τὸ ἐπιγαμπύλιον ὁλοκλήρωμα.

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \, d\vec{r} = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz \quad (1)$$

Εἶναι φανερόν ὅτι ἂν \vec{F} εἶναι ἓνα πεδίου δυνάμεων, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα (1) παριστᾷ τὸ ἔργον τῆς \vec{F} κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης γ .

Ὀρισμός XIII - 8-2. Καλοῦμεν ὁλικὴν ροὴν τοῦ διανυσμ. πεδίου $\vec{F}(M)$ διὰ μέσου τῆς ἐπιφανείας S , τὸ ἐπιφανειακὸν ὁλοκλήρωμα:

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, ds = \iint_S F_n \, ds \quad (2)$$

ὅπου F_n παριστᾷ τὸ μέτρον τῆς προβολῆς τῆς διανυσματικῆς συναρτήσεως \vec{F}

ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ διανύσματος \vec{n} .

Εἰς τὴν περίπτωσηὶν ὅπου τὸ $\vec{F}(M)$ εἶναι τὸ πεδίου τῶν ταχυτήτων τῶν μορίων ἐνὸς ρευστοῦ, ἡ ὀλiviή ροτὴ τοῦ διανυσμ. πεδίου \vec{F} διὰ μέσου τῆς ἐπιφανείας S εἶναι ἴση μὲ τὴν ποσότητα τοῦ ρευστοῦ ποὺ διέρχεται διὰ μέσου τῆς ἐπιφανείας εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου καὶ κατὰ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος \vec{n} (παροχή).

Εἶναι φανερόν ὅτι ἐὰν τὸ διανυσμ. πεδίου $\vec{F}(M)$ εἶναι ἄλλης φύσεως ἢ (ὀλiviή) τοῦ πεδίου δύνανται νὰ ἔχῃ καὶ ποῖαν ἄλλην φυσικὴν σημασίαν.

§9. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΥΠΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΝ ΔΙΑΤΥΠΩΣΙΝ

Εἰς τὴν παρούσαν παράγραφον δὲ ἐπαναλάβωμεν, ἀλλὰ ὑπὸ διανυσματικὴν διατύπωσιν, τὰ γνωστὰ ἐν τῶν κεφ. XI-XII θεωρήματα: τῆς ἀπουδίσσεως, τοῦ Green, τοῦ Stokes, καὶ σχετικὰ ὁλοκληρωτικὰ θεωρήματα.

Ἐστω S μία κλειστὴ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περιυλiviεῖ ἓνα τριδιάστατον χωρίον V . Ἡ ἐπιφάνεια S καὶ τὸ χωρίον V ὑποθέτομεν ὅτι ἔχουν τὰς κατωτέρω ιδιότητες:

(i) Τὸ τριδιάστατον χωρίον V προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Oxy εἰς ἓν διάστατον χωρίον D . Ὁ κύλινδρος προβολῆς τοῦ V ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Oxy με γενέτειραν παράλληλον πρὸς τὸν Oz ἐφάπτεται τοῦ V κατὰ μίαν καμπύλην (Γ) , ἡ ὁποία χωρίζει τὴν ἐπιφάνειαν S εἰς δύο τμήματα. Ἀναλόγως διὰ τὰς προβολὰς τοῦ V ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Oyz καὶ Ozx .

(ii) Τὸ σύνορον τοῦ χωρίου V τέμνεται ὑπὸ εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς ἄξονας εἰς δύο τὸ πολὺ σημεία.

(iii) Ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι δύο ὀψεων.

(iv) Ἡ ἐπιφάνεια S εἶναι λεία ἢ κατὰ τμήματα λεία.

ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις ἰσχύουν οἱ κατωτέρω ὁλοκληρωτικοὶ τύποι:

(I) Ὁ τύπος Gauss-Ostrogradsky ἢ ὁλοκληρωτικὸς τύπος κατὰ div :

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \text{div} \vec{F} \, dv = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) \, dv} \quad (1)$$

Πράγματι, αν $\vec{F} = (P, Q, R)$ και $\vec{n} = (\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$ είναι το μοναδιαίο υα-
θετον επί την επιφάνειαν S διάνυσμα, έχουμε (βλ. κεφ. XII, σελίς 430, τύπος (θ)):

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Άλλά :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F},$$

Όθεν :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) \, dv.$$

(II) Πρώτος ολοκληρωτικός τύπος του Green: Έστωσαν δύο βαθμωτά συναρ-
τήσεις f, g με συνεχείς μεριυάς παραγώρους δευτέρας τάξεως, τότε ισχύει
ό υάτωδι τύπος :

$$\boxed{\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds = \iint_S (f \nabla g) \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V [f \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] \, dv} \quad (2)$$

Πράγματι, ο τύπος (1) διά $\vec{F} = f \nabla g$ γίνεται :

$$\iiint_V [\nabla \cdot (f \nabla g)] \, dv = \iint_S (f \nabla g) \cdot \vec{n} \, ds \quad (a)$$

Άλλά : $\nabla \cdot (f \nabla g) = f (\nabla \cdot \nabla g) + (\nabla f) \cdot (\nabla g) = f \cdot \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)$ και $\nabla g \cdot \vec{n}$ είναι ίσον με
τήν υατευδυνομένην παράγωγον $\frac{\partial g}{\partial n}$ της g υατά την διευθύνειν του διανύσματος \vec{n}

Όθεν η εξίσωσις (a) γίνεται :

$$\iiint_V [f \cdot \nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] \, dv = \iint_S f \nabla g \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds.$$

(III) Δεύτερος ολοκληρωτικός τύπος του Green: Με τας ως άνω υποθέσεις διά
τας f και g ισχύει ο υάτωδι τύπος :

$$\boxed{\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V [f \nabla^2 g - g \nabla^2 f] \, dv} \quad (3)$$

όστις υαληείται : συμμετρική μορφή του θεωρήματος Green.

πράγματι, δι' εναλλαχής των f και g εις την (2) λαμβάνομεν:

$$\iint_S \left(g \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \right) ds = \iint_S g \cdot \nabla f \cdot \bar{n} ds = \iiint_V [g \cdot \nabla^2 f + (\nabla g) \cdot (\nabla f)] dv \quad (2')$$

Λαμβαιρόντες δέ την (2') από την (2) λαμβάνομεν την (3).

Παρατηρήσεις: Έχοντες υπ' όψιν ότι: $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \Delta f$ και $\nabla^2 g = \Delta g$ οί όλουθηρωτικοί τύποι (2) και (3) συνήδως γράφονται υπό την μορφήν:

$$\boxed{\iint_S f \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} ds = \iint_S f \nabla g \cdot \bar{n} ds = \iiint_V (f \Delta g + g \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g) dv} \quad (2'')$$

αντιστοίχως:

$$\boxed{\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial \bar{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \bar{n}} \right) ds = \iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \bar{n} ds = \iiint_V (f \Delta g - g \Delta f) dv} \quad (3'')$$

(IV) Ο τύπος του Stokes: Έστω S μία προσανατολισμένη ανοικτή επιφάνεια, η ό-
ποια περιορίζεται υπό της κλειστής καμπύλης Γ . Τότε ισχύει ο κάτωθι τύπος:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \bar{n} ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \bar{n} ds} \quad (4)$$

Πράγματι, αν $\vec{F} = P \cdot i + Q \cdot j + R \cdot k$ και $\bar{n} = i \cdot \sin \alpha + j \cdot \sin \beta + k \cdot \sin \gamma$, τότε τό δεύτερον μέ-
λος του τύπου (11) της σελίδος 426 γράφεται:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \bar{n} ds = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \bar{n} ds \quad (a)$$

Ενώ τό:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (b)$$

Ευ των (a) και (b) λαμβάνομεν τόν τύπον (4).

• Δυνάμεθα νά όρίσωμεν όλουθηρώματα διανυσματικῶν συναρτήσεων μέ τιμές
εις τόν χώρο \mathbb{R}^3 ἢ καί γενιωτέρων εις τόν χώρο \mathbb{R}^n . Ούτω π.χ. εάν έχωμεν

την διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}: V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ το ολοκλήρωμα $\iiint_V \vec{F} dv$ (διάνυσμα) ορίζεται ως αμολούδης: Διά υόδε σταθερόν διάνυσμα $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ νά ισχύη ή σχέσις:

$$\vec{c} \cdot \iiint_V \vec{F} dv = \iiint_V \vec{c} \cdot \vec{F} dv \quad (1).$$

όπου τό θ° μέλος της (1) είναι τό ολοκλήρωμα της πραγματικής συναρτήσεως $\vec{c} \cdot \vec{F}$ (έσωτεριών χινόμενον τών \vec{c} καί \vec{F}), ενώ τό πρώτον μέλος είναι τό έσωτεριών χινόμενον τού διανύσματος \vec{c} καί τού ορίσομένου διανύσματος (ολοκληρώματος) $\iiint_V \vec{F} dv$.

Κατ' ανάλογον τρόπον ορίδονται καί τά έπιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικής συναρτήσεως, π.χ τό έπιφανειακόν ολοκλήρωμα της διανυσματικής συναρτήσεως \vec{F} επί της έπιφανείας S ορίδεται υπό της σχέσεως: $\vec{c} \cdot \iint_S \vec{F} ds = \iint_S \vec{c} \cdot \vec{F} ds \quad (2)$

όπου τό θ° μέλος της (2) είναι τό έπιφανειακόν ολοκλήρωμα επί της S της πραγματικής συναρτήσεως $\vec{c} \cdot \vec{F}$, όπου \vec{c} τυχόν σταθερόν διάνυσμα τού χώρου \mathbb{R}^3 , ενώ τό α° μέλος είναι τό έσωτεριών χινόμενον τού διανύσματος \vec{c} καί τού ορίσομένου $\iint_S \vec{F} ds$.

(γ) Ο ολοκληρωτικός τύπος κατά grad:

$$\boxed{\iint_S f \vec{n} ds = \iiint_V \text{grad } f \cdot d\vec{v} = \iiint_V \nabla f \cdot d\vec{v}} \quad (5)$$

Πράγματι, ό τύπος (1) διά $\vec{F} = f \cdot \vec{c}$, όπου \vec{c} = σταθερόν διάνυσμα, γίνεται:

$$\iint_S f \vec{c} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \nabla \cdot (f \vec{c}) dv$$

Άλλά:

$$\nabla \cdot (f \vec{c}) = (\nabla f) \cdot \vec{c} + 0 = \vec{c} \cdot \nabla f$$

καί

$$f \vec{c} \cdot \vec{n} = \vec{c} \cdot (f \vec{n})$$

Οθεν:

$$\iint_S \vec{c} \cdot (f \vec{n}) ds = \iiint_V \vec{c} \cdot \nabla f dv$$

ή

$$\vec{c} \cdot \iint_S f \vec{n} ds = \vec{c} \cdot \iiint_V \nabla f dv$$

καί έφ' όσον \vec{c} είναι ένα αυθαίρετόν σταθερόν διάνυσμα έχομεν:

$$\iint_S f \vec{n} ds = \iiint_V \nabla f dv = \iiint_V \text{grad } f \cdot d\vec{v}.$$

(vi) ο δολομθηρωτικὸς τύπος κατὰ rot :

$$\iiint_S \vec{n} \times \vec{G} ds = \iiint_V \text{rot } \vec{G} dv = \iiint_V (\nabla \times \vec{G}) dv \quad (6)$$

Πράγματι, ὁ τύπος (1) διὰ $\vec{F} = \vec{G} \times \vec{C}$, ὅπου \vec{C} = σταθ. διάνυσμα γίνεται :

$$\iiint_S (\vec{G} \times \vec{C}) \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \nabla \cdot (\vec{G} \times \vec{C}) dv$$

Ἀλλὰ :

$$\nabla \cdot (\vec{G} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{G}) - \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{G})$$

καί

$$(\vec{G} \times \vec{C}) \cdot \vec{n} = \vec{G} \cdot (\vec{C} \times \vec{n}) = (\vec{C} \times \vec{n}) \cdot \vec{G} = \vec{C} \cdot (\vec{n} \times \vec{G})$$

ὁθεν :

$$\iiint_S \vec{C} \cdot (\vec{n} \times \vec{G}) ds = \iiint_V \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{G}) dv$$

ἢ

$$\vec{C} \cdot \iiint_S \vec{n} \times \vec{G} ds = \vec{C} \cdot \iiint_V (\nabla \times \vec{G}) dv$$

καί ἐφ' ὅσον τὸ \vec{C} εἶναι ἐν αὐθαίρετον σταθερὸν διάνυσμα ἔχομεν :

$$\iiint_S \vec{n} \times \vec{G} ds = \iiint_V (\nabla \times \vec{G}) dv = \iiint_V \text{rot } \vec{G} dv.$$

• Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω δύο ἀξιολόγους προτάσεις :

Πρόταση XIII - 9-1. Ἐάν $\text{div } \vec{F}$ παριστᾷ τὴν ἀπόμηνον τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου \vec{F} , τότε ἰσχύει :

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \vec{F} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V},$$

ὅπου ΔV εἶναι ὁ ὀγκος τοῦ χωρίου, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας ΔS .

Ἀπόδειξις : Ἐν τοῦ ὀλουλ. τύπου κατὰ div ἔχομεν :

$$\iiint_{\Delta V} \text{div } \vec{F} dv = \iint_{\Delta S} \vec{F} \cdot \vec{n} ds \quad (1)$$

Ἐξ ἄλλου ἐν τοῦ θεωρήματος μέσης τιμῆς δι' ὀλουλ. ῥήματα, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος γίνεται :

$$\overline{\text{div } \vec{F}} \iiint_{\Delta V} dv = \overline{\text{div } \vec{F}} \cdot \Delta V \quad (2)$$

όπου $\overline{\text{div } \vec{F}}$ είναι μία τιμή του $\text{div } \vec{F}$ μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης τιμής του $\text{div } \vec{F}$ διά μέσου του ΔV .

Έν των (1) και (2) λαμβάνομεν:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\iint_{\Delta S} \vec{F} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V} \quad (3)$$

Λαμβάνοντας τα όρια αμφοτέρων των μελών της (3) καθώς το $\Delta V \rightarrow 0$, ή $\overline{\text{div } \vec{F}}$ τείνει προς το $\text{div } \vec{F}$, ὅθεν:

$$\text{div } \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \vec{F} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V}$$

Σημείωση: Από φυσικὴν σκοπιὰν ὁ λόγος:

$$\frac{\iint_{\Delta S} \vec{F} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V}$$

παριστᾷ τὴν ποτὴν ἀνά μονάδα ὄγκου τοῦ διανυσματικοῦ πεδίου \vec{F} διά μέσου τῆς ἐπιφανείας ΔS .

Πρόταση XIII - 9-2. Ἐάν f εἶναι μία βαθμωτὴ συνάρτησις καὶ \vec{F} μία διανυσματική, τότε ἰσχύουν οἱ κατωθὶ τύποι:

$$(i) \text{grad } f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} f \vec{n} ds}{\Delta V}, \quad (ii) \text{rot } \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} \vec{n} \times \vec{F} ds}{\Delta V}$$

ὅπου ΔV εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ χωρίου, τὸ ὁποῖον περιχέεται ὑπὸ τῆς στοιχειώδους ἐπιφανείας ΔS .

Ἀπόδειξις: (i) Ἐν τοῦ ὁλουλ. τύπου κατὰ grad ἔχομεν:

$$\iiint_{\Delta V} \text{grad } f \, dv = \iint_{\Delta S} f \vec{n} ds,$$

ἔξ ου:

$$\iiint_{\Delta V} (\text{grad } f \cdot \vec{l}) \, dv = \iint_{\Delta S} f \vec{n} \cdot \vec{l} \, ds.$$

Ἐχοντες τώρα ὑπ' ὄψιν τὴν σχέσιν (3) τῆς προηγουμένης προτάσεως λαμβάνομεν:

$$\overline{\text{grad } f \cdot \vec{l}} = \frac{\iint_{\Delta S} f \vec{n} \cdot \vec{l} ds}{\Delta V}$$

όπου $\overline{\text{grad} f \cdot \vec{T}}$ είναι μία μέση τιμή μεταξύ του maximum και του minimum του $\text{grad} f \cdot \vec{T}$ διά μέσου του ΔV .

Λαμβάνοντας τα όρια της τελευταίας σχέσεως καθώς το $\Delta V \rightarrow 0$, το $\overline{\text{grad} f \cdot \vec{T}}$ τείνει προς το $\text{grad} f \cdot \vec{T}$, ὥστε:

$$\text{grad} f \cdot \vec{T} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} f \cdot \vec{n} \cdot \vec{T} \, ds}{\Delta V} \quad (1)$$

ὁμοίως εὐρίσκουμεν:

$$\text{grad} f \cdot \vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} f \cdot \vec{n} \cdot \vec{J} \, ds}{\Delta V} \quad (2)$$

καί

$$\text{grad} f \cdot \vec{K} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} f \cdot \vec{n} \cdot \vec{K} \, ds}{\Delta V} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τὰς (1), (2), (3) ἀντιστοίχως μέ \vec{T} , \vec{J} , \vec{K} καί προσθέτοντες κατὰ μέλη ταύτας, ἔχοντες δέ ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{T} + (\vec{n} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + (\vec{n} \cdot \vec{K}) \cdot \vec{K}$$

καί

$$\vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{T}) \cdot \vec{T} + (\vec{n} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{J} + (\vec{n} \cdot \vec{K}) \cdot \vec{K}$$

λαμβάνομεν τὸ ἀποδεικτέον.

ii) Ἐν τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ τύπου κατὰ rot ἔχομεν:

$$\iiint_{\Delta V} \text{rot} \vec{F} \, dv = \iint_{\Delta S} \vec{n} \times \vec{F} \, ds.$$

Ἐργαζόμενοι τώρα ὡς καί εἰς τὴν περιπτῶσιν (i) δυνάμεθα εὐλόγως νὰ δειξῶμεν:

$$(\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{T} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\vec{n} \times \vec{F}) \cdot \vec{T} \, ds}{\Delta V} \quad (4)$$

ὁμοίως εὐρίσκουμεν:

$$(\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\vec{n} \times \vec{F}) \cdot \vec{J} \, ds}{\Delta V} \quad (5)$$

καί

$$(\text{rot} \vec{F}) \cdot \vec{K} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\vec{n} \times \vec{F}) \cdot \vec{K} \, ds}{\Delta V} \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντας τὰς (4), (5), (6) ἀντιστοίχως μέ \vec{T} , \vec{J} , \vec{K} καί προσθέτοντες ἐν συνεχείᾳ κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὸ ἀποδεικτέον.

§10. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΑΙ ΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΟΥΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙΣ

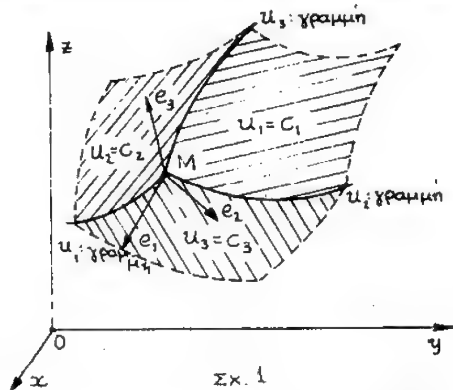
Ι. Έστω ότι αἱ ὀρθογωνίαι συντεταγμέναι (x, y, z) ἑνός σημείου M ἐκφράζονται ὡς συναρτήσεις τῶν u_1, u_2, u_3 ὑπὸ τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3). \quad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ἡ Ἰακωβιανὴ $\frac{D(x, y, z)}{D(u_1, u_2, u_3)} \neq 0$, τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) ἐπιλυόμενον ὡς πρὸς u_1, u_2, u_3 δίδει:

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z) \quad (2)$$

Ὡς γνωστὸν (βλ. κεφ. VIII, §3) δοθέντος ἑνός σημείου M μὲ ὀρθογωνίους συντεταγμένας (x, y, z) ἐκ τοῦ συστήματος (2) δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν μονοσημάντως τὰς συντεταγμένας (u_1, u_2, u_3) , αἱ ὁποῖαι ὡς γνωστὸν καλοῦνται **καμπυλόγραμμοι συντεταγμένοι τοῦ M** . Οὕτως αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ὀρίζουν ἕναν **μετασχηματισμὸν τῶν συντεταγμένων**. Αἱ ἐπιφανεῖαι $u_1 = C_1, u_2 = C_2, u_3 = C_3$, ὅπου C_1, C_2, C_3 σταθεραί, καλοῦνται **συντεταγμέναι ἐπιφάνειαι** καὶ ἕκαστον ζεύγος ἀπὸ αὐτὰς τὰς ἐπιφανείας τέμνεται κατὰ μίαν γραμμὴν καλουμένην **συντεταγμένην γραμμὴν** (βλ. Σχ. 1). Εἰς τὴν περίπτωσιν τομῆς αὐτῶν τῶν ἐπιφανειῶν κατὰ ὀρθὴν γωνίαν, αἱ καμπυλόγραμμοι συντεταγμένοι σχηματίζουν ἕνα **ὀρθοκανονικὸν σύστημα**. Αἱ u_1, u_2 καὶ u_3 συντεταγμέναι γραμμαὶ ἑνός καμπυλόγραμμου συστήματος εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς συντεταγμένας x, y, z ἑνός ὀρθογωνίου συστήματος.



Συμφάνως πρὸς τ' ἀνωτέρω δι' ἑκάστου σημείου $M(x_0, y_0, z_0)$ διέρχονται τρεῖς ἐπιφάνειαι ἥτοι αἱ $u_1(x, y, z) = u_1(x_0, y_0, z_0)$, $u_2(x, y, z) = u_2(x_0, y_0, z_0)$ καὶ $u_3(x, y, z) = u_3(x_0, y_0, z_0)$. Θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι αὐταὶ αἱ τρεῖς ἐπιφάνειαι τέμνονται μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίως. Αἱ ἐπιφάνειαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο δά μᾶς δώσουσι τρεῖς γραμμάς αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὀρθογωνίως εἰς τὸ σημεῖον $M(x_0, y_0, z_0)$. Ἡ καμπύλη τῆς τομῆς τῶν ἐπιφανειῶν $u_1 = C_1$ καὶ $u_2 = C_2$ δά καλεῖται u_3 γραμμὴ, ἐπειδὴ κατὰ μῆκος αὐτῆς τῆς γραμμῆς μόνον ἡ u_3 μεταβάλλεται.

Έστωσαν e_1, e_2, e_3 τα μοναδιαία διανύσματα διερχόμενα διά του σημείου $M(x_0, y_0, z_0)$ εφαπτομενιὰ τῶν γραμμῶν u_1, u_2, u_3 ἀντιστοίχως. Ἡ δὴ τὸ ∇u_3 εἶναι κάθετος εἰς τὴν ἐπιφάνειαν $u_3(x, y, z) = u_3(x_0, y_0, z_0)$ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ ∇u_3 εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ e_3 . Ἐντεῦθεν $e_3 = h_3 \cdot \nabla u_3$ (3) ὅπου h_3 εἶναι ἓνας βαθμωτὸς παράγων τῆς ἀναλογίας μεταξὺ τῶν e_3 καὶ ∇u_3 .

Ἐστω τώρα $d\tau_3$ ἓνα εφαπτομενιὸν διάνυσμα κατὰ μῆκος τῆς καμπύλης u_3 , τότε $|d\tau_3| = d\ell_3$. Προφανῶς δὲ ἔχουμεν $d\tau_3 \cdot e_3 = d\ell_3$ καὶ $d\tau_3 \cdot u_3 = d\tau_3 \cdot h_3 \nabla u_3$.

$$\text{Εἶναι δέ, } d\ell_3 = d\tau_3 \cdot e_3 = d\tau_3 \cdot h_3 \nabla u_3 = h_3 \cdot d\tau_3 \cdot \nabla u_3 \quad (4)$$

$$\text{Ἐστω } \tau_3 = x e_1 + y e_2 + z e_3 \Rightarrow d\tau_3 = dx e_1 + dy e_2 + dz e_3 \quad (5)$$

$$\text{Ἐξ ἄλλου } \nabla u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u_3}{\partial y} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z} e_3 = \ell^3 \quad (6)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (5) καὶ (6) ἔσωτεριωὺς λαμβάνομεν:

$$d\tau_3 \cdot \nabla u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} dx + \frac{\partial u_3}{\partial y} dy + \frac{\partial u_3}{\partial z} dz = du_3 \quad (7)$$

Ὅθεν, ἡ (4) λόγῳ τῆς (7) γράφεται: $d\ell_3 = h_3 du_3$. Κατ'ἀναλογίαν ἔχομεν:

$$d\ell_1 = h_1 du_1, d\ell_2 = h_2 du_2, d\ell_3 = h_3 du_3 \quad (8)$$

Τὸ δὲ διαφοριὸν τοῦ μήκους τοῦ τόξου δὲ εἶναι:

$$d\ell^2 = d\ell_1^2 + d\ell_2^2 + d\ell_3^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \quad (9)$$

Κατ'ἀναλογίαν πρὸς τὸν (3) δὲ ἔχουμεν:

$$e_1 = h_1 \nabla u_1, e_2 = h_2 \nabla u_2, e_3 = h_3 \nabla u_3 \quad (10)$$

Καὶ οὕτω λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_2 \times e_3 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 \\ e_2 &= e_3 \times e_1 = h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 \\ e_3 &= e_1 \times e_2 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Οἱ συντελεσταὶ h_1, h_2, h_3 καλοῦνται *παράμετροι τοῦ Lamé*

Τὸ δὲ μιαιτὸν γινόμενον δὲ εἶναι:

$$\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{e_1}{h_1} \cdot \frac{e_2}{h_2} \times \frac{e_3}{h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \quad (12)$$

Τὸ δὲ διαφοριὸν τοῦ ὄγκου δὲ εἶναι

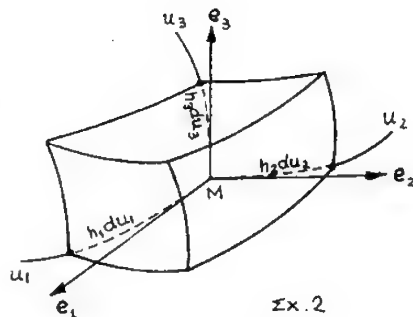
$$dV = d\ell_1 \cdot d\ell_2 \cdot d\ell_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (13)$$

Ἐλ. σχετιωὺς Σχ. 2 διὰ τὸ διαφοριὸν τοῦ ὄγκου

II. Έστω $U(u_1, u_2, u_3)$ μία βαθμωτή συνάρτηση και $\vec{F}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\mathbf{e}_1 + A_2(x, y, z)\mathbf{e}_2 + A_3(x, y, z)\mathbf{e}_3$ μία διανυσματική ποσότητα ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα καμπυλογραμμών συντεταγμένων u_1, u_2, u_3 .

Αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα κάτωθι:

i) $\nabla U = \text{grad} U = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$ (1)



ii) $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$ (2)

iii) $\nabla \times \vec{F} = \text{rot} \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$ (3)

iv) $\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right]$ (4)

Εάν $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ και τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ αντιματασταθούν υπό των i, j, k , τότε οι ανωτέρω τύποι ανάγονται εις τας συνήθεις ευφράσεις των ορθογωνίων συντεταγμένων, όπου οι (u_1, u_2, u_3) έχουν αντιματασταθεί υπό των (x, y, z) .

Απόδειξεις των τύπων (1), (2) και (4). i) Έστω ότι ζητούμεν την έκφραση του gradient εις καμπυλογραμμους ορθογωνίους συντεταγμένους. Είναι γνωστόν, ότι η προβολή του gradient μιας βαθμωτής συνάρτησεως $U = U(u_1, u_2, u_3)$ επί ενός αυθαίρετου άξονος συμπίπτει με την παράγωγον της U ως προς κατεύθυνσιν αυτόν τον άξονα. Οθεν, προς υπολογισμόν των συνιστωσών του διανύσματος $\text{grad} U$ ως προς την βάση $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ πρέπει να εύρωμεν τας παραγώγους της U ως προς διευθύνσεις που καθορίζονται υπό αυτών των διανυσμάτων. Έστω ΔU είναι η διαφορά μεταξύ των τιμών της συνάρτησεως U εις τα σημεία M_1 και M όπου $\vec{MM}_1 = \ell_1 \cdot \mathbf{e}_1$. Τότε συμφωνως προς τους όρισμούς ΣΙΙΙ-4-1 και ΣΙΙΙ-3-1 θα έχωμεν:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}_1} = \lim_{\Delta \ell_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta \ell_1}, \text{ όπου } \vec{MM}_1 = \ell_1 \cdot \mathbf{e}_1$$

Επειδή κατά μήκος της u_1 εις το M είναι $\Delta \ell_1 = h_1 \Delta u_1$, η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \text{grad} U = \lim_{\Delta u_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{h_1 \Delta u_1} = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_1}$$

Κατ' αναλογία αι δύο άλλαι συνιστώσαι του gradient θα είναι ίσαι προς $\frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_2}$ και $\frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_3}$.

Εντεῦθεν τελικῶς ἔχουμεν:

$$\text{grad } U = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_3} \cdot \mathbf{e}_3.$$

ii) λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους (10) καὶ (11) δά ἔχουμεν:

$$\vec{F} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$$

$$= A_1 h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_2 h_3 h_1 \nabla u_3 \times \nabla u_1 + A_3 h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2$$

Συνεπῶς λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς τύπους περιέχοντες τὸ ∇ τῆς §6 δά ἔχουμεν:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \text{div } \vec{F} = \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 + A_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\ &+ \nabla (A_2 h_3 h_1) \cdot \nabla u_3 \times \nabla u_1 + A_2 h_3 h_1 \nabla \cdot (\nabla u_3 \times \nabla u_1) \\ &+ \nabla (A_3 h_1 h_2) \cdot \nabla u_1 \times \nabla u_2 + A_3 h_1 h_2 \nabla \cdot (\nabla u_1 \times \nabla u_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\rightarrow \text{Εἶναι δέ, } \nabla (A_1 h_2 h_3) \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1}.$$

Εἶναι δέ καὶ $\nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = 0$.

κατ' αναλογία εὐρίσκουμεν καὶ τὰς ἐκφράσεις τῶν ὑπολοίπων ὅρων τοῦ τύπου (1) καὶ ὅτε αὐτὸς τελικῶς γράφεται:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (h_3 h_1 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \right]$$

iv) Ἐστω ἡ βαθμωτὴ συνάρτησις $U(u_1, u_2, u_3)$. Ὡς γνωστὸν συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (1) δά ἔχουμεν:

$$\nabla U = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_1} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_2} \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_3} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

θεωροῦντες ἤδη τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν ∇U καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (2) δι' αὐτὴν εὐρίσκουμεν:

$$\nabla^2 U = \text{div } \nabla U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right]$$

Παρατήρησις: Ὁ τύπος (3) ἀποδεικνύεται κατὰ τρόπον ἀνάλογον ὅπως ὁ (2).

§ 11. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΕΙΣ ΤΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑΣ

ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ

I. Διαφορικὸν τόξου. Ὡς γνωστὸν τὸ διαφορικὸν τόξου εἰς κυλινδρικοῦς συντεταγμένους $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$ ὅπου $\rho > 0$, καὶ $0 \leq \theta < 2\pi$ εἶναι: $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2$. (Μεταβάλλεται αἱ ρ, θ, z).

Συγκρίνοντας τον τύπον αυτόν με τον (9) θα πρέπει να λάβωμεν

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1.$$

Το δε διαφοριούν του τόξου εις σφαιρικός συντεταγμένους $x = \rho \sin \theta \mu \phi$, $y = \rho \mu \phi$, $z = \rho \cos \theta$ όπου $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$ παρέχεται υπό του τύπου:

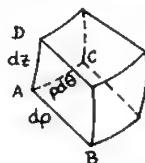
$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + \rho^2 \sin^2 \phi d\theta^2 \quad (\text{βλ. σελ. 101, 3\text{η} \text{ εφαρμογή}).$$

Ἐδῶ μεταβληταί εἶναι αἱ ρ, θ, ϕ . Εἶναι δὲ $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = \rho \sin \phi$.

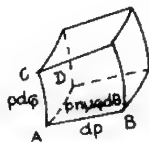
II. Διαφοριούν ὄγκου: Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν τύπον (13) τῆς § 10 τὸ διαφοριούν τοῦ ὄγκου διὰ κυλινδρικός συντεταγμένους ὅπου $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$ καὶ $u_1 = \rho$, $u_2 = \theta$ καὶ $u_3 = z$ γίνεται: $dV = \rho d\rho d\theta dz$. (βλ. Σχ. 1)

Ἐάν ἀναφερόμεθα εἰς σφαιρικός συντεταγμένους τότε $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = \rho \sin \phi$ καὶ $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = \theta$ καὶ ὁ (13) γίνεται:

$$dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \quad (\text{βλ. Σχ. 2})$$



Σχ. 1



Σχ. 2

III. Αἱ τελεστικαὶ διαφορικαὶ ἐκφράσεις εἰς κυλινδρικός συντεταγμένους.

Εἰς τὰς κυλινδρικός συντεταγμένους ὅπως εἶδαμεν εἰς τὸ διαφοριούν τοῦ τόξου αἱ παράμετροι τοῦ Lamé θα πρέπει νὰ λάβουν τὰς τιμὰς $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$ καὶ ὡς ἐν τούτῳ οἱ τύποι (1) → (4) τῆς § 10 διαμορφώνονται ἀναλόγως. Οὕτω ἔχομεν:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_z \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (3)$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (4)$$

ὅπου \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_z παριστοῦν ἀντιστοιχῶς τὰ διανύσματα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς κυλινδρικός συντεταγμένους ρ, θ, z καὶ A_ρ, A_θ, A_z εἶναι τὰ μέτρα τῶν προβολῶν τῆς \vec{F} ἐπὶ τῶν $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$.

Εφαρμογή: Νά ληδθῇ ἡ ἔξισωσις $\nabla^2 U = 0$ ὑποθέτοντες $U = U(\rho)$, ὅπου $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

Λύσις: Ἀπὸ τῆν (4) ἔχομεν: $\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dU}{d\rho} \right) = 0$ ἢ $\rho \frac{dU}{d\rho} = C_1$ καὶ $U = C_1 \log \rho + C_2$

IV. Αἱ τελεστηαὶ διαφορικαὶ ἐκφράσεις εἰς σφαιρικὰς συντεταγμέναις.

Εἰς τὰς σφαιρικὰς συντεταγμέναις αἱ παράμετροι τοῦ Lamé λαμβάνουν τὰς τιμὰς $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = \rho \sin \varphi$ καὶ ὡς ἐν τούτῳ οἱ τύποι (1) — (4) τῆς § 10 καθίστανται ἀναλόγως. Οὕτω ἔχομεν:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \cdot \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \cdot \frac{\partial(\sin \varphi A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{1}{\rho \sin \varphi} \left(\frac{\partial(A_\theta \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho \sin \varphi} \cdot \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (3)$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad (4)$$

ὅπου \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_θ παριστοῦν ἀντιστοίχως τὰ διανύσματα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς σφαιρικὰς συντεταγμέναις ρ , φ , θ καὶ A_ρ , A_φ , A_θ εἶναι τὰ μέτρα τῶν ἀντιστοιχῶν προβολῶν τῆς \vec{F} .

Ἀσκήσις: Νά ληδθῇ ἡ ἔξισωσις $\nabla^2 U = 0$ εἰς σφαιρικὰς συντεταγμέναις ἐὰν $U = U(\rho)$, ὅπου $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Εφαρμογαί: Νά δειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα τῶν κυλινδρικοῦν συντεταγμένων εἶναι ὀρθόγωνιον;

Ἀπόδειξις: Τὸ διάνυσμα θέσεως καὶδε σημείου εἰς κυλινδρικοῦς συντεταγμέναις εἶναι:

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} = \rho \sin \theta \cdot \mathbf{i} + \rho \cos \theta \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}.$$

Τὰ ἐξαπομεινυῖα διανύσματα εἰς τὰς ρ , θ καὶ z γραμμὰς δίδονται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$ ὅπου εἶναι:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \sin \theta \cdot \mathbf{i} + \cos \theta \cdot \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\rho \cos \theta \cdot \mathbf{i} + \rho \sin \theta \cdot \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

Τὰ δὲ μοναδιαῖα εἰς αὐτὰς τὰς διευθύνσεις εἶναι:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} : \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right| = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}} = \sin \theta \cdot \mathbf{i} + \cos \theta \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} : \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| = \frac{-\rho \cos \theta \cdot \mathbf{i} + \rho \sin \theta \cdot \mathbf{j}}{\sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta}} = -\cos \theta \cdot \mathbf{i} + \sin \theta \cdot \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} : \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| = \mathbf{k}.$$

Τότε, $\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\theta = (\sin\theta \mathbf{i} + \eta\mu\theta \cdot \mathbf{j}) \cdot (-\eta\mu\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}) = 0$

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z = (-\eta\mu\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho = \mathbf{k} \cdot (\sin\theta \cdot \mathbf{i} + \eta\mu\theta \cdot \mathbf{j}) = 0$$

Όθεν, τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_z σχηματίζουν ὀρθογ. σύστημα.

23/. Νὰ παρασταθῇ τὸ διάνυσμα $\vec{F} = z \cdot \mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + y \cdot \mathbf{k}$ εἰς κυλινδρικοῦς συντεταγ-
μένες δηλ. νὰ προσδιορισθοῦν τὰ A_ρ , A_θ , A_z .

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένη ἐφαρμογὴ ἔχομεν:

$$\mathbf{e}_\rho = \sin\theta \cdot \mathbf{i} + \eta\mu\theta \cdot \mathbf{j} \quad (1); \quad \mathbf{e}_\theta = -\eta\mu\theta \cdot \mathbf{i} + \sin\theta \cdot \mathbf{j} \quad (2); \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \quad (3)$$

Ἐπιλύοντες τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ὡς πρὸς τὰ διανύσματα \mathbf{i} καὶ \mathbf{j} εὐρίσκουμεν:

$$\mathbf{i} = \sin\theta \cdot \mathbf{e}_\rho - \eta\mu\theta \cdot \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{j} = \eta\mu\theta \cdot \mathbf{e}_\rho + \sin\theta \cdot \mathbf{e}_\theta \quad \text{εἶναι δὲ καὶ } \mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ \vec{F} εὐρίσκουμεν:

$$\vec{F} = (z \sin\theta - 2\rho \sin\theta \eta\mu\theta) \mathbf{e}_\rho - (z \eta\mu\theta + 2\rho \sin^2\theta) \mathbf{e}_\theta + \rho \eta\mu\theta \mathbf{e}_z$$

Όθεν, $A_\rho = z \sin\theta - 2\rho \sin\theta \eta\mu\theta$, $A_\theta = -z \eta\mu\theta - 2\rho \sin^2\theta$, $A_z = \rho \eta\mu\theta$.

33/. Δείξατε ὅτι εἰς κυλινδρικοῦς συντεταγμένες (ρ, θ, z) ἰσχύει:

$$\text{i) } \text{rot}(z \text{ grad } \theta) = -\text{grad}(\log \rho), \quad \text{ii) } \text{rot}(\theta \text{ grad } \rho) = -\frac{1}{\rho} \text{ grad}(z)$$

Ἀπόδειξις: i) ἔχομεν: $\text{grad } \theta = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \theta}, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \left(0, \frac{1}{\rho}, 0 \right)$

Όθεν, $\text{rot}(z \text{ grad } \theta) = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\rho} \cdot \rho \right), 0, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (z) \right) = \left(-\frac{1}{\rho}, 0, 0 \right)$

καὶ $\text{grad}(\log \rho) = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \log \rho, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \log \rho, \frac{\partial}{\partial z} \log \rho \right) = \left(\frac{1}{\rho}, 0, 0 \right)$

Όθεν, $\text{rot}(z \text{ grad } \theta) = -\text{grad}(\log \rho)$.

42/. Δείξατε ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίου $\vec{F} = 2\rho \sin\theta \eta\mu\theta \mathbf{e}_\rho - \rho \eta\mu\theta \sin\theta \mathbf{e}_\theta + \rho \sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_z$,
ὅπου ρ, θ, ϕ σφαιρικοὶ συντεταγμένοι εἶναι ἀστροβόλον.

Ἀπόδειξις: Ἀρμεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\text{rot } \vec{F} = 0$ ἥτοι:

$$\frac{1}{\rho \eta\mu\theta} \left(\frac{\partial(A_\theta \eta\mu\theta)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho \eta\mu\theta} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_\theta = 0$$

Εἶναι: $A_\rho = 2\rho \sin\theta \eta\mu\theta$, $A_\theta = -\rho \eta\mu\theta \sin\theta$, $A_\phi = \rho \sin\theta \cos\theta$

Όθεν, $\frac{\partial(A_\theta \eta\mu\theta)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} = -\rho \eta\mu\theta \sin\theta + \rho \eta\mu\theta \sin\theta = 0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ὁ μηδενισμὸς τῶν ὑπολοίπων καὶ οὕτω τὸ πεδίου
εἶναι ἀστροβόλον.

§ 10. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΜΗΔΕΝΙΚΗΝ ΑΠΟΚΛΙΣΙΝ (σωληνοειδή διανυσματικά πεδία)

Ἐστω ἓνα διανυσματικόν πεδίων $\vec{F}(M) = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$, ἔχον πρώτας μεριμὰς παραγώ-
ρους συνεχεῖς ἐπὶ ἐνὸς χωρίου D . —

Δίδομεν τὸν κατωθὶ ὀρισμὸν:

Ὁρισμός XIII-10-1. Τὸ διανυσμ. πεδίων \vec{F} καλεῖται σωληνοειδές, ἂν εἰς καθεστ-
μεῖον τοῦ ἢ ἀποκλίσις εἶναι μηδέν, ἥτοι:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

Οὕτω τὸ πεδίων ταχυτήτων ἐνὸς ἀσυμπίεστου ὑγροῦ εἶναι ἓνα παράδειγμα σωλη-
νοειδοῦς πεδίου.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ θεωρηθὲν διανυσμ. πεδίων $\vec{F}(M)$ εἶναι τὸ διανυσματικόν πε-
δίων τῶν ταχυτήτων ἐνὸς μονίμου ρεύματος.

Ἡ ὀλίγη ροή διὰ μέσου μιᾶς ἀπληθὺς υλικοῦς ἐπιφανείας S , συμφώνως πρὸς τὸν ὀ-
ρισμὸν XIII-8-2 καὶ τὸν ὀλοκληρωτικὸν τύπον κατὰ div (βλ. σελ. 458) θὰ εἶναι:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S F_n \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv \quad (1)$$

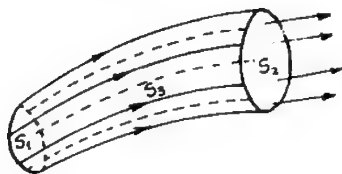
Ἐὰν $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου M , αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ ἔκροή ἀπὸ τοῦ M
εἶναι θετικὴ, δηλ. ἀπὸ τὴν περιοχὴν τοῦ M θὰ ἐξέρχεται περισσότερον ρευστό, ἢ ὅτι
εἰσέρχεται εἰς αὐτήν, διὰ τοῦτο τὸ σημεῖον M καλεῖται τότε μία «πηγή», (source).

Ἀντιθέτως, ἐὰν $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ σημείου M , ἡ «ἔκροή» εἶναι τότε μία εἰς-
ροή, καθόσον τότε θὰ εἰσέρχεται εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ M περισσότερον ρευστό ἀπὸ ὅτι
ἐξέρχεται ἐξ αὐτῆς. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τὸ σημεῖον M καλεῖται «καταβόδρα»
(sink), ἄλλως «ἀρνητικὴ πηγή».

Ἐὰν εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ M δὲν ὑπάρχουν πηγές ἢ καταβόδρες, τότε $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ (σω-
ληνοειδές πεδίων). Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν, ὁ τύπος (1) δίδει ὅτι: ἡ ὀλίγη
ροή διὰ μέσου μιᾶς οἰασδήποτε υλικοῦς ἐπιφανείας θὰ εἶναι 0, ἐπομένως τό-
σος ὅγκος ρευστοῦ θὰ ῥεῖ ἐκ τοῦ ἔσωτεριου πρὸς τὸ ἔξωτεριον τοῦ S , ὅσος καὶ
ἐκ τοῦ ἔξωτεριου πρὸς τὸ ἔσωτεριον τοῦ S .

Διὰ τὰ σωληνοειδῆ πεδία ἔχομεν τὸν καλούμενον νόμο διατηρήσεως τῆς ροῆς
τὸν ὁποῖον ἐξάγομεν ἀμέσως κατωτέρω:

Έστω \vec{F} ένα σωληνοειδές πεδίο, δηλ. $\text{div } \vec{F} = 0$. Θεωρούμεν έναν « ρευματι-
κόν σωλήνα » του διαν. πεδίου και λαμβάνο-
μεν τώ μέρος του, τό άppόιον περιέχεται με-
ταξύ δύο τομών S_1 και S_2 (βλ. Σχ.1).



Σχ. 1.

Αυτάί αι τομαί μαζί μέ την πλευριικήν επι-
φάνειαν S_3 δημιουργούν μίαν κλειστήν επι-
φάνειαν S .

Επειδή τό πεδίοn ύπετέθη σωληνοειδές, ό τύπος (1) δίδει:

$$\iint_S F_n ds = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (2)$$

Αλλά:

$$\iint_S F_n ds = \iint_{S_1} F_n ds + \iint_{S_2} F_n ds + \iint_{S_3} F_n ds \quad (3)$$

όπου έναστοn επιφανειακόν όλουμήρωμα λαμβάνεται επί της έξωτερικης πλευράς
της αντίστοιχου επιφάνειας.

Η ροή διά μέσου της πλευριικής επιφάνειας S_3 είναι προφανώς μηδέν, καθό-
σον έπ' αυτής έχομεν $\vec{F} \perp \vec{n}$ και έπομένως ό τύπος (2) δίδει: $\iint_{S_3} F_n ds = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (4)$

Όθεν: έκ των (2), (3) και (4) έχομεν:

$$\iint_{S_1} F_n ds + \iint_{S_2} F_n ds = 0,$$

ήτοι:

$$\iint_{S_1} F_n ds = - \iint_{S_2} F_n ds \quad (5)$$

Εάν τώρα λάβωμεν την έσωτερικήν πλευράν της S_1 , δηλ. αντιστρέψωμεν την
διεύθυνσιν του καθέτου της διανύσματος και διατηρήσωμεν την έξωτερικήν
πλευράν της επιφάνειας S_2 , ή ισότης (5) γίνεται:

$$\iint_{S_1} F_n ds = \iint_{S_2} F_n ds \quad (6)$$

Όθεν: η ροή του σωληνοειδούς διαν. πεδίου \vec{F} διά μέσου καθε τομής του « ρευ-
ματιού σωλήνος » έχει μία και την αὐτήν τιμήν.

Ἐάν τὸ διανυσμ. πεδίου \vec{F} λαμβάνεται ὡς πεδίου ταχυτήτων ἑνὸς ἀσυμπίεστου ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει πηγές ἢ καταβόθρες, ἡ σχέση (6) δηλοῖ ὅτι: ἡ ποσότης τοῦ ὑγροῦ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ μίαν τομὴν τοῦ « ρευματιοῦ σωλήνος » εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλας τὰς τομὰς.

§ II. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Ὡς ἐφαρμογὴν τῶν ἀνωτέρω ἐνοιῶν, ἃς ἐξάγωμεν μίαν ἀπὸ τὰς βασικὰς ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τῶν ρευστῶν, τὴν καλουμένην ἐξίσωσιν συνεχείας. Ἐστω \vec{v} (P, Q, R) τὸ πεδίου τῶν ταχυτήτων ἑνὸς κινουμένου ὑγροῦ, πυκνότητος $\rho = \rho(x, y, z, t)$, δηλαδή τὸ ὑγρὸ δὲν ὑποτίθεται ἀσυμπίεστο καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ πυκνότης τοῦ ρ δύναται νὰ ἐξαρτᾶται καὶ ἐκ τοῦ χρόνου t .

Ἐάν τῶρα ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς οὐδὲν σημεῖον τοῦ διανυσμ. πεδίου \vec{v} ὑπάρχουν πηγὰς ἢ καταβόθραι, τότε μεταξὺ τῆς ταχύτητος τοῦ ὑγροῦ καὶ τῆς μεταβολῆς τῆς πυκνότητος ὑφίσταται ἡ σχέση:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \text{ ὅπου } \mathbf{J} = \rho \cdot \vec{v} \quad (1)$$

Πράγματι: ἂν θεωρήσωμεν μίαν τυχούσαν ἐπιφάνειαν S , ἡ ὁποία περιυλίζει ἓνα ὄγκον V τοῦ ὑγροῦ.

Ἡ ἐντὸς τοῦ ὅγκου V μᾶσα τοῦ ὑγροῦ εἰς οἰανδήποτε χρονικὴν στιγμὴν εἶναι:

$$M = \iiint_V \rho \, dv$$

καὶ ἐκ αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dv = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv \quad (2)$$

Ἐξ ἄλλου ἡ μεταβολὴ τῆς ποσότητος τοῦ ὑγροῦ, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸν ὄγκον V εἶναι ἴση μετὰ τὴν ροὴν τοῦ ὑγροῦ διὰ μέσου τῆς ἐπιφανείας S , ἥτοι:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = - \iint_S (\rho \vec{v})_n \, ds \quad (3)$$

ὅπου \vec{n} εἶναι τὸ καθετὸν διάνυσμα. Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον ἐτέθη, διότι ἡ ποσότης τοῦ ὑγροῦ, ἡ ὁποία περιέχεται εἰς τὸν ὄγκον V , ἐλαττοῦται ὅταν ἡ ταχύτης

κατευθύνεται προς τα έξω.

Μετασχηματίζοντας το επιφανειακόν ολοκλήρωμα διά μέσου του ολοκληρ. τύπου κατά div έχουμε:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = - \iint_S (\rho \vec{u})_n ds = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dv \quad (4)$$

Εν τῶν (2) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{u}) dv$$

$$\text{ἢ} \quad \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right] dv = 0 \quad (5)$$

Εν ταύτης, ἐφ' ὅσον τὸ V ἐληφθῇ ἀνθαίρετον, συνάγομεν ὅτι ἡ ὑπὸ ολοκληρῶσιν συνάρτησις, ὑποτιθεμένη συνεχῆς, εἶναι ἐν ταυτοῦτος ἴση μὲ μηδέν (διὰ τι;)

Ὅθεν ἐν τῆς (5) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (6)$$

Οὕτως ἔχομεν εὖρει τὴν ἐξίσωσιν ἡ ὁποία συνδέει τὴν ταχύτητα καὶ τὴν πυκνότητα ἐνὸς κινουμένου ὑγροῦ, διὰ καθε περιοχὴν ἡ ὁποία δὲν ἔχει πηγὰς ἢ καταβόρας.

Ἡ ἐξίσωσις (6) εἶναι γνωστὴ ὡς ἐξίσωσις συνεχείας. Εἰσάγοντες δὲ τὸ διάνυσμα $\vec{J} = \rho \vec{u}$, ἡ ἐξίσωσις (6) γράφεται:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0, \quad \text{ὅπου } \vec{J} = \rho \vec{u} \quad (7)$$

Ἐάν τὸ ρ εἶναι σταθερόν, τὸ ὑγρὸν εἶναι ἀσυμπίεστον καὶ τότε $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, δηλ. τὸ διανυσματικὸν πεδίου \vec{u} εἶναι σωληνοειδές.

Ἡ ἐξίσωσις συνεχείας ἐμφανίζεται ἐπίσης εἰς τὴν ἡλεκτρομαγνητικὴν θεωρίαν, ὅπου τὸ ρ εἶναι ἐκεῖ τὸ «φορτίον πυκνότητος» καὶ τὸ $\vec{J} = \rho \vec{u}$ εἶναι ἡ «ρευματικὴ πυκνότης».

§12. ΝΕΥΤΩΝΕΙΑ ΠΕΔΙΑ

Ἐστω τὸ σταθερόν σημεῖον $A(a, b, \gamma)$ καὶ τὸ μεταβλητόν σημεῖον $M(x, y, z)$ καὶ τὸ διάνυσμα $\vec{r} = \vec{MA}$. Ἐστω $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2}$.

Ἐνα διανυσματικὸν πεδίου τῆς μορφῆς:

$$\vec{F}(M) = \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \mu \frac{\vec{r}}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

όπου μ σταθερά, ιαδείται Νευτώνειον πεδίου.

Τούτο όρίσεται εἰς όλοῦτηρον τόν χώρον R^3 εὐτός τοῦ σημείου $A(\alpha, \beta, \gamma)$.

Παραδείγματα:

19/. Τό πεδίου τῆς ἔλξεως τό όποϊον παράγει σῶμα μάζης m_0 εὐρίσκούμενον εἰς τό σημείο A , εἶναι:

$\vec{F}(M) = k \cdot m_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$, όπου k ἡ παγυόσμιοσ σταθερά καί $\vec{r} = \vec{MA}$, εἶναι ἓνα Νευτώνειον πεδίου. Εἶναι δέ $\|\vec{F}(M)\| = \frac{k m_0}{r^2}$.

20/. Τό ἡλετροστατιυόν πεδίου τό όποϊον παράγεται από ἓνα φορτίον q_0 , τό όποϊον εὐρίσκειται εἰς τό σημείο A , εἶναι:

$\vec{E}(M) = -\frac{q_0}{\epsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$, όπου ϵ ἡ διηλετριυή σταθερά, εἶναι ἓνα Νευτώνειον πεδίου.

Ἐν τῆς (1) προυύπει ἄμεσα ότι: $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$, $\text{div } \vec{F} = 0$.

Ἐθεν συμφώνως πρós τούς όρισμούς XIII-6-2 καί XIII-10-1 τό Νευτώνειον πεδίου εἶναι ἀστροβίλον καί σωληνοειδές.

Υπάρκει μία πρσγματιυή συνάρτησις Φ τοιαύτη, ώστε $\text{grad } \Phi = \vec{F}(M)$ καί ως τοιαύτη δύναμεθα νά θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν:

$$\Phi(M) = \frac{\mu}{r} + c, \text{ όπου } c \text{ σταθερά}$$

Τὴν συνάρτησιν $U(M) = -\Phi(M) = -\frac{\mu}{r} - c$, καλοῦμεν δυναμιυόν τοῦ διανυσματιυού πεδίου $\vec{F}(M)$.

Ἐάν δέ θέλωμεν τό ἄνωτέρω δυναμιυόν νά μηδενίκεται εἰς τό ἄπειρον θά πρέπει νά λάβωμεν $c=0$ καί οὕτω ἡ συνάρτησις: $U(M) = -\frac{\mu}{r}$ (2) ιαδείται Νευτώνειον δυναμιυόν τοῦ Νευτανείου πεδίου (1).

Ἄν εἰς τόν χώρο R^3 θεωρήσωμεν ἡ τό πλῆθος σημεία A_1, A_2, \dots, A_n , τότε τό διανυσματιυόν πεδίου:

$$\vec{F}(M) = \sum_{p=1}^n \mu_p \cdot \frac{\vec{r}_p}{r_p^3} \quad (3), \text{ όπου } \mu_p \text{ σταθεραί καί } \vec{r}_p = \vec{MA}_p,$$

ιαδείται Νευτώνειον πεδίου παραγόμενον από μίαν διαμευριμένη ιατανομή σημείων.

Τό Νευτώνειον δυναμιόν τοῦ πεδίου (3) δά εἶναι : $U(M) = - \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{r_p}$,
 ὅπου $r_p = \|\vec{r}_p\|$.

Τό διανυσματικόν πεδión τó ὁποῖον ὀρίζεται ὑπό τοῦ ἀνωτέρω ἐπισημνωμένου ὁλοκληρώματος :

$$\vec{F}(M) = \int_{\Sigma} \rho_e(P) \frac{\vec{r}}{r^3} d\ell, \text{ ὅπου } \vec{r} = \vec{MP} \text{ (} P \in \Sigma \text{ καί } M \notin \Sigma \text{)}$$

υαλεῖται ἐπισημνωμένον Νευτώνειον πεδión, τó ὁποῖον παράχεται ἀπό συνεχῆ κατανομή μέ γραμμική πυκνότητα $\rho_e(P)$.

Υπάρχει πάντοτε μία πραγματική συνάρτησις U τοιαύτη, ὥστε : $\text{grad } U = \vec{F}$ καί ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ ἐν λόγω συνάρτησις παρέχεται ὑπό τοῦ τύπου :

$U(M) = - \int_{\Sigma} \frac{\rho_e}{r} d\ell$ καί υαλεῖται δυναμιόν ὀφειλόμενον εἰς γραμμικήν κατανομήν.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νά ὀρίσωμεν τά διανυσματικά πεδία

$$\vec{F}(M) = \iint_{\Sigma} \rho_s \frac{\vec{r}}{r^3} ds \text{ καί } \vec{F}(M) = \iiint_{\Omega} \rho_w \frac{\vec{r}}{r^3} dw, \text{ ὅπου } \rho_s \text{ καί } \rho_w \text{ ἡ ἐπιφανειακή καί}$$

ἡ χωρική πυκνότης ἀντιστοίχως καί $M \notin \Sigma$, $M \notin \Omega$, μέ δυναμικά : $U(M) = - \iint_{\Sigma} \frac{\rho_s}{r} ds$

$U(M) = - \iiint_{\Omega} \frac{\rho_w}{r} dw$ υαλούμενα ἐπιφανειακόν καί χωρικόν δυναμιόν ἀντιστοίχως.

§ 13. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

“Ενα ἡλεκτρομαγνητικόν πεδión περιγράφεται ἀπό τήν θεωρίαν τοῦ Maxwell, ἀπό δύο διανυσματικά πεδία \mathbf{E} καί \mathbf{H} καί $\mathbf{E} = \|\mathbf{E}\|$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἡλεκτρικοῦ πεδίου καί $\mathbf{H} = \|\mathbf{H}\|$ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Ἀμφότερα τά \mathbf{E} καί \mathbf{H} μεταβάλλονται μετά τοῦ χρόνου.

Ἀπὸντως ἀγνοοῦν τά \mathbf{E} καί \mathbf{H} ἵκανοποιοῦν τὰς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell, ἥτοι :

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (1) \quad , \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3) \quad , \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ὅπου ρ εἶναι ἡ πυκνότης τοῦ ἡλεκτρικοῦ φορτίου καί c εἶναι μία παγκοσμίως σταθερά.

Εἰς τήν ἡλεκτροστατικὴν περίπτωσιν, $\mathbf{H} = 0$ καί οὕτω λόγω τῆς (4), τó \mathbf{E} δέν ἐξαρτᾶ-

ται έυ του χρόνου και λόγω της (3) θα έχουμε: τότε $E = 0$ (5)

Έντευθεν, λόγω της (5), (έως ένα απλώς συννευτιυόν πεδίου), υπάρχει μία πραγματική συνάρτησις U τοιαύτη, ώστε να έχουμε: $E = -\text{grad } U$ (6)

Η συνάρτησις U ιαλιείται *ήλετροστατιυόν δυναμιυόν*.

Λόγω των (1) και (6) ή U θα ιυανοποιή την *έξίσωσιν του Poisson*, ήτοι:

$$\text{div grad } U = -4\pi\rho \quad (7)$$

Είς ένα πεδίου ιευού φορτίου ($\rho=0$), ή U λόγω της (7) θα ιυανοποιή την *έξίσωσιν του Laplace*, ήτοι:

$$\text{div grad } U = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 U = 0 \quad (8)$$

Η συνάρτησις U , διά δοδεύσα ιατανομή φορτίου, δύναται να υπολογισθί από τόν Νόμον του Coulomb. Ούτω διά ένα φορτίον e είς τό σημείον (x, y, z) τό δυναμιυόν $U(x, y, z)$ παρέχεται υπό του τύπου:

$$U = \frac{e}{r} + C \quad (9), \quad \text{όπου} \quad r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \quad \text{και} \quad C \text{ σταθερά}$$

Διά ένα πεπερασμένον πλήθος φορτίων τό δυναμιυόν αυτών εύρίσεται δι' απλής προσθέσεως συναρτήσεων του τύπου (9).

Εάν τό φορτίον είναι ιατανεμημένον ιατά μήκος μιās ιαμπύλης C και ρ είναι ή πυκνότης αυτού (φορτίον ανά μονάδα μήκους) τότε τό δυναμιυόν είς τό σημείον (x_1, y_1, z_1) παρέχεται υπό του τύπου:

$$U(x_1, y_1, z_1) = \int_C \frac{\rho}{r_1} dl + C \quad (10), \quad \text{όπου} \quad r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

Τέλος, εάν τό φορτίον είναι ιατανεμημένον έξωτεριυώς επί μιās επιφανείς S μέ πυκνότητα ρ_a (φορτίον ανά μονάδα έμβαδού) τότε τό δυναμιυόν είς τό σημείον (x_1, y_1, z_1) δίδεται υπό του ιατωδι επιφανειαυού όλουληρώματος.

$$U(x_1, y_1, z_1) = \iint_S \frac{\rho_a}{r_1} d\sigma + C$$

Συμπληρώματα και άσκήσεις:

1. Να προσδιορισθύν αι γραμμάι διευδύνσεως του πεδίου:

$$\vec{F}(x, y, z) = 2xy \vec{i} + x^2 \vec{j} - 2z \vec{k}.$$

2. Εάν $f(t) = (5t^2, t, -t^3)$ και $g(t) = (\eta \mu t, \sigma \nu t, t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, να εύρεθύν αι παράγωγοι:

$$\text{i) } \frac{d}{dt} (f \cdot g), \quad \text{ii) } \frac{d}{dt} (f \times g), \quad \text{iii) } \frac{d}{dt} (f \cdot f).$$

3. Νά εύρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $f(x,y,z)=2x^2-y^2+z^2$ εἰς τὸ σημεῖον $M(1,2,3)$ κατὰ τὸ διάνυσμα $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$. Ὁμοίως νά εύρεθῇ ἡ κατεύθυνσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ παράγωγος εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ λαμβάνει τὴν μέγιστην τιμὴν.

(Υπόδ.: Ἐστω $\vec{a}=(4x,-2y,2z)=\nabla f(x,y,z)$. Διὰ νά ἔχωμε μέγιστον ἀρνεῖ τὸ ἐσω-
τερικὸν γινόμενον $\vec{a}\cdot\vec{u}=\frac{\partial f}{\partial u}=f'_x\cdot u_1+f'_y\cdot u_2+f'_z\cdot u_3=4x\cdot u_1-2y\cdot u_2+2z\cdot u_3=(4,-4,6)\cdot(u_1,u_2,u_3)$
εἰς τὸ σημεῖον $M(1,2,3)$ νά γίνεταί μέγιστον. Πρὸς τοῦτοις ἀρνεῖ τὰ διανύσματα
 $\vec{a}=(4x,-2y,2z)|_M=(4,-4,6)$, $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ νά εἶναι συγγραμμικά, ἥτοι:

$$\frac{u_1}{4}=\frac{u_2}{-4}=\frac{u_3}{6}, \text{ u. d. n.})$$

4. Ἐάν $f(x,y,z)=x^2yz^3$ καὶ $\vec{F}=xz\vec{i}-y^2\vec{j}+2x^2y\vec{k}$ εύρατε τὰ κατωθί:

i) $\nabla f \equiv \text{grad} f$, ii) $\text{div} \vec{F}$, iii) $\text{rot} \vec{F}$, iv) $\text{div} (f\vec{F})$, v) $\text{rot} (f\vec{F})$.

5. Εύρατε τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν $x^3-3xy^2+yz^2=1$ εἰς τὸ σημεῖον $M(1,0,2)$.

6. Ἐάν $\vec{a}=(y^2, 2xy, -xz^2)$ καὶ $f(x,y,z)=z^3-x^2y$ υπολογίσατε τὰ $\vec{a}\cdot\nabla f$, $\vec{a}\times\nabla f$ εἰς τὸ σημεῖον $M(-1,-1,1)$.

7. Νά εύρεθοῦν αἱ διανυσματικαὶ γραμμαὶ τοῦ πεδίου μέ ἐξίσωση

i) $\vec{F}=\text{grad}(xyz)$ ii) $\vec{F}=\text{grad}\frac{1}{r}$, ὅπου $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

8. Ἄν τὰ τρία μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ σχηματίσων ἓνα δεξιόστροφο τρι-
σφροδγώνιο σύστημα μέ ἀρχὴ τὸ σημεῖον M , νά δειχθῇ ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\text{grad} f(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial a} \cdot \vec{a} + \frac{\partial f(M)}{\partial b} \cdot \vec{b} + \frac{\partial f(M)}{\partial c} \cdot \vec{c}.$$

9. Υπολογίσατε τὸ gradient τῆς $f(x,y)$ εἰς τὰ σημεία (x,y) εἰς τὰ ὁποῖα ὑπάρχει, γνω-
στοῦ ὄντος, ὅτι:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln \frac{1}{x^2+y^2} & \text{ἐάν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ἐάν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

10. Νά δειχθῇ ὅτι τὸ διανυσματικὸ πεδίου $\vec{F}=\lambda\cdot\vec{u}_0\cdot\text{syn}|\vec{u}_0|+|\mu\cdot\vec{z}|$, ὅπου \vec{u}_0 τὸ μοναδι-
αῖον τοῦ $\vec{u}=(x,y,0)$ καὶ $\vec{z}=(0,0,1)$ προέρχεται ἀπὸ δυναμικόν καὶ νά εύρεθῇ ἡ οἰο-
γένεια τῶν διανυσματικῶν ἐπιφανειῶν τοῦ πεδίου.

11. Εάν $f = f(x, y, z) = 2x^2y - xz^3$ υπολογίστε τα: ∇f και $\nabla^2 f$.
12. Εύρετε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο είναι κάθετο επί την επιφάνειαν:
 $f(x, y, z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ εις το σημείο $M(3, -1, 2)$.
13. Εάν $\vec{F} = 2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$, $\vec{G} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$ και $\phi = 2x^2yz^2$ εύρετε τα:
 (a) $(\vec{F} \cdot \nabla)\phi$, (b) $\vec{F} \cdot \nabla\phi$, (c) $(\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F}$ (d) $(\vec{F} \times \nabla)\phi$ (e) $\vec{F} \times \nabla\phi$.
14. Δείξτε ότι: $\text{rot grad } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0$.
15. Έστω $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ το υαλούμενον διάνυσμα θέσεως και $\vec{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ τυχόν σταθερόν διάνυσμα. Εάν $r = |\vec{r}|$, δείξτε ότι ισχύουν τα κάτωθι:
 i) $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$, ii) $\text{grad} f d\vec{r} = d\vec{f}$, iii) $\text{grad} \log |\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$,
 iv) $\text{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{1}{r^3} \cdot \vec{r}$, v) $\text{div} \vec{r} = 3$, vi) $\text{rot} \vec{r} = 0$, vii) $\text{grad} |\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$,
 viii) $\nabla \times (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$, ix) $\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$, x) $\text{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot \text{rot} \vec{a}$.
16. Αποδείξτε τας κάτωθι ταυτότητας:
 i) $\text{div}(\text{grad} f \times f \text{ grad} g) = 0$,
 ii) $\text{rot}(\text{rot} \vec{F} + \text{grad} f) = \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{F}$
 iii) $\nabla^2 f = \text{div}(\text{rot} \vec{F} + \text{grad} f)$.
17. Να αποδείξη ότι τα κάτωθι διανυσματικά πεδία είναι αστροφικά:
 i) $\vec{F} = \left(\frac{3y-x}{(x+y)^2}, \frac{y-3x}{(x+y)^2} \right)$, ii) $\vec{F} = (2xy, x^2)$, iii) $\vec{F} = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(xi+yj)$.
18. Προσδιορίστε τα a και b ώστε το διανυσματικόν πεδίον:
 $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = \frac{y^2+2xy+ax^2}{(x^2+y^2)^2} \mathbf{i} - \frac{x^2+2xy+by^2}{(x^2+y^2)^2} \mathbf{j}$ να είναι αστροφικόν.
19. Προσδιορίστε τα m, p, q ώστε το διανυσματικόν πεδίον:
 $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = (x+2y+mz)\mathbf{i} + (px-3y-z)\mathbf{j} + (4x+qy+2z)\mathbf{k}$ να είναι αστροφικόν.
20. Αποδείξτε ότι: $\text{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \vec{r}$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και $f'(r) = \frac{df}{dr}$
 υποθέτομεν ότι υπάρχει.

21. Εύρετε την Laplacian της $q = f(r)$. Απολογώδως δείξτε ότι η $q = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ είναι μια λύσις της διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace: $\nabla^2 q = 0$.

22. Ἀποδείξτε ὅτι: $\text{grad } f(q) = \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \text{grad } q$.

23. Δίδεται τὸ διανυσματικὸν πεδίον: $\vec{F} = x^2y z \cdot \mathbf{i} - x^3y^2 \cdot \mathbf{j} + xyz^3 \cdot \mathbf{k}$. Ὑπολογίσατε τὰ $\text{div } \vec{F}$ καὶ $\text{rot } \vec{F}$ εἰς τὸ σημεῖον $M(1, -1, 1)$ καὶ ἀποδείξτε ὅτι: $\text{div rot } \vec{F} = 0$.

- 23a. Ἐστω $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$. Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ u καὶ v ικανοποιοῦν μιὰν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $f(u, v) = 0$. Δείξτε ὅτι $\nabla u \times \nabla v = 0$.

24. Ἐάν $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = 3xz^2 \cdot \mathbf{i} - yz \cdot \mathbf{j} + (x+2z) \cdot \mathbf{k}$, εὑρετε τὸ $\text{rot rot } \vec{F}$.

25. Ἀποδείξτε ὅτι: $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\nabla^2 \vec{F} + \nabla(\nabla \cdot \vec{F})$, ἀπολογώδως ἐπαληθεύσατε τὴν ἀνωτέρω ταυτότητα μὲ \vec{F} τὴν διανυσματικὴν συνάρτησιν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

26. Ἀποδείξτε ὅτι: $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$.

27. Δίδεται τὸ διανυσματικὸν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $f(x^2 + y^2 + z^2)$ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\text{div } \vec{F} = 0$.

28. Δίδεται τὸ διανυσματικὸν πεδίον:

$$\vec{F} = \frac{2xf}{z-2} \cdot \mathbf{i} - \frac{yf}{2(z-2)} \cdot \mathbf{j} + \frac{(y^2-4x^2)f}{2(z-2)} \cdot \mathbf{k}.$$

Νὰ προσδιορισθῇ ἡ συνάρτησις $f = f(z)$ οὕτως, ὥστε τὸ ὡς ἄνω διανυσματικὸν πεδίον νὰ εἶναι ἀστροβίλον.

29. Ἐστώσαν f_1, f_2, f_3 τρεῖς πραγματικαὶ συναρτήσεις ἔχουσαι δευτέρας μεριῆς παρὰγωγους ἐπὶ τοῦ \mathbb{R} , ὁριζόμεν:

$$g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3).$$

Δείξτε ὅτι: διὰ $g(x) \neq 0$ ἰσχύει:

$$\frac{\nabla^2 g(x)}{g(x)} = \frac{f_1''(x_1)}{f_1(x_1)} + \frac{f_2''(x_2)}{f_2(x_2)} + \frac{f_3''(x_3)}{f_3(x_3)}.$$

30. Έστω F μία πραγματική συνάρτηση έχουσα συνεχή παράγωγον δεύτερας τάξεως F'' επί του \mathbb{R} . Εάν $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ορίσμεν: $\varphi(x) = F(|x|)$.

Δείξτε ότι διά $x \neq 0$ έχομεν: $\nabla^2 \varphi(x) = F''(|x|) + \frac{2F'(|x|)}{|x|}$.

- 30a. Νά ευρεθῇ ένα διάνυσμα A τοιοῦτον ὥστε:

$$\vec{f} \equiv yz\mathbf{i} - zx\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k} = \nabla \times A$$

31. Δίδεται τὸ διανυσματικὸν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}.$$

Αποδείξτε ὅτι τοῦτο εἶναι ἀστροβίλον καὶ ἀπολούθως εὑρετε πάσας τὰς συναρτήσεις $f = f(x, y, z)$ διὰ τὰς ὁποίας εἶναι: $\text{grad } f = \vec{F}$.

Απάντ. $f = f(x, y, z) = x^2yz + c$.

μαθητ. βοηθός

32. Δίδεται τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$. Δείξτε ὅτι: $\text{div } \vec{F} = 0$. Εὑρετε ἀπολούθως ὅλας τὰς διανυσματικὰς συναρτήσεις $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ τοιαύτας, ὥστε νὰ ἰσχύη: $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$.

Υπόδειξις: Παρατηρήσατε κατ' ἀρχὴν ὅτι:

$$\text{Εάν } \text{rot } \vec{F} = 0, \text{ τότε } \vec{F} = \text{grad } f.$$

Πάσαι αἱ λύσεις τῆς ἐισώσεως: $\text{rot } \vec{G} = \vec{F}$ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$\vec{G} = \vec{G}_0 + \text{grad } f$, ὅπου f εἶναι μία ἀνθαιρετος βαθμωτὴ συνάρτησις καὶ \vec{G}_0 εἶναι τυχόν διάνυσμα τοῦ ὁποίου ἡ περιστροφή εἶναι \vec{F} .

Διὰ νὰ εὑρετε τὸ \vec{G}_0 ὑποθέσατε: $\vec{G}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$. Απάντ. $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z) = yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + \text{grad } f$.

33. Αποδείξτε ὅτι: $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\nabla^2 \vec{F} + \nabla (\nabla \cdot \vec{F})$, \vec{F} διαν. συνάρτησις

34. Προσδιορίσατε τὰ a, b, γ ὥστε τὸ διαν. πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = (axz + x^2, by + xy, z - z^2 + \gamma xz - 2xyz)$$
 νὰ εἶναι σωληνοειδές.

35. Εάν $\vec{F} = (y^2 - z^2 + 3yz - 2xz, 3xz + 2xy, 3xy - 2xz + 2z)$ καὶ

$$\vec{G} = (z^2 + 2x + 3y, 3x + 2y + z, y + 2xz),$$

δείξτε ὅτι τὸ διαν. πεδίον \vec{F} εἶναι ἀστροβίλον καὶ σωληνοειδές, ἐνῶ τὸ \vec{G} εἶναι ἀστροβίλον, ἀλλ' οὐχὶ σωληνοειδές.

36. Δείξτε ότι το διανυσμ. πεδίο: $\vec{F} = 4\vec{a} \cdot e^{\vec{a}^2} \vec{I}$, όπου $\vec{a} = (0, y, z)$ απορρέει ευ
δυναμικού και εν συνεχεία να εύρεθη η εξίσωση των ισοσταθμικών επιφανειών.

37. Δίδεται το διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = (4x, -y, -\frac{4x^2 - y^2}{2(z-2)}).$$

Να προσδιορισθῇ η βαθμωτή συνάρτησις $\phi(z)$, ώστε το διανυσματικό πεδίο:
 $\phi(z) \cdot \vec{F}(x, y, z)$ να απορρέει ευ δυναμικού.

38. Υπολογίστε την ροή του διανυσμ. πεδίου: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}$ διά μέσου
της σφαιρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ευ των \vec{e}_x προς τα μέσα.

Με τι ισούται η ροή αυτή κατά το θεώρημα του Gauss; Επαληθεύστε
τό εν λόγω αποτέλεσμα.

39. Δείξτε ότι: Εάν $\vec{F} = ax\vec{i} + by\vec{j} + cz\vec{k}$, όπου a, b, c είναι σταθεράι και S είναι
μία κλειστή επιφάνεια περιυφείλουσα όγκον V , τότε:

$$\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = (a+b+c) \cdot V.$$

40. Υπολογίστε το $\iiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$, όπου S είναι η επιφάνεια σφαίρας κέντρου O και
ακτίνας r και $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

- (41) Δι' εφαρμογής του όλου τύπου κατά div, δείξτε ότι $\iiint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = 2\pi a^3$, όπου \vec{r}
είναι το διάνυσμα θέσεως και S είναι η επιφάνεια του ήμισφαιρίου:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$$

42. Επαληθεύστε το θεώρημα του Gauss διά την διανυσματική συνάρτησις:
 $\vec{F} = (2xy - y^2, xy^2 + yz, 3xyz - z^2)$, όταν ως επιφάνεια S ληφθῇ η επιφάνεια του
κύβου: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

43. Δι' εφαρμογής του θεωρήματος του Stokes υπολογίστε το επικυμύ-

λιν ολολιήρωμα : $\oint e^{-x} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, όπου $\vec{F} = \eta \mu y \cdot \vec{i} + \sigma \eta y \cdot \vec{j}$ και Γ είναι τό όρδο-
 γώνιον με κορυφές: $(0,0,0)$, $(\pi,0,0)$, $(\pi, \frac{1}{2}\pi, 0)$, $(0, \frac{1}{2}\pi, 0)$.

- Επαληθεύσατε τό θεώρημα του Stokes διά την διανυσμ. συνάρτησιν
 $\vec{F} = (3y, -xz, yz^2)$, όταν ως επιφάνεια S ληφθῇ τό παραβολοειδές
 $2z = x^2 + y^2$ και γραμμή Γ ἡ τομή αὐτοῦ και τοῦ επιπέδου $z = 2$.

- Εάν $\vec{F} = \text{grad } \phi$ και \vec{F} είναι σωληνοειδές, δείξατε ότι:

$$\iiint_V (\vec{F} \cdot \vec{F}) dv = \iint_S \phi \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

όπου S είναι μία κλειστή επιφάνεια περιυλίουσα όγκον V .

- Δι εφαρμογῆς του θεωρήματος του Stokes μετασχηματίσατε τό επιφανειακόν
 ολολιήρωμα: $\iiint_S (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} ds$ εις επιυαμπύλιον, όπου $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ και
 S τό μέρος του παραβολοειδούς: $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Απολοούδως εύρετε την τι-
 μὴν του επιυαμπυλίου ολολιήρωματος.

- Δείξατε ότι τό διανυσματικόν πεδίον:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (y^2 + 2xz^2)\vec{i} + (2xy - z)\vec{j} + (2x^2z - y + 2z)\vec{k}$$

απορρέει ει δυναμιου. Εύρετε μιαν συνάρτησιν $f = f(x,y,z)$, ούτως ώστε:

$$\vec{F} = \text{grad } f.$$

- Δοθέντος ότι ἡ συνάρτησις $\phi = \phi(x,y,z)$ ικανοποιεί τὰς συνθήκας: $\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ και
 $\phi(0,0,z) = 0$, εύρετε την ϕ ούτως, ώστε ἡ διανυσμ. συνάρτησις:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (x^2 + 3y^2z)\vec{i} + 6xyz\vec{j} + \phi\vec{k}$$

απορρέει ει δυναμιου f . Εύρετε απολοούδως την εξίσωσιν των ισοσταθμιων επι-
 φανειων και δείξατε ότι τό διανυσματικόν πεδίον \vec{F} δέν είναι σωληνοειδές.

- Δείξατε ότι: εάν δύο διανυσμ. πεδία \vec{F} και \vec{G} είναι άστρόβιλα, τότε τό διανυσμ.
 πεδίον $\vec{F} \times \vec{G}$ είναι σωληνοειδές

2. Θεωρούμεν μίαν υλειαστήν επιφάνειαν, εμβαδού S και το μοναδιαίον υάθετον διάνυσμα αὐτῆς \vec{n} διευθυνόμενον πρὸς τὰ ἔξω τῆς επιφάνειας. Δείξατε ὅτι:

$$i) \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds = 0, \quad ii) \iiint_V \operatorname{div} \vec{n} \, dv = S$$

(Σημ. Μερικοὶ συγγραφεῖς ἀντὶ τοῦ ds γράφουν $d\vec{s}$ θεωροῦντες αὐτὸ ὡς ἓνα ἀπειροστόν διάνυσμα, ὁμόρροπον πρὸς τὸ \vec{n} καὶ μέτρον ds καὶ οὕτω ἡ σχέση (i) δύναται νὰ γραφῇ: $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = 0$).

1. Ἀποδείξατε ὅτι: $\oint \vec{F} \times \vec{F} = \iint_S (\vec{n} \times \nabla) \times \vec{F} \, ds$.

ὑπόδ. Ἐφαρμόσατε τὸ θεώρημα τοῦ Stokes, ὅπου ὁμῶς ὡς \vec{F} θὰ λάβετε τὸ $\vec{F} \times \vec{C}$, ὅπου \vec{C} εἶναι ἓνα σταθερὸ διάνυσμα.

1. Δείξατε ὅτι: $\iiint_V \nabla \phi \cdot \vec{F} \, dv = \iint_S \phi \vec{F} \cdot d\vec{s} - \iiint_V \phi \nabla \cdot \vec{F} \, dv$.

1. Ἐάν ἡ $f(x, y, z)$ εἶναι ἁρμονικὴ συνάρτησις ἐπὶ τοῦ χωρίου V τοῦ ὁποίου τὸ σύνολον εἶναι ἡ ἐπιφάνεια S καὶ τῆς ὁποίας τὸ μοναδιαίον υάθετον διάνυσμα διευθυνόμενον πρὸς τὰ ἔξω τῆς επιφάνειας εἶναι τὸ \vec{n} , δείξατε ὅτι:

$$i) \iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \, ds = 0 \quad \text{ἢ} \quad \iint_S \nabla f \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad ii) \iint_S f \frac{df}{d\vec{n}} \, ds = \iiint_V |\nabla f|^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$iii) \text{Ἐάν αἱ } f \text{ καὶ } g \text{ εἶναι ἁρμονικαὶ ἐντὸς τοῦ } V, \text{ τότε: } \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) ds = 0.$$

ὑπόδ. Χρησιμοποιήσατε τοὺς ὁλοκληρ. τύπους τοῦ Green.

- b) Δείξατε ὅτι τὸ διανυσματικὸν πεδίον $\vec{F} = -\rho \sin \theta \cdot \vec{e}_\rho + \rho \eta \mu \theta \vec{e}_\theta + z \sin \theta \vec{e}_z$, ὅπου ρ, θ, z εἶναι κυλινδρικοὶ συντεταγμέναι εἶναι σωληνοειδές (δηλ. $\operatorname{div} \vec{F} = 0$)
- γ) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\operatorname{rot} \vec{F}$ ὅταν ἡ \vec{F} ἐκφραζομένη εἰς σφαιρικοὺς συντεταγμένους ἔχει τὴν ἐκφράσιν $\vec{F} = \rho \sin \varphi \vec{e}_\rho + \rho \eta \mu \varphi \vec{e}_\theta + \rho \theta \cdot \vec{e}_\varphi$.
- δ. Ἐάν $\phi = \rho^2 \sin^2 \theta$, ὅπου ρ, θ κυλινδρικοὶ συντεταγμέναι εὑρετε τὸ $\nabla^2 \phi$.
- ε. Νὰ παρασταθῇ τὸ διάνυσμα $\vec{F} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 3x\vec{k}$ εἰς σφαιρικοὺς συντεταγμένους δηλ. νὰ εὑρεθοῦν τὰ $A_\rho, A_\theta, A_\varphi$.
1. Δείξατε ὅτι τὸ σύστημα τῶν σφαιρικοῦν συντεταγμένων εἶναι ὀρθογώνιον.

Γενικαί άσκησεις επί των κεφαλαίων XII και XIII.

1. Νά υπολογισθῇ τὸ ἐπιφανειακὸν ὀλουλήρωμα:

$\iint_S \frac{1}{xyz} (yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy)$ ὅπου S εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἔλλειψοειδούς $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, με προσανατολισμόν ἐν τῶν ἔσω πρὸς τὰ ἔξω.

2. Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια $S: z=f(x,y)$ ὀρισμένη ὑπὸ τῆς πεπεσμένης ἐξισώσεως $F(x,y,z)=0$. Δείξατε ὅτι τὸ ἐπιφανειακὸν ὀλουλήρωμα $\iint_S H ds$ ὑπεράνω τῆς S γίνεται:

$$\iint_{R_{xy}} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \cdot \frac{H}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy$$

ἀρκεῖ $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ καὶ R_{xy} εἶναι ἡ προβολὴ τῆς S εἰς τὸ xy -ἐπίπεδον.

Ἐὰν $\eta = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ καὶ V τυχὸν διάνυσμα τότε $\iint_S (V \cdot \eta) ds = \iint_{R_{xy}} (V \cdot \nabla F) \frac{1}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy$.

3. Ἐστω ἡ ἐπιφάνεια S φρασσομένη ὑπὸ τῆς υἱελιστῆς αμπίλης Γ καὶ ἄς θεωρήσωμεν τὸ ὀλουλήρωμα:

$$\Omega(a,b,\gamma) = \iint_S \frac{(a-x)dydz + (b-y)dzdx + (\gamma-z)dxdy}{r^3}$$

(ὅπου $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (\gamma-z)^2$) ὡς συνάρτησιν τῶν a, b, γ . Δείξατε τοὺς αὐτῶδι τύπους:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \int_{\Gamma} \frac{(z-\gamma)dy - (y-b)dx}{r^3}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial b} = \int_{\Gamma} \frac{(x-\gamma)dz - (z-\gamma)dx}{r^3}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} = \int_{\Gamma} \frac{(y-b)dx - (x-a)dy}{r^3}$$

Σημ: Οἱ ἄνωτέρω τύποι ἔχουν μεγάλην ἐφαρμογὴν εἰς τὸν ἡλετρομαγνητισμόν. Δύνανται δὲ νὰ γραφοῦν καὶ ὑπὸ τὴν αὐτῶδι μορφήν:

$$\text{grad } \Omega = - \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{r}}{r^3}$$

ὅπου \mathbf{r} τὸ διάνυσμα με συνιστώσας $x-a, y-b, z-\gamma$.

4. Νά υπολογισθῇ δι' ἀναγωγῆς εἰς διπλοῦν τὸ ἐπι-αμπίλιον ὀλουλήρωμα

$J = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ὅπου $\vec{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ καὶ Γ ἡ γραμμὴ με ἐξισώσεις $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α'

§1. ΑΙ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΤΩΝ MAINARDI-CODAZZI

Ἐστω $\tau = \tau(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$ ἡ εἰσώσις μίας ἀναλυτικῆς ἐπιφάνειας, ὁπότε εἰς καθέπε σημεῖον τῆς δὲ ἰσχύουσιν αἱ σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\tau_{uu}) = \frac{\partial}{\partial u}(\tau_{uv}), \quad \frac{\partial}{\partial u}(\tau_{uv}) = \frac{\partial}{\partial u}(\tau_{vu}) \quad (1)$$

Ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις ἀντικαταστήσωμεν τὰ τ_{uu} , τ_{uv} , τ_{vu} διὰ τῶν ἴσων τῶν, ἐν τῶν εἰσώσεων τοῦ Gauss (Σελίς 327 εἰσώσεις (6)) δὲ λάβωμεν:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{11}' \tau_u + \Gamma_{11}'' \tau_v + L_H) &= \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}' \tau_u + \Gamma_{12}'' \tau_v + M_H) \\ \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}' \tau_u + \Gamma_{12}'' \tau_v + M_H) &= \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{22}' \tau_u + \Gamma_{22}'' \tau_v + N_H) \end{aligned} \right\} \quad (2) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{11}' \tau_u + \Gamma_{11}' \tau_{uv} + \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{11}'' \tau_v + \Gamma_{11}'' \tau_{vv} + L_u H + L_v H = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}' \tau_u + \Gamma_{12}' \tau_{uv} + \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}'' \tau_v + \Gamma_{12}'' \tau_{vv} + M_u H + M_v H$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}' \tau_u + \Gamma_{12}' \tau_{uv} + \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{12}'' \tau_v + \Gamma_{12}'' \tau_{vv} + M_u H + M_v H = \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{22}' \tau_u + \Gamma_{22}' \tau_{uv} + \frac{\partial}{\partial u} \Gamma_{22}'' \tau_v + \Gamma_{22}'' \tau_{vv} + M_u H + M_v H$$

Ἐνταῦτάς ἀνωτέρω σχέσεις θέσωμεν ὅπου τ_{uu} , τ_{uv} , τ_{vu} πάλιν τὰς τιμὰς τῶν ἐν τῶν τύπων τοῦ Gauss, ὅπου δὲ N_u , N_v τὰς τιμὰς τῶν ἐν τῶν τύπων τοῦ Weingarten, δὲ λάβωμεν τελικῶς δύο σχέσεις μεταξὺ τῶν διανυσμάτων τ_u , τ_v καὶ H , αἱ ὁποῖαι δὲ ἐκανοποῦνται δι' οἰανδήποτε τιμὴν αὐτῶν ἀφοῦ αἱ σχέσεις (1) ἰσχύουσιν διὰ καθέπε ἀναλυτικῆς ἐπιφάνειας. Συνεπῶς δὲ πρέπει αἱ συντελεστὰς τῶν ἀνωτέρω διανυσμάτων νὰ μηδενίζονται.

Ἐν τοῦ μηδενισμοῦ τῶν συντελεστῶν τοῦ διανύσματος H εἰς τὰς δύο προουπάρχουσας σχέσεις δὲ λάβωμεν τελικῶς:

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= L \Gamma_{12}' + M(\Gamma_{12}'' - \Gamma_{11}') - H \Gamma_{11}'' \\ M_v - N_u &= L \Gamma_{22}' + M(\Gamma_{22}'' - \Gamma_{12}') - H \Gamma_{12}'' \end{aligned} \quad (3)$$

Αἱ ἀνωτέρω εἰσώσεις λέγονται *εἰσώσεις τοῦ Codazzi*, ἐπειδὴ ὁμως ἀνάλογον πρὸς αὐτάς ἐδόθησαν ἐνωρίτερον ὑπὸ τοῦ Mainardi, ἐπευράτησεν νὰ λέγωνται εἰσώσεις τῶν Mainardi-Codazzi.

Διὰ μηδενισμοῦ ἑξ ἄλλου τῶν συντελεστῶν τῶν τ_u , τ_v εἰς τὰς δύο προουπάρχουσας σχέσεις, εὐρίσκουμεν τέσσαρες ἀνόμνη εἰσώσεις, αἱ ὁποῖαι ὁμως ὡς εὐνοήτως ἀναγνωρίζεται, εἶναι δυνατόν νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ συνδιασμοῦ τῶν εἰσώσεων (3)

II. Εἰς τὴν §4 τοῦ V Κεφαλαίου (σελ. 120-129) ἐμελετήσαμεν τὰ τοπιῶν ἀμρότατα συναρτήσεων πολλῶν μεταβλητῶν ὑποκειμένων εἰς δεδομένας δεσμευτικὰς συνθήκας. Ἐμεῖ ἀναφέραμεν τὴν μέθοδον τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange καὶ ἀμολούως ἐξατυπώσαμεν δύο προτάσεις τὰς V-4-2 καὶ V-4-3 διὰ τὰς εἰδικὰς περιπτώσεις ὅπου $(q=3, p=2)$ καὶ $(q=3, p=1)$ ποὺ δίδουν ἱκανὰς συνθήκας διὰ νὰ ἔχει μία συνάρτησις τοπιῶν ἀμρότατον ὑπὸ συνθήκας. Εἰς αὐτό τό Παράρτημα δά γεννιευοῦμεν τὰς ἀναφερθεῖσας Προτάσεις δηλ. δά ἀναφέρωμεν τὰς ἱκανὰς συνθήκας ποὺ πρέπει νὰ πληροῦνται ἵνα ἡ συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ὑποκειμένη εἰς τὰς δεσμευτικὰς συνθήκας $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, i=1, 2, \dots, p$ ($p < q$) ἔχει τοπιῶν ἀμρότατον.

Ὅπως ἀναφέραμεν εἰς τὴν προαναφερθεῖσα παράγραφον ἡ μέθοδος τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange συνίστατο εἰς τό νὰ σχηματίζωμεν τὴν συνάρτησιν

$$F(x_1, x_2, \dots, x_q, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = f(x_1, \dots, x_q) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_q) + \dots + \lambda_p \varphi_p(x_1, \dots, x_q) \quad (1)$$

ὅπου οἱ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ παραμετροί.

Ἀμολούως μέ τὴν μέθοδον αὐτὴν εὐρήναμεν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τῶν $q+p$ ἐξισώσεων ἥτοι τῶν

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_q} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1 = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_p} = \varphi_p = 0 \quad (2)$$

καὶ ἔστω ὅτι εὐρήναμεν μίαν λύσιν αὐτοῦ τοῦ συστήματος τὴν $X_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$

Τέλος ἐξετάσαμεν ἂν τό σημεῖον $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ εἶναι θέσις τοπιῶν ἀμροτάτου.

Τώρα εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ποὺ δά ἀντιμετωπίσωμεν αὐτό τό πρόβλημα εἶναι ἀναγκαῖον νὰ δώσωμεν ὠρισμένους συμβολισμούς.

Πρὸς τούτοις θεωροῦμεν τὴν $(q+p)$ τάξεως ὀρίδουσα.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_{x_1 x_1} & \dots & F_{x_1 x_q} & \varphi_{1 x_1} & \dots & \varphi_{p x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{x_q x_1} & \dots & F_{x_q x_q} & \varphi_{1 x_q} & \dots & \varphi_{p x_q} \\ \varphi_{1 x_1} & \dots & \varphi_{1 x_q} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{p x_1} & \dots & \varphi_{p x_q} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Ἀπό τῆς ἀντερω ὀρίδουσα ἐξαγράφωμεν τὴν αὐτὴν γραμμὴν καὶ τὴν αὐτὴν στήλην καὶ οὕτω δά προκύηι μία ἄλλη ὀρίδουσα τὴν ὁποῖαν δά παραστήσωμεν διὰ Δ_2 . Ἀμολούως

λοιδως απο την Δ_2 εαν αποουωμεν παλι την a^2 γραμμή και a^2 στήλη δα προουψη μια αλλη οριδουσα την οποιαν παριστωμεν δια Δ_3 . Συνεχιδοντας ματ αυτον τον τροπον δα καταληξωμεν μεχρι τον σχηματισμόν της οριδουσης Δ_{q-p} . Κατ αυτον τον τροπον δα σχηματισωμεν τας κατωδι $q-p$ το πληδος οριδουσας ητοι:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} F_{x_1 x_1} & \dots & F_{x_1 x_q} & \dots & \varphi_{1 x_1} & \dots & \varphi_{p x_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ F_{x_q x_1} & \dots & F_{x_q x_q} & \dots & \varphi_{1 x_q} & \dots & \varphi_{p x_q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1 x_1} & \dots & \varphi_{1 x_q} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{p x_1} & \dots & \varphi_{p x_q} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

ουου $i=1,2,\dots,q-p$. Η Δ_i είναι μια οριδουσα $(q-p-i+1)$ ταξεως).

Ηδη διατυπωνομεν ανευ αποδειξεως το κατωδι βασικό θεώρημα:

Θεώρημα 1: "Εστω η πραγματική συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ωρισμένη εις ένα ανοικτόν υποσύνολον U του \mathbb{R}^q και έχουσα μεριώς παραγώγους μέχρι τρίτης τάξεως και υποκειμένη εις τας δεσμευτικές συνθήκας $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0, i=1,2,\dots,p$. Χρησιμοποιούμεν τούς ορισμούς και συμβολισμούς που έδωσαμεν ανωτέρω. "Εστω $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ μια λύσις του συστήματος των εξισώσεων (1) και έστω επί πλέον ότι:

$$\text{βαθ.} \begin{vmatrix} \varphi_{1 x_1} & \dots & \varphi_{1 x_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{p x_1} & \dots & \varphi_{p x_q} \end{vmatrix} = p$$

Τότε διά να είναι το σημείον $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ θέσις άμφοτάτου διά την συνάρτησιν $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ άρκει να πληρούνται αι κατωδι συνθήκαι:

1%/ "Εάν p : άρτιος και αι $\Delta_i(\xi_1, \dots, \xi_q, \eta_1, \dots, \eta_p) > 0$ ($i=1,2,\dots,q-p$) έχομεν σχετιυό ελάχιστο.

2%/ "Εάν p : περιτός και αι $\Delta_i(\xi_1, \dots, \xi_q, \eta_1, \dots, \eta_p) < 0$ ($i=1,2,\dots,q-p$) έχομεν σχετιυό ελάχιστο.

3%/ "Εάν q : άρτιος και $(-1)^L \Delta_i(\xi_1, \dots, \xi_q, \eta_1, \dots, \eta_p) < 0$ ($i=1,2,\dots,q-p$) έχομεν σχετιυό μέγιστο.

4%/ "Εάν q : περιτός και $(-1)^L \Delta_i(\xi_1, \dots, \xi_q, \eta_1, \dots, \eta_p) > 0$ ($i=1,2,\dots,q-p$) έχομεν σχετιυό μέγιστο.

Παρατήρησις: θα πρέπει σύμφωνα προς το ανωτέρω θεώρημα να προσδιορίσωμεν τα πρόσημα των οριδουσών $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{q-p}$ και αναλόγως των περιπτώσεων δα συμπεράνωμεν περί του είδους του άμφοτάτου.

Εφαρμογή 2^η: Μεταξύ των κυρτών πολυγώνων με η πλευράς των εγγεγραμμένων εις μίαν περιφέρειαν αὐτίνος R νά εὔρεθῃ αὐτό ποῦ ἔχει μέγιστη περίμετρο.

Λύσις: Δυνάμεθα χωρίς νά περιορίσωμεν τήν γενικιότητα τοῦ προβλήματος νά ὑποθέσωμεν τό κέντρον τῆς περιφέρειας εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ πολυγώνου καί συνεπῶς αἱ πλευраὶ φαίνονται ὑπό τοῦ κέντρου ὑπό γωνίαν θ_i τοιαύτη ὥστε $0 < \theta_i < \pi$.

Ἐάν $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ εἶναι αἱ ἀνωτέρω ἐπικέντροι γωνίαι ποῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευράς τότε θά εἶναι $\sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$.

Ὡς γνωστόν ἡ περίμετρος τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου θά ἔχει τήν τιμήν:

$$P = 2R \left(\eta\mu \frac{\theta_1}{2} + \dots + \eta\mu \frac{\theta_n}{2} \right) \quad (1)$$

Προφανῶς προεῖται διὰ δεσμευμένον αὐρότατον συναρτήσεως τῆς ὁποίας αἱ μεταβληταί $\theta_1, \dots, \theta_n$ ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωσιν:

$$\varphi \equiv \theta_1 + \dots + \theta_n - 2\pi = 0 \quad (2)$$

Ἀρμεῖ νά εὔρωμεν ἥδη τό αὐρότατον τῆς συναρτήσεως

$$f \equiv \eta\mu \frac{\theta_1}{2} + \dots + \eta\mu \frac{\theta_n}{2} \quad (1')$$

ὑπό τήν συνθήκη (2).

Πρός τούτοις σχηματίζομεν τήν βοηθητικὴν συνάρτησιν

$$F = \eta\mu \frac{\theta_1}{2} + \dots + \eta\mu \frac{\theta_n}{2} + \lambda (\theta_1 + \dots + \theta_n - 2\pi) \quad (3)$$

Παραγωγίζομεν τήν (3) ὡς πρὸς $\theta_1, \dots, \theta_n$ καί ἀπολούδως ἐξισοῦμεν μέ τό μηδέν τὰς πρώτας μεριὰς παραγώγους ἥτοι:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_1} = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta_1}{2} + \lambda = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \theta_n} = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta_n}{2} + \lambda = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \theta_1 + \dots + \theta_n - 2\pi = 0$$

Λόγω τῆς συμμετρίας ἐν τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων λαμβάνομεν:

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\theta_1}{2} = \dots = \sigma\upsilon\nu \frac{\theta_n}{2} = -2\lambda \Rightarrow \theta_1 = \dots = \theta_n = \frac{2\pi}{n}$$

Εἶναι δέ, $F_{\theta_i \theta_i} = -\frac{1}{4} \eta\mu \frac{\theta_i}{2}$, $F_{\theta_i \theta_j} = 0$ ($i \neq j$) καί $F_{\theta_i \lambda} = 1$

ὅπου $i, j = 1, 2, \dots, n$ καί $\theta_i = \frac{2\pi}{n}$ διὰ $i = 1, 2, \dots, n$.

Αί ορίζονται λοιπόν Δ_i του προαναφερθέντος θεωρήματος διά $\theta_i = \frac{2\pi}{n}$, $i=1,2,\dots,\eta$ γίνονται:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} \eta \mu \frac{\pi}{n} & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \eta \mu \frac{\pi}{n} & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{4} \eta \mu \frac{\pi}{n} & 1 & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-i+1} \eta \mu^{\frac{n-i}{n}} \frac{2\pi}{n}.$$

Διά $\eta=3$ ή $\eta=4$ παρατηρούμεν ότι πληρούνται αί συνθήκαι 3 ή 4 του θεωρήματος. 1 και ως έυ τούτου έχομεν μέγιστη περίμετρο.

Όθεν, μεταξύ των κυρτών πολυγώνων του προαναφερθέντος προβλήματος μέ η πλευράς είναι τό μυονιόν αυτό πού έχει μέγιστον έμβαδόν.

Παρατήρησις: Έργασόμενοι κατά τον ίδιο άυριθώς τρόπον ως άνωτέρω δυνάμεθα νά άποδείξωμεν ότι: Μεταξύ των κυρτών πολυγώνων μέ η πλευράς των έχτε-γραμμένων εις ένα κύκλον, τό μυονιόν πολυγώνον έχει τό μέγιστο έμβαδόν.

I. Έστω ή συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ύποκειμένη εις τάς δεσμεύσεις $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0$ ($i=1,2,\dots,p$) ($p < q$) και έστω $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)$ μία λύσις του συστήματος των εξισώσεων (2). Σχετιώς άν τό σημείον $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ είναι θέσις άυροτάτου ύπό δεσμευσιν ισχύει τό άνωτι βασικό θεωρήμα:

Θεώρημα 2. Συμφώνως πρós τ' άνωτέρω τό σημείον $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ είναι τότε και μόνον τότε θέσις δεσμευμένου ελαχίστου έάν αί ριζες της εξισώσεως (ως πρós λ) ήται της:

$$\begin{vmatrix} F_{x_1 x_1} - \lambda & \dots & F_{x_1 x_q} & \varphi_{1 x_1} & \dots & \varphi_{p x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{x_q x_1} & \dots & F_{x_q x_q} - \lambda & \varphi_{1 x_q} & \dots & \varphi_{p x_q} \\ \varphi_{1 x_1} & \dots & \varphi_{1 x_q} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{p x_1} & \dots & \varphi_{p x_q} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(πού είναι πάσαι πραγματικά) είναι θετικά:

Τό σημείον $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ είναι τότε και μόνον τότε θέσις δεσμευμένου μεγίστου εάν πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶναι πᾶσαι ἀρνητικαί.

Τέλος εάν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ἀλλάξουν πρόσημον τότε ἡ συνάρτησις δὲν ἔχει δεσμευμένο ἀυρότατον.

Ἐφαρμογή 34 Νά εὑρεθοῦν τὰ ἀυρότατα τῆς συναρτήσεως $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ὑπὸ τὴν δέσμευσιν $\varphi = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - 1 = 0$, ὅπου $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Λύσις Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τοῦ Lagrange σχηματίζομεν τὴν βοηθητικὴν συνάρτησιν:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 + \lambda(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - 1)$$

Ἀπολούθως εὐρίσκομεν:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i + \lambda a_i = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 2x_n + \lambda a_n = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - 1 = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ἀνωτέρω συστήματος εὐκολῶς εὐρίσκομεν:

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \dots, x_n = \frac{a_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \quad \lambda = \frac{-2}{a_1^2 + \dots + a_n^2}.$$

Ὅθεν, ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι:

$$M(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1) = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \dots, \frac{a_n}{a_1^2 + \dots + a_n^2}, -\frac{2}{a_1^2 + \dots + a_n^2} \right).$$

Ἀπολούθως εὐρίσκομεν:

$$F_{x_i x_i} = 2, F_{x_i x_j} = 0 \quad (i \neq j) \text{ καὶ } \varphi_{x_i} = a_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \text{ Ἀπολούθως ἐφαρμόζομεν τὸ}$$

θεώρημα 2. Διὰ τὸ εὐρεθὲν σημείον ἡ ὁρίζουσα γίνεταί:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-\lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ἡ ὁποία ἔχει τὴν ρίζα $\lambda = 2$ μετὰ πολλαπλότητα $n-1$. Ἄρα ἔχομεν ἐλάχιστο.

Παρατηρήσις: Ἡ ἀνωτέρω ἐφαρμογή ἰσοδυναμεῖ μετὰ τὸ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν

τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων τοῦ χώρου R^n ἀπὸ τὸ ὑπὲρ-ἐπίπεδον $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n - 1 = 0$.

IV. Διαφορά Προβλημάτων:

Πρόβλημα 1^ο: Νά εύρεθύν τὰ αὐτόματα τῆς συναρτήσεως $f = \sum_{i=1}^n x_i^2$, γνωρίζοντες ὅτι, $g = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j - 1 = 0$ ὅπου a_{ij} εἶναι ἕνας συμμετρικὸς τετραγωνικὸς πίναξ $\eta \times \eta$ -τάξεως.

Λύσεις: Προς τούτους σχηματίζουμε την συνάρτηση:

$$F = g - \lambda \cdot f = \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j - 1 \right) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (1)$$

Ἀπολούδως θεωροῦμεν τὸ σύστημα τῶν πρώτων μεριῶν παραχῶν τῆς ἀνωτέ-
ρω συναρτήσεως ἥτοι:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_j a_{ij} x_j - \lambda x_i \quad (2) \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Ἀναλυτικῶς αἱ ἑξισώσεις (2) γράφονται:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

“ἵνα τὸ σύστημα (3) ἔχει μὴ μηδενικὴν λύσιν ὡς πρὸς x_1, x_2, \dots, x_n ἀρκεῖ ἡ ὁρίζουσα τοῦ ἀνωτέρω συστήματος νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ ἀνωτέρω ὁρίζουσα ἐξισωμένη πρὸς τὸ μηδέν εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τοῦ πίνακος $A = [a_{ij}]$ δηλ. εἶναι ἡ ἐξίσωσις $|A - \lambda I| = 0$ (4) Αἱ δὲ τιμαὶ πού πρέπει νὰ λαβῇ ὁ λ διὰ νὰ ἔχωμεν μὴ τετριμμένη λύσιν εἶναι αἱ ὡς πρὸς λ ρίζαι τῆς ἡ^{του} βαθμοῦ ἐξισώσεως (4). Λόγῃ τῆς συμμετρίας τοῦ πίνακος A ($a_{ij} = a_{ji}$) ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλαι αἱ ρίζαι τῆς (4) εἶναι πραγματικαί.

Πολλπλασιασίζοντας τὰς ἑξισώσεις τοῦ συστήματος (3) κατὰ σειράν ἐπὶ X_1, X_2, \dots, X_n καὶ προσδέτοντες εὐρίσκουμεν:

$$\lambda \cdot \sum_i x_i^2 + \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{f+1} = 0 \quad \text{и} \quad f = -\frac{1}{\lambda} \quad (5)$$

Ἡ (5) σημαίνει ὅτι, διὰ τὴν μὴ μηδενικὴν λύσιν τοῦ συστήματος (3) καὶ τῆς δεσμεύσεως ποῦ ἀντιστοιχεῖ σὲ μία ρίζα λ τῆς ἑξισώσεως (4) ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως f ἰσοῦται πρὸς $-\frac{1}{\lambda}$. Τέλος ἡ μέγιστη καὶ ἡ ἐλάχιστη τιμὴ τῆς f ἰσοῦται ἀντιστοίχως πρὸς τὴν μέγιστην καὶ ἐλάχιστην τιμὴν τοῦ $-\frac{1}{\lambda}$.

Παρατήρηση: Το ανωτέρω πρόβλημα ισοδυναμεί με τὸ νὰ εὑρωμεν τὰ σημεῖα τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 1$, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις $\sqrt{f} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν εἶναι μέγιστη ἢ ἐλάχιστη.

Πρόβλημα 2^{ov} Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα $x = (x_1, \dots, x_n)$ μιᾶς ὑπὲρ-ἐπιφανείας μὲ ἐξίσωσιν $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ (φ : συνεχὴς) τοῦ χώρου R^n , τῆς ὁποίας ἡ Εὐκλείδειος ἀπόστασις ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ εἶναι ἐλάχιστη.

Λύσις: Τὸ ανωτέρω πρόβλημα ισοδυναμεί με τὸ νὰ εὑρωμεν σημεῖον $x = (x_1, \dots, x_n)$ μεταξὺ τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ μᾶλλον ἐλάχιστη τὴν συνάρτησιν: $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_i)^2$.

Ἐφαρμόζοντες τὴν μέθοδον τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange σωματίζομεν τὴν συνάρτησιν:

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n, \lambda) &= f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_i)^2 + \lambda \cdot \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Εἶναι δέ,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - \theta_1) + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 2(x_n - \theta_n) + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi.$$

Μηδενίζοντες τὰς ἀνωτέρω μεριὰς παραγωγῆς, τελειῶς εὐρίσκουμεν:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{x_1 - \theta_1} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{x_2 - \theta_2} = \dots = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}{x_n - \theta_n} = -\frac{2}{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \varphi = 0.$$

Αἱ τελευταῖαι ἐξισώσεις ευφράδουν πολὺ ἀπλᾶ γεωμετρικῶς ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἐὰν αὐτὸ δὲν εἶναι ἑνὰ ἰδιόζον σημεῖον, εἶναι ὁ πὺς τῆς μαδῆτου ἀχομένης ἀπὸ τὸ σημεῖον $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ πρὸς τὴν ἐπιφάνεια.

Πρέπει δέ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, μᾶτε σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ πὺς μιᾶς μαδῆτου δὲν δίδει ἀναγκαστικῶς ἑνὰ ἐλάχιστον τῆς ἀποστάσεως. Τοῦτο δέ δὲ εἶναι ἢ ἑνὰ σχετικὸν ἐλάχιστον ἢ ἑνὰ σχετικὸν μέγιστον ἢ ἑνὰ ἰδιόζον σημεῖον.

Παρατήρησις: Ἡ 3^η ἐφαρμογὴ προφανῶς εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος. Ἐδῶ ἐδώσαμεν γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τοῦ προβλήματος.

Πρόβλημα 3^{ov} Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλάχιστη ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

Λύσις: Ἐς θεωρήσωμεν ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι δίδονται εἰς τὸν χώρον ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:

$$(E): \begin{cases} x = az + a \\ y = bz + \beta \end{cases} \quad (I) \quad \text{καὶ} \quad (E'): \begin{cases} x = a'z + a' \\ y = b'z + \beta' \end{cases} \quad (I')$$

Ἐστωσαν $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ἑνὰ τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας (E) καὶ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ἑνὰ τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας (E').

Τό τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο αὐτῶν σημείων εἶναι :

$$f(z_1, z_2) = (\overline{M_1 M_2})^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \quad (2)$$

Πράγματι ἡ ἀπόστασις $|\overline{M_1 M_2}|$, λόγῳ τῶν (1) καί (1') εἶναι συνάρτησις μόνον τῶν z_1, z_2 .

Ἡδὴ ὡς θεωρήσωμεν τὰς μερικὰς παραγώγους τῆς συναρτήσεως $f(z_1, z_2)$ ὡς πρὸς z_1, z_2 ἴτοι :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_1} = (x_1 - x_2) \cdot \frac{dx_1}{dz_1} + (y_1 - y_2) \cdot \frac{dy_1}{dz_1} + (z_1 - z_2) = (a^2 + b^2 + 1)z_1 - (a'a + b'b + 1)z_2 + a(a - a') + b(b - b') \quad (3)$$

$$\text{καὶ } \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z_2} = -(x_1 - x_2) \frac{dx_2}{dz_2} - (y_1 - y_2) \frac{dy_2}{dz_2} - (z_1 - z_2) = -(aa' + bb' + 1)z_1 + (a'^2 + b'^2 + 1)z_2 - a'(a - a') + b'(b - b') \quad (4)$$

Τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων: $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$ (γραμμικόν σύστημα ἐπιδέχεται ἕν γένει, μία μοναδική λύσιν ἔστω αὕτη εἶναι ἡ (z_1^0, z_2^0) .

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = a^2 + b^2 + 1, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = -(a'a + b'b + 1), \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} = a'^2 + b'^2 + 1.$$

Κατ' ἀπολοιδίαν ἔχομεν :

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \right)^2 \right] = -(aa' + bb' + 1)^2 + (a^2 + b^2 + 1)(a'^2 + b'^2 + 1) = \\ = (ab - ba')^2 + (a - a')^2 + (b - b')^2 > 0.$$

Ἐπειδὴ $\Delta > 0$ καὶ $\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} > 0$ ἔπεται ὅτι εἰς τό θεωρηθέν σημεῖον (z_1^0, z_2^0) ἡ συνάρτησις παρουσιάζει ἐλάχιστον (βλ. Πρότασις Υ-1-2).

Ἀσκήσεις :

1. Νά χωρισθῇ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς a ὡς ἄθροισμα τριῶν θετικῶν ἀριθμῶν x, y, z εἰς τρόπον ὥστε τὸ γινόμενον $x^m \cdot y^n \cdot z^p$ νά μαθίσταται μέγιστον. (m, n, p εἶναι δοθέντες θετικοὶ ἀριθμοί).

Υπόδ: Ἀρμεῖ νά εὔρεθῇ τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως $f(x, y, z) = m \log x + n \log y + p \log z$.

2. Νά εὔρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $(x_1 x_2 \dots x_n)^2$ ὑποκείμενον εἰς τὴν συνθήκην $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Ἀπολοιδῶς χρησιμοποιοῦντες τὸ ἄνωτέρω συμπέρασμα δεῖξατε διὰ τοὺς θετικούς ἀριθμούς a_1, a_2, \dots, a_n ὅτι :

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

3. Εάν $f(x) = x_1^k + \dots + x_n^k$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, δείξτε ότι ένα τοπικόν άκρότατον της f ύπoκει μένo εις τήν συνθήκη $x_1 + \dots + x_n = a$ είναι τό $a^k \cdot n^{1-k}$.

4. α) Η ά εύρεση ή μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ύποκειμένη εις τās συνθήκας $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ και $z = x + y$.

β) Δώσατε μία γεωμετρία ήρμηνεία του άνωτέρω άποτελέσματος.

5. Δίδεται ή συνάρτησις $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \cdot \left(1 - \frac{x_1^{\theta_1}}{b_1} - \dots - \frac{x_n^{\theta_n}}{b_n}\right)^a$, όπου αί έμβανιζόμενα σταθερά είναι πάσαι θετικαί και είναι ώρισμένη επί του άνοικτου σούλου $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^{\theta_1}}{b_1} + \dots + \frac{x_n^{\theta_n}}{b_n} < 1\} \cap (0, +\infty) \times \dots \times (0, +\infty)$.

Δείξατε ότι ή άνωτέρω συνάρτησις επιδέχεται ένα μόνον μέγιστον έντός του Ω .

Λύσις: Η f είναι συνεχής και θετική έντός του συμπαχού $\bar{\Omega}$ και μηδενίζεται επί του σούλου του Ω , όποτε επιδέχεται ένα τούλάχιστον μέγιστον έντός του Ω (βλέπε, θεωρ. V-1-1).

Θά δείξωμεν ότι τούτο είναι μοναδικό. Επειδή ή $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ έχει παραγώγους πάσης τάξεως ώς πρός όλες τίς μεταβλητές, άρμει τό σύστημα: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i=1, 2, \dots, n$ νά έχη μοναδική λύσιν,

$$\text{Είναι } \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, i=1, 2, \dots, n \iff \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{b_1} + \frac{a\theta_1}{a_1 b_1}\right) x_1^{\theta_1} + \frac{1}{b_2} x_2^{\theta_2} + \dots + \frac{1}{b_n} x_n^{\theta_n} = 1 \\ \frac{1}{b_1} x_1^{\theta_1} + \left(\frac{1}{b_2} + \frac{a\theta_2}{a_2 b_2}\right) x_2^{\theta_2} + \dots + \frac{1}{b_n} x_n^{\theta_n} = 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{b_1} x_1^{\theta_1} + \frac{1}{b_2} x_2^{\theta_2} + \dots + \left(\frac{1}{b_n} + \frac{a\theta_n}{a_n b_n}\right) x_n^{\theta_n} = 1 \end{array} \right. \quad (\Sigma)$$

ή όρίσουσα τούτου είναι:

$$|A| = \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_n} \begin{vmatrix} 1 + \frac{a\theta_1}{a_1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \frac{a\theta_2}{a_2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 + \frac{a\theta_n}{a_n} \end{vmatrix} = \frac{a^n \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n}{b_1 b_2 \dots b_n a_1 a_2 \dots a_n} \left(1 + \frac{a_1}{a\theta_1} + \dots + \frac{a_n}{a\theta_n}\right) > 0.$$

Συνεπώς τό (Σ) είναι σύστημα Grammer με άγνωστους $y_i = x_i^{\theta_i}$, $i=1, 2, \dots, n$.

Επίσης είναι: $A_i = \frac{a^{n-1} \theta_1 \dots \theta_i \dots \theta_n}{b_1 \dots [b_i] \dots b_n a_1 \dots [a_i] \dots a_n}$, $i=1, 2, \dots, n$.

Άρα ή μοναδική λύσις του (Σ) είναι: $y_i = x_i^{\theta_i} = \frac{A_i}{|A|} = \frac{b_i a_i}{\left(1 + \frac{a_1}{a\theta_1} + \dots + \frac{a_n}{a\theta_n}\right) a\theta_i} > 0$, $i=1, 2, \dots, n$ (δεκτή λύσις).

11

26. Δείξατε ότι εις κάδε τρίγωνον ΑΒΓ ύπάρχει ένα σημείον Ρ τοιούτον, ώστε τό άθροισμα $PA^2 + PB^2 + PC^2$ νά μoδίσταται ελάχιστον και ότι τό Ρ είναι τό βαρύκεντρον του τριγώνου.

ΠΙΝΑΞ ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΩΝ ΟΝΟΜΑΤΩΝ & ΕΝΝΟΙΩΝ

Alembert, d'..... 516

Beltrami..... 357

Binet..... 247

Bonnet..... 356

Borel..... 149

Catalan..... 360

Cauchy..... 16

Cayley..... 243

Cristoffel..... 327

Curl..... 453

Darboux..... 155, 217, 329

Dirichlet..... 253

Divergence..... 449

Dupin..... 311

Enneper..... 357

Euler..... 54, 315

Frenet..... 263, 266

Fresnel..... 243, 255

Gauss..... 316, 325, 428, 430

Gradient..... 449

Green..... 383, 461

Hamilton..... 450

Hausdorff..... 20

Heine..... 149

Hilbert..... 25

Jacobi..... 88, 97, 100

Lagrange..... 122

Laplace..... 79, 452

Lebesgue..... 149

Meusnier..... 305

norme..... 9, 11, 25

Ostrogradsky..... 430, 432, 460

Poisson..... 186

Ribaucour..... 329

Riemann..... 154, 216

Rodrigues..... 321

rotation..... 453

Schwartz..... 25, 27

Stirling..... 249

Stokes..... 424, 461

Taylor..... 63

Wallis..... 248

Weierstrass..... 207

Weingarten..... 325, 327

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΡΩΝ

<u>A</u>		ΣΕΛΙΣ
Ἄθροισμα, Darboux	155,217	
" Ἀλγεβρωτιῶν	361,402	
" Riemann	154,216	
ἀνολογία	14	
" , βασιμὴ	16,17	
ἀντίστα , ἀπόλυτα	127	
" , ἐλεύθερα	121	
" , σχετιὰ	107	
" , ὑπὸ συνθήκας	120	
αὐτὶς , μακρυλότητος	265	
" , στρέψεως	266	
ἀνάδελτα ,	448	
ἀνισότης, Schwartz	25	
ᾠδίσμα , διαχωρ. Hausdorff	20	
ᾠξων , πολυμῶς	227	
ἀπειρινότητες, ἰσομετρίῃ	349	
" , ἰσομετρίῃ	349	
" , σύμμορφος	348	
ἀπόμνησις,	451	
ἀπόστασις	12,27	
" , Εὐκλείδειος	13	
" , συνόλων	149	

<u>B</u>		
Βήτα , συνάρτησις	247	

<u>Γ</u>		
Γενέτειρα	290,291	
γινόμενον , ἐξωτερικόν	257	
" ἐξωτερικόν	24,256	

		ΣΕΛΙΣ
γινόμενον , μιχτόν	258	
γραμμὴ , ἀνακάμψεως	143,342	
" , γεωδαισιμῇ	332	
" , διανυσματικῇ	440	
" , διεκδύνσεως	440	
" , δυναμικῇ	440	
" , ἰσοβαρῆς	438	
" , ἰσοθερμὸς	439	
" , ἰσοσταθμικῇ	438	
" , ρευματικῇ	440	
" , χαρακτηριστικῇ	142,345	
γωνία ἀρνητικῇ	422	
" θετικῇ	422	
" στερεὰ	421	

<u>Δ</u>		
διάμετρος συνόλου	27,148	
διάνυσμα ἐφαπτομενικόν	260	
" , δέξεως	41	
διαφορικόν , ὀλίγον	52, 58, 60	
διαφορικόν , τέλειον	67	
διαφορικὸς , τελεστής	52, 60	
διεκδύνσεις , ἀσυμπτωτικαί	322	
" , πρωτεύουσαι	312	
δείκτρια , τοῦ Dupin	311	
δυναμικόν	456	

<u>Ε</u>		
Ἐγγυτάτη , σφαῖρα	277	
Ἐγγύτατον , ἐπίπεδον	264	

	ΣΕΛΙΣ
ἑλξίς ,νευτώνειος.....	230
ἑμβαδόν ,ἐπιφανείας.....	191
" ,χωρίου.....	151
ἐνεδιχμένη.....	146,281
ἐΞειλιχμένη.....	146,280
ἐΞισώσεις ,Laplace.....	463
" ,Weingarten.....	327
" ,συμφυεῖς.....	270
ἐΞίσωσις ἐφαπτομένης.....	83
" ,καθέτου.....	83
" ,τοῦ Gauss.....	317
ἐπαφή ,η-τάξεως.....	360
ἐπιφάνεια.....	34
" ,ἀναπτυκτική.....	339
" ,διανυσματική.....	441
" ,διπλευρὸς.....	411
" ,ἐφαπτομενική.....	278
" ,ἰσοβαρής.....	438
" ,ἰσοσταθμική.....	438
" ,μονόπλευρὸς.....	412
" ,προσανατολισμός.....	412
ἐπιτάχυνσις ,ἐφαπτομενική.....	268
" ,κεντρομόλος.....	268
εὐθεία ,χαρακτηριστική.....	342
εὐδαιοποιούν ,ἐπίπεδον.....	264

Θ

Θεμελιώδη ποσά.....	291,302
Θεώρημα ἀπουλίσσεως.....	429,431
" Beltrami-Enneper.....	357
" Bonnet.....	356

	ΣΕΛΙΣ
Θεώρημα ,Borel-Heine.....	149
" ,Catalan.....	360
" ,Darboux.....	159
" ,Euler.....	315
" ,Gauss.....	430
" ,Meusnier.....	305
" ,Μέσος τιμής.....	61,66,219
" ,Ostrogradsky.....	429
" ,Πάννου.....	368
" ,Peano.....	493
" ,πεντ. συναρτήσεως.....	77
" ,Schwartz.....	57

Κ

Καμπύλη ,ἀσυμπτωτική.....	322
" ,έσφαιροκέντρική.....	278
" ,λεία.....	175
" ,τμηματικής λείας.....	175
καμπυλότης.....	265
" ,γεωδαισιακή.....	329
" ,κάθετος.....	303
" ,μέση.....	316
" ,όρινη.....	316
καμπυλόγραμμοι ευ/ναι.....	224
κανονική, παράστασις καμπύλης.....	275
κέντρον καμπυλότητος.....	277
κλίμαξ ,ἀπειρινόσεως.....	346
κλίσις ,συναρτήσεως.....	449
κόμβος.....	132
κρίτηριον τοῦ Cauchy.....	16
κυνική σταθερά.....	396

κύβηλος	υαμπυλότητος	ΣΕΛΙΣ 277
κυβιλοφορία		457
κυβιλωματα, ηλευτρια		624

Λ

Λεία	, επιφανεια	215
"	υαμπύλη	175
λεπτότης	, διαμερίσεως	154, 216

Μ

Μέθοδος	Lagrange	122
μέρος	, κύριον	74
μετασχηματισμένη		360
μετασχηματισμός αντίρροπος		175
"	, γραμμικός	176
"	, ευθύς	175
"	, ετροφή	176
μετρίτη		12
μορφή	, δευτέρα	302
"	, πρώτη	297
"	, τρίτη	357

Ν

Νόμος	, διατηρήσεως ροής	474
"	, παραλληλογραμμιου	25
norme		9, 25
normes	, ισοδύναμοι	11

Ο

όδηγός		291, 292
όδογράφος		259
όλουθηρωμα	, επιυαμπύλιο	361
"	, επιφανειακό	408

όλουθηρωμα	Fresnel	ΣΕΛΙΣ 255
"	, πολλαπλούν	232
"	, Poisson	186
"	, Wallis	248
όρθογώνια στοιχεία		26
όρια	, επάλληλα	39
όρίδουσα	Ίαυωβιανή	88
όριον	, πιθανόν	36

Π

Παράγωγος	, κατά κατεύθυνειν	446
"	, μεριτή	48
"	, συνολοσυναρτήσεως	195, 229
παράγωγοι Β ²	, τάξεως	56
παράμετρος	, φυσική	261
παρατάσις	, φυσική	261
"	υανονική	275
πεδίον		24, 149, 437
"	, απλώς συνευτιυόν	393
"	, αετρόβιλον	452
"	, βαθμωτόν	437
"	, εωληνόσειδές	474
"	, διανυσματιυόν	457, 459
"	, ηλευτροστατιυόν	440
"	, μαχνητοστατιυόν	440
"	, πολλαπλώς συνευτιυόν	394
"	, των gradients	455
περιβάλλουσα		136, 142
περιοχή		22, 148
"	, συμμετρίκη	22
"	Lagrange	122, 919

	ΣΕΛΙΣ
προσανατολισμός ἀρνητιυός	414
" δετιυός	414
πυυνότης, γραμμιυή	336
" , ἐπιφανειαυή	197
" μέετη	197

P

Ροή, ὀδιυή	459
ροπή, ἀδρανείας	229
" , πολιυή	200

Σ

σημεία , ἀνώμαλα	132, 138, 289
" , ἑλλειπτιυά	308
" , ἰδιάδοντα	132, 138
" , ὀμαλιυά	313
" , παραβολιυά	309
" , ὑπερβολιυά	308
σημεῖον , ἀναυάμψεως	133
" , ἔσωτεριυόν	148
" , υωνιυόν	87
" , μεμονωμένον	22, 135
" , ὀμαλόν	132
" , πολλὰπλουή	132
στοιχεῖα , ὀρθογώνια	26
στοιχείον , ἑμβαδιυόν	298
στρέψις	265
" , γεωδαισιαυή	329
σύμβολα τοῦ Christoffel	327
συνάρτηεις , ἀρμονιυή	453
" , ὀήτα	246

	ΣΕΛΙΣ
συνάρτηεις , γάμμα	244
" , διανυσματιυή	30
" , δυναμιυή	456
" , διαφορίειςμος	50, 51
" , ἑυδετιυή	864
" , τυυρή	9
" , μονότιμος	478
" , ὀμαλῶς συνεχῆς	42, 150
" , ὀμογενής	54
" , πεπληεχμένη	75
" , συνεχῆς	30
" , συνεχ. διαφορίειςμος	51
συναρτησιαυή ἑξάρτηεις	96
συνέχεια , μεριυή	34
σύνολον , ἀνοιυτόν	19, 20
" , υλειστόν	24
" , συμπαγές	23
" , συνευτιυόν	23, 149
" , φραεχμένον	149
συνολοσεινάρτηεις	193
σύνφορον	148
" , διαμερίσειως	158
συντελεετής ἀποσειβέσειως	619
" , διαστολής	349
συντεταεχμέναι ἐπιφάνειαι	224
" , υαμπύλαι	177
" , υυλινδριυαί	98
" , συνάρτηεις	40
" , εφαιριυαί	99

	ΣΕΛΙΣ
συντεταγμένα φυσικαί.....	270
εὐστημα, γεωδ. συν/νων.....	334
" , γραμμικόν α' τάξεως.....	70
εφαρμυεντρική καμπύλη.....	278
εἰσείς, Πυθαγόρειος.....	26
εωληνοειδές.....	474

I

τελεστής, διαφορικῶς.....	60
" Hamilton.....	450
" Laplace.....	452
τετραγωνισμόν χωρίον.....	151
τομή, κλάδος.....	304
" πλάγια.....	304
τοπιόν ἐλάχιστον.....	114
" μέγιστον.....	114
τοπολογία, μετρίτη.....	19
τοπολογικῶς, χώρος.....	63
τρίαιδρον, γεωδαισιακόν.....	329
" , Darboux.....	329
" , Frenet.....	264
τύποι, Frenet.....	266
τύπος Green.....	388, 461
" Gauss.....	428, 460
" Ostrogradsky.....	429, 460
" Rodrigues.....	321
" Stirling.....	249
" Stokes.....	428, 462
" Taylor.....	63

Υ

	ΣΕΛΙΣ
Υπαυολουδία μετρ. χώρου.....	14
ὑπερδιάστημα.....	20

X

Χαρακτηριστική, γραμμή.....	142
" εὐθεΐα.....	342
χωρίον, ιανονικόν.....	172
" μή ιανονικόν.....	172
" κυβισμόν.....	215
χώρος Hausdorff.....	20
" Hilbert.....	25
" μέ norme.....	9
" μετρίως.....	12
" πλήρης.....	17
" τοπολογικῶς.....	20
" ψευδομετρίως.....	12

Ψ

Ψευδο-ἀπόστασις.....	12
ψευδομετρίτη.....	12

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. APOSTOL, T. : Advanced Calculus. Addison-Wesley, 1965.
2. BASS, J. : Cours de Mathématiques, vol. I. Masson, Paris, 1961.
3. BUDAC, B.-FOMIN, S. : Multiple Integrals (Translated from the Russian). Mir Publishers, Moscow, 1973.
4. COURANT, R. : Differential and Integral Calculus, vol. II. Interscience Publishers Inc. N. York, 1947.
5. CREIGTON BUCK, R. : Advanced Calculus. Mc Graw-Hill, N. York - London, 1956.
6. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ, Δ. : Ανώτερα Μαθηματικά, Τόμ. Β', Αθήνα, 1970.
7. DIXMIER, J. : Cours de Mathématiques du première cycle. Gauthier - Villars, Paris, 1972.
8. DIXON, C. : Applied Mathematics of Science and Engineering. John Wiley and Sons, London, 1971.
9. FLETT, T.M. : Mathematical Analysis. Mc Graw-Hill, London, 1966.
10. GARNIER, H. : Fonctions de variable réelles I. Gauthier-Villars, Paris, 1963.
11. GOODMAN, A.W. : Modern Calculus with Analytic Geometry. Mc Millan Company, N. York, 1968.
12. GOURSAT, E. : Cours d'Analyse Mathématique, vol. I, II. Gauthier - Villars, Paris, 1933.
13. HAGUE, B. : An Introduction to vector Analysis. Methuen and Co Ltd, London, 1970.
14. ΚΑΠΠΟΥ, Δ. : Ασκήσεις Αναλύσεως I, τεύχος Β', Γ'. Αθήνα, 1967.
15. ΚΑΠΠΟΥ, Δ. : Ασκήσεις Αναλύσεως II, τεύχος Α'. Αθήνα, 1967.
16. ΚΡΗΤΙΚΟΥ, Ν. : Πρόχειρες σημειώσεις Ανωτέρων Μαθηματικών, τόμ. I, II.
17. ΛΕΓΑΤΟΥ, Γ. : Γενικά Μαθηματικά, τεύχος Β'. Αθήνα, 1967.
18. LAINE, E. : Précis d'Analyse Mathématique. Vuibert, Paris, 1946.
19. LIPSCHUTZ, M. : Differential Geometry. Schaum's Outline series, Mc Graw-Hill, 1969.
20. ΜΠΡΙΚΑ, Μ. : Μαθήματα Θεωρίας Επιφανειών, τεύχος I, II. Αθήνα, 1967.
21. ΠΑΛΛΑ, ΑΡ. : Ολοκληρωτικός Λογισμός, Αθήνα, 1960.
22. PISKOUNOV, N. : Calcul Différentiel et Intégral, vol. II, Moscou, 1969.
23. PISOT, C. - ZAMANSKY, M. : Mathématiques Générales. Dunod, Paris, 1963.

24. PROTTER - MORREY : Modern Mathematical Analysis. Addison -
- Wesley, Massachusetts, London, 1964.
25. QUINET, J. : Cours élémentaires de mathématiques Supérieurs,
tom. 5. Dunod, Paris, 1968.
26. SMIRNOV, V. : Advanced Calculus, vol. 2. Pergamon Press, 1964.
27. SPAIN, B. : Vector Analysis. Van Nostrand Company Ltd, London,
1967.
28. SPIEGEL, M. : Advanced Calculus. Schaum's Outline Series, 1963.
29. STOKER, J. : Differential Geometry. Wiley-Interscience, N. York
- London, 1969.
30. LASS, H. : Vector and Tensor Analysis, Ed. Mc Graw-Hill, N. York
1950.
31. SMIRNOV, V. : A course of Higher Mathematics, Pergamon Press, 1964.
32. SPIEGEL, M. : Vector Analysis, McGraw-Hill.